

4 Aplicações I

4.8 O tunelamento através de uma barreira

4.8.1 O potencial degrau

Como introdução ao tema próprio desta seção consideramos uma partícula com energia total E que incide sobre um degrau de potencial de altura $U_0 > E$.

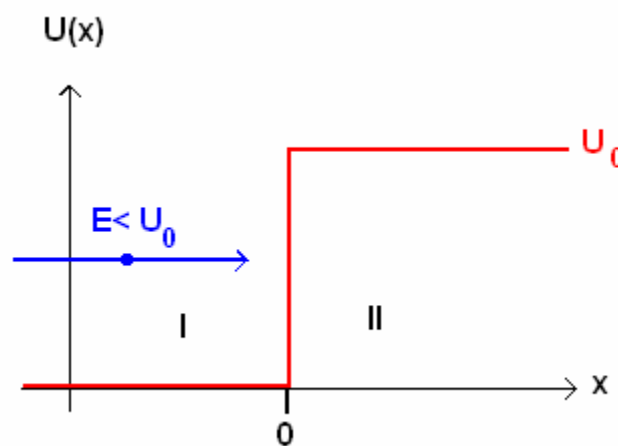


Fig.: 1

A energia potencial da partícula é nula à esquerda do degrau, ou seja temos $U(x) = 0$ para $x < 0$.

(Um potencial degrau podemos realizar por meio de dois cilindros mantidos a diferentes voltagens. Um elétron se move ao longo do eixo dos cilindros e será acelerado ao cruzar o espaço entre os dois eletrodos (cilindros).)

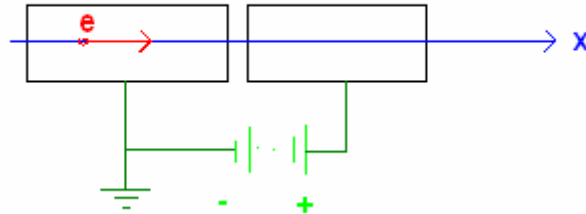


Fig.: 2

Classicamente, a partícula não pode passar para a região $x > 0$, pois sua energia cinética, $p^2/2m$, seria negativa nesta região:

$$E = p^2/2m + U(x) < U(x) \rightarrow p^2/2m < 0$$

Segundo a mecânica quântica, a partícula tem uma probabilidade finita para penetrar ligeiramente no degrau antes de ser totalmente refletido por ele. Para determinar esta probabilidade temos que resolver a equação de Schrödinger para o degrau de potencial da figura 1.

Na região I ($x < 0$), temos $U(x) = 0$, de forma que a equação de Schrödinger se reduz a

$$d^2\psi_1/dx^2 + \alpha^2 \psi_1 = 0, \quad x < 0 \quad (1)$$

onde
$$\alpha := (2mE/\hbar^2)^{1/2} \quad (2)$$

(1) é a eq. de Schrödinger independente do tempo para uma partícula livre.

Na região II temos

$$d^2\psi_2/dx^2 - \beta^2 \psi_2 = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

onde
$$\beta = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar \quad (4)$$

A solução geral de (1) contém expoentes imaginarias

$$\psi_1(x) = A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x}, \quad x < 0 \quad (5)$$

Devido ao signo negativo que aparece na Eq. (3), resultam, neste caso, expoentes reais

$$\psi_2(x) = C e^{\beta x} + D e^{-\beta x}, \quad x > 0 \quad (6)$$

A parte com a exponencial crescente não pode ser usada, pois devemos manter $\psi_2(x)$ finita. Então

$$C = 0 \quad (7)$$

A condição de continuidade para ψ e ψ' nos conduz no ponto $x = 0$ a

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \text{ e } \psi'_1(0) = \psi'_2(0) \quad (8)$$

ou seja

$$A + B = C + D$$

$$i\alpha(A-B) = \beta(C - D) \quad (9)$$

Já que $C = 0$, resulta

$$A + B = D$$

$$A - B = i\beta D/\alpha$$

Somando, obtemos

$$A = D/2 \cdot (\alpha + i\beta)/\alpha$$

Subtraindo, dá

$$B = D/2 \cdot (1-i\beta/\alpha)$$

Com isso determinamos A e B em função de D. A autofunção da partícula para o potencial degrau com energia $E < U_0$ é

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{D}{2} \left[\left(1 + \frac{i\beta}{\alpha}\right) e^{i\alpha x} + \left(1 - \frac{i\beta}{\alpha}\right) e^{-i\alpha x} \right], & x \leq 0 \\ D e^{-\beta x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

A constante arbitrária, D, determina a amplitude da autofunção e pode ser fixada por normalização de ψ . Multiplicando $\psi(x)$ por $e^{-iEt/\hbar}$ proporciona a função de onda correspondente

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} Ae^{i(\alpha x - Et/\hbar)} + Be^{i(-\alpha x - Et/\hbar)}, & x \leq 0 \\ De^{-\beta x} e^{-iEt/\hbar}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

O primeiro termo da função de onda na região $x < 0$ é uma onda propagando-se na direita (no sentido de x crescente). Ela descreve a partícula incidindo da esquerda.

O segundo termo da função $\psi_1(x,t)$ representa uma onda propagando-se na esquerda, ela descreve uma partícula refletida por o degrau.

A intensidade da onda incidente é $|A|^2$ e a da onda refletida é $|B|^2$:

$$|B|^2 = \left| \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} A \right|^2 = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} \cdot \frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta} \cdot |A|^2 = |A|^2 \quad (12)$$

Então, a onda refletida tem a mesma intensidade que a onda incidente. Podemos interpretar este resultado dizendo que todas as partículas incidentes são refletidas do degrau de potencial em $x = 0$, incluindo aqueles que penetraram ligeiramente na região "proibida".

Aplicando a relação $\exp(\pm i\alpha x) = \cos \alpha x \pm i \sin \alpha x$, a função $\psi_1(x)$ pode ser escrita na forma de uma onda estacionária

$$\psi_1(x) = 2\alpha A [\cos(\alpha x) - \beta \sin(\alpha x)/\alpha]/(\alpha + i\beta) \quad (13)$$

para $\psi_2(x)$ obteremos

$$\psi_2(x) = 2\alpha A e^{-\beta x}/(\alpha + i\beta) \quad (14)$$

Descartando o fator comum complexo $2\alpha A/(\alpha + i\beta)$, podemos fazer um gráfico de (13) e (14).

Programa de MUPAD para uma partícula incidindo sobre um degrau de potencial:

- `reset://Elétron incidindo sobre um degrau de pot.`
`alpha:=1:`
`bet:=2:`
`psi1:=cos(alpha*x)-bet*sin(alpha*x)/alpha:`
`psi2:=exp(-bet*x):`
`p1:=plot::Function2d(psi1,x=-10..0,Color=RGB::Red):`
`p2:=plot::Function2d(psi2,x=0..4,Color=RGB::Green):`
`plot(p1,p2)`

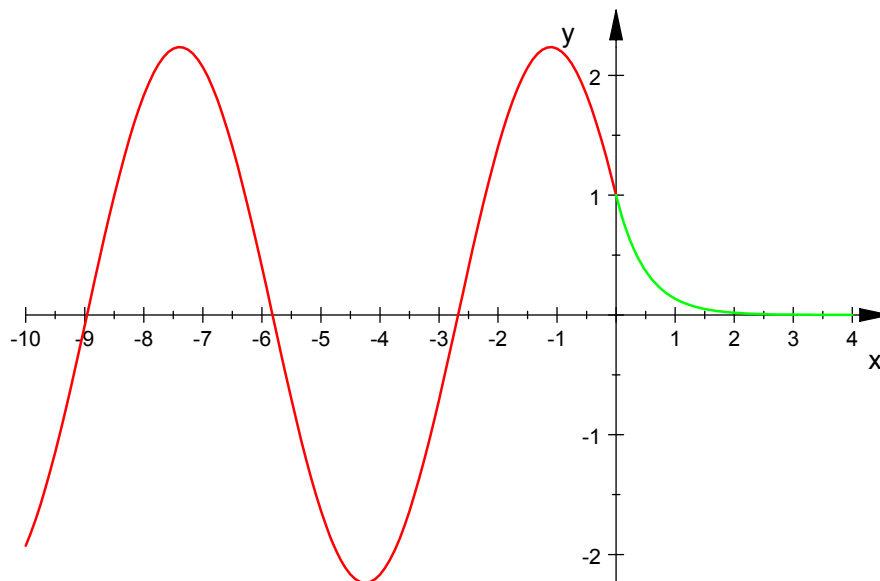


Fig.: 3

A mecânica clássica diz que a partícula com $E < U_0$ não pode ultrapassar o ponto $x = 0$. Entretanto, na mecânica quântica a partícula é descrita por uma função de onda $\psi(x)$ que apresenta uma penetração, com decaimento exponencial, na região classicamente proibida.

Quanto maior U_0 tanto maior β e tanto mais rápido a função ψ_2 tenderá a zero para $x > 0$ e para uma energia E dada. Para $U_0 \rightarrow \infty$, ψ_2 se tornará (essencialmente) zero para $x > 0$, pois também $\beta \rightarrow \infty$. Temos então a situação estudada na seção 2.2 no caso da partícula numa caixa unidimensional com paredes de potencial infinitamente altas.

No gráfico tomamos, arbitrariamente, $\beta = 2$ e $\alpha = 1$. A esquerda de $x = 0$ vemos a onda estacionária ψ_1 .

Calculemos, agora, a probabilidade, R , que a partícula incidente seja refletida. Esta probabilidade chamamos de coeficiente de reflexão.

A razão entre a intensidade da onda refletida e da onda incidente nos dá a probabilidade R . Temos, então,

$$R = \frac{v_2 |B|^2}{v_1 |A|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad (15)$$

v_1 = velocidade da partícula incidente, v_2 = velocidade da partícula refletida.
A velocidade v_2 da partícula refletida é igual a v_1 .

(Para um feixe de partículas definimos a *intensidade*, $|A|^2$, das partículas incidentes como o número de partículas por unidade de volume do feixe incidente. O *fluxo* incidente, J , da densidade de corrente das partículas incidentes é o número de partículas passando a unidade de área por unidade de tempo, isso é $v|A|^2$. O *fluxo de probabilidade* é a probabilidade por segundo de que uma *partícula* seja encontrada ao cruzar algum ponto de referência, movendo-se em um sentido particular.)

No caso de uma partícula só, utiliza-se, então, também a noção do fluxo de probabilidade (FP). O FP incidente é a probabilidade por segundo de encontrar a partícula cruzando um ponto na região $x < 0$ movendo-se no sentido de x crescente. O FP refletido é a probabilidade por segundo de encontrar uma partícula cruzando um ponto em $x < 0$ movendo-se no sentido de x decrescente.

Como a probabilidade por segundo de que uma partícula cruze um dado ponto é proporcional à velocidade dela, o FP é proporcional não apenas à intensidade da onda associada, mas também à velocidade da partícula.

A função ψ_2 , Eq. (14), mostra que existe uma amplitude de probabilidade de encontrar a partícula em pontos de coordenada $x > 0$, ou seja, dentro da barreira.

A probabilidade de encontrar a partícula entre x e $x + dx$ é, veja Eq. (14),

$$P(x)dx = |\psi_2|^2 dx = |A|^2 4E/U_0 \cdot e^{-2\beta x} dx, \quad (16)$$

já que $|z|^2 = z z^*$. A função $P(x)$ tem a forma

$$P(x) = P(0) e^{-2\beta x}, \quad (17)$$

onde $\beta = \sqrt{2m(U_0 - E)} / \hbar$.

A função cai para uma fração e^{-1} do seu valor inicial em uma distância de

$$\Delta x = 1/2\beta = \hbar/2(2m(U_0-E))^{1/2} \quad (18)$$

Chama-se esta distância de *profundidade de penetração*.

No limite clássico, o produto de m por (U_0-E) é tão grande, comparado a \hbar^2 , que Δx é imensuravelmente pequeno. Para uma partícula de poeira muito pequena, de raio $r = 10^{-6}$ m e densidade $\rho = 10^4$ kg/m³, movendo-se com a velocidade de só 10^{-2} m/s, obtemos $\Delta x \approx 10^{-19}$ m para um degrau de potencial de altura igual a duas vezes sua energia cinética (que é de $2 \cdot 10^{-18}$ J).

Mas, a situação é bem diferente para um elétron de massa $m \approx 10^{-30}$ kg e energia cinética de $2\text{eV} \approx 3,2 \cdot 10^{-19}$ J que colide em uma barreira de potencial de altura igual a $5\text{eV} \approx 8 \cdot 10^{-19}$ J.

Pela Eq. 18 calculamos

$$\Delta x = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} / 2(2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 4,8 \cdot 10^{-19} \text{ J})^{1/2} = 0,56 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

A profundidade de penetração é, neste caso, da ordem de dimensões atômicas.

A seguir vamos estudar o tunelamento através de uma barreira de largura finita. Na internet pode-se encontrar muitos artigos sobre este tema e, em especial, programas (applets) que permitem uma simulação do fenômeno de penetração de uma barreira de largura de dimensão atômica. Aqui são dois sites deste tipo como exemplo:

<http://www.cip.physik.uni-muenchen.de/~milq/kap11/k113p01.html>

<http://webber.physik.uni-freiburg.de/~hon/vorlws9900/film2.mpg>

4.8.2 O efeito túnel

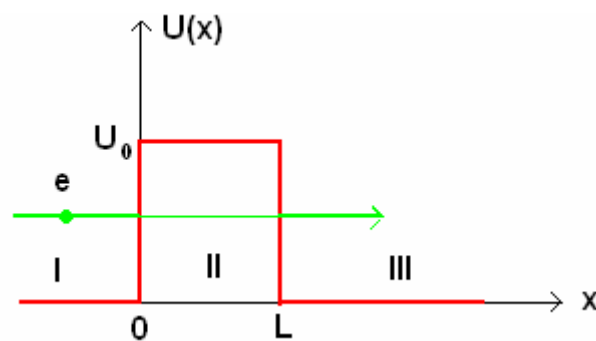


Fig.: 4

Consideramos partículas (elétrons) incidindo da esquerda e vamos discutir a probabilidade de transmissão para a região III. $U(x)$ é zero nas regiões I e III. Na região II, para $0 < x < L$, temos $U(x) = U_0 > E$.

As equações para ψ nas diferentes regiões são idênticas as (1), (2), (3) e (4). Falta a seguinte equação para a região III

$$d^2\psi_3/dx^2 + \alpha^2 \psi_3 = 0, \quad x > 0 \quad (19)$$

onde
$$\alpha := (2mE/\hbar^2)^{1/2} \quad (20)$$

A solução nesta região é $\psi_3(x) = F e^{i\alpha x}$ que representa uma onda plana dirigindo-se para a direita (não existem, nesta região, partículas movendo-se para a esquerda.)

Nas regiões I e III temos, então, estados periódicos e na região II há um estado decaindo exponencialmente.

Das seguintes equações podemos determinar as constantes A, B, C, D e F

$$A + B = C + D$$

$$i\alpha(A-B) = \beta(C-D) \quad (21)$$

$$Ce^{\beta L} + De^{-\beta L} = Fe^{i\alpha L}$$

$$\beta(Ce^{\beta L} - De^{-\beta L}) = i\alpha Fe^{i\alpha L} \quad (22)$$

Com $a := \beta + i\alpha$ e $b := \beta - i\alpha$ obteremos

$$C = (aA + bB)/2\beta$$

$$D = (bA + aB)/2\beta \quad (23)$$

e da mesma maneira resulta

$$C = aF e^{-bL}/2\beta$$

$$D = bF e^{aL}/2\beta \quad (24)$$

Das equações (23) e (24) seguem as relações para R e T, os coeficientes de reflexão e transmissão, nas quais estamos interessados em determinar. (Podemos determinar a relação entre quaisquer duas amplitudes.)

Já vimos, Eq. (15), que $R = |B/A|^2$. Análogamente definiremos o coeficiente de transmissão como $T = |F/A|^2 = |F|^2/|A|^2$.

(Quando utilizamos o conceito de *densidade de corrente* dada pelo produto da *densidade de probabilidade* pela velocidade, ou seja $j = |\psi|^2 v$, podemos definir

$$T = |j_e/j_i|, \quad (25)$$

onde j_e e j_i são, respectivamente, as densidades de corrente emergente e incidente. Eq. (25) conduz ao mesmo resultado que $T = |F/A|^2$.)

Introduzindo as soluções em (25) e fazendo alguns cálculos "simples", veja mais adiante em 4.8.3 alguns ajudas, obtém-se

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \left| 1 + \frac{U_0^2 \sinh^2 \beta L}{4E(U_0 - E)} \right|^{-1} \quad (26)$$

e para o coeficiente de reflexão

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| 1 + \frac{4E(U_0 - E)}{U_0^2 \sinh^2 \beta L} \right|^{-1} \quad (27)$$

$\sinh x := (e^x - e^{-x})/2$; para x grande, vale $\sinh x \approx e^x/2$. Introduzindo $s := E/U_0$ nos permite escrever $T = |1 + \sinh^2(\beta L) / 4s(1-s)|^{-1}$.

Se β ou L for grande, obteremos

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\beta L} \quad (28)$$

Para simplificar a notação, introduzimos

$$T_0 = 16 s (1 - s) \quad (29)$$

sendo $\beta = (2m(U_0 - E))^{1/2} / \hbar = (2mU_0 (1-s))^{1/2} / \hbar$ e $s := E/U_0$.

Para ter idéias claras, apliquemos as equações (26) e (28) ao caso de um elétron com $E = 2 \text{ eV} = 2 \cdot 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,2044 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ colidindo com uma barreira de $U_0 = 10 \text{ eV}$ e uma espessura de $L = 0,1 \text{ nm} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

- **reset() //coef. de transmissão**
h1:=1.0546*10⁽⁻³⁴⁾ //h barra
eV:=1.6022*10⁽⁻¹⁹⁾ :
EE:=2*eV: // energia do elétron
U0:=10*eV:
m:=9.10939*10⁽⁻³¹⁾ :
bet:=sqrt(2*m*(U0-EE))/h1://constante β
l:=10⁽⁻¹⁰⁾ //grossura da barreira
T0:=16*EE/U0*(1-EE/U0); //Eq. (29)
Tex:=(1+U0²*(sinh(bet*l))²/(4*EE*(U0-EE)))⁻¹;// Eq. (26)
Taprox:=T0*exp(-2*bet*l); // Eq. (28)

Os resultados são para $E/U_0 = 0,2$:

$$T_0 = 2.56; T_{\text{exato}} = 0,137; T_{\text{aprox}} = 0,141$$

O elétron tem uma chance de 14% de passar pela barreira, ou seja: 14 de 100 elétrons incidentes vão realizar, na média, o efeito túnel.

Para $s := E/U_0 = 0,5$, obtemos $T_0 = 4$, mas, para $s = 1$, resulta $T_0 = 0$. Veja o gráfico de T_0 em função de s na seguinte Figura 5:

```

• reset()//coeficientes T0, Tex e Taprox de transmissão
h1:=1.0546*10^(-34):
eV:=1.6022*10^(-19):
U0:=10*eV:
m:=9.10939*10^(-31):
bet:=sqrt(2*m*U0*(1-s))/h1:
l:=10^(-10):
T0:=16*s*(1-s):
Tex:=(1+U0^2*(sinh(bet*l))^2/(4*s*U0^2*(1-s)))^-1:
Taprox:=T0*exp(-2*bet*l):
t0:=plot::Function2d(T0,s=0..1,Color=RGB::Green):
t1:=plot::Function2d(Tex,s=0..1,Color=RGB::Red):
t2:=plot::Function2d(Taprox,s=0..1,Color=RGB::Blue):
plot(t0,AxisTitles=["E/Uo","T"])

```

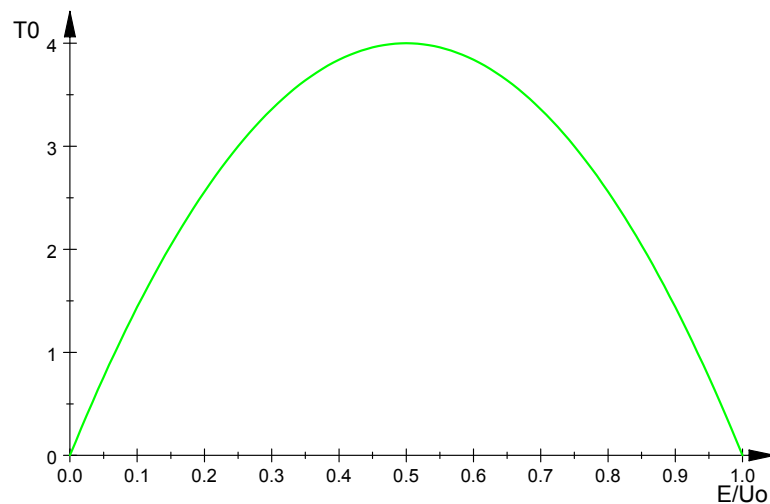


Fig.: 5

Não pode-se esperar que Eq. 28 é uma boa aproximação para Eq. 26 para valores de $E > U_0/2$. A seguinte Figura 6 demonstra isso:

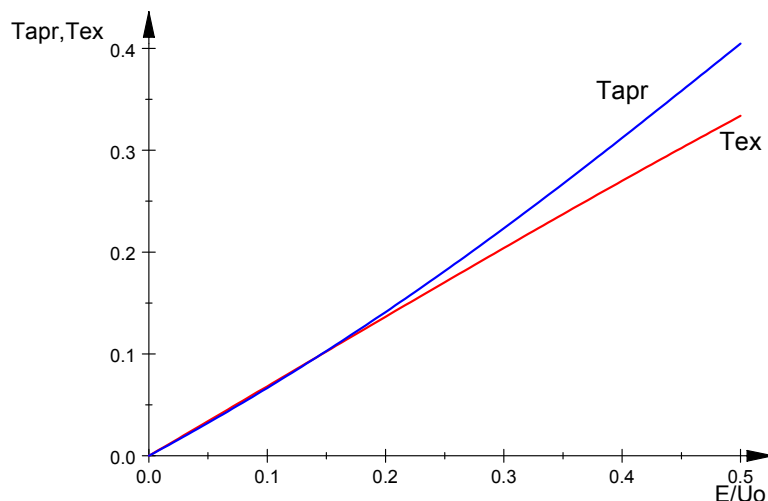


Fig.: 6

De interese especial é a dependência de T_{ex} da energia incidente para o caso $E > U_0$.

Neste caso de $E > U_0$ obtém-se

$$T = \left| 1 + \frac{\text{sen}^2(\beta_1 L)}{4s(s-1)} \right|^{-1} \quad (30)$$

onde $s := E/U_0$ e $\beta_1 = (2mU_0(s-1))^{1/2}/\hbar$; observe que aparece sen em vez de sinh. Na MUPAD temos

```
bet1:=sqrt(2*m*U0*(s-1))/h1:
Tex:=(1+(sin(bet1*L))^2/(4*s*(s-1)))^-1:
```

A Fig. 7 ilustra a Eq. (30) para $L = 4.5 \cdot 10^{-10}$ m e $E > U_0$:

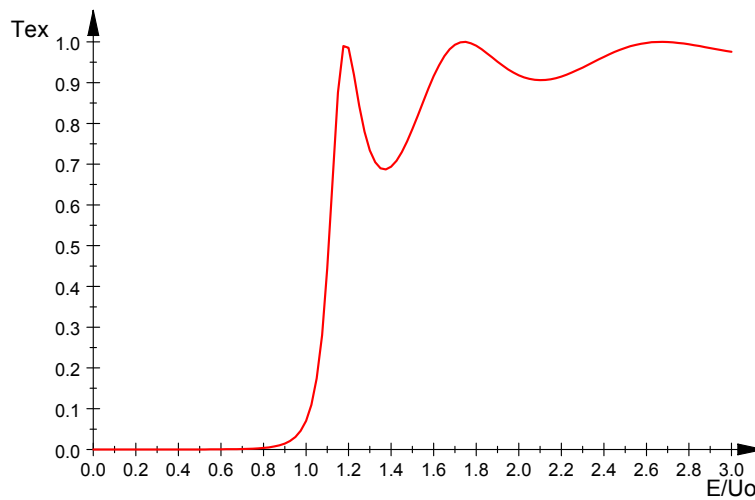


Fig.: 7

Na Fig. 7 estamos observando *ressonâncias* de transmissão. Trata-se, em essência, outra vez do efeito Ramsauer, veja 1.3. Para determinadas energias, a barreira comporta-se como se fosse transparente aos elétrons incidentes e funciona como um filtro de energia.

Para $0 < s < 3$ podemos observar três picos com $T \approx 1$. O primeiro para $s \approx 1,19$ dá $T = 0,9999$ e $\beta_1 L \approx 3,14$. Em MUPAD pode-se ler as coordenadas com uma "lupa" virtual. O segundo pico tem $s \approx 1,74$, $T \approx 0,9999$ e $\beta_1 L \approx 6,27$. Para o terceiro pico resultam $s \approx 2,67$, $T \approx 0,9999$ e $\beta_1 L \approx 9,42$.

Estes máximos de transmissão satisfazem à condição $\beta_1 L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ para a qual T se torna igual a um, segundo a Eq. (30).

Os elétrons têm comprimentos de onda de de Broglie $\lambda = 2\pi/\beta_1$. Substituindo os valores $\beta_1 = \pi/L, 2\pi/L$ e $3\pi/L$ vemos que $L = \lambda/2; \lambda; 3/2 \lambda$

A condição para que $T = 1$ significa, então, que o comprimento da barreira seja igual a um número inteiro ou semi-entireiro de λ de de Broglie.

Os picos num gráfico que representa uma certa propriedade física em função de energia são comumente chamados de *ressonâncias*. Podemos dizer, que as ressonâncias de transmissão para $E > U_0$ correspondem a energias E_n tais que

$$\beta_{1,n} = n \pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

pois $\beta_{1,n} = (2mU_0(E_n/U_0 - 1))^{1/2}/\hbar$ depende da energia E_n dos elétrons.

O efeito túnel tem aplicações técnicas importantíssimas como no diodo túnel e no microscópio de varredura por tunelamento. Um fenômeno ótico, inteiramente análogo à transmissão total de partículas por barreiras de comprimento igual a um número inteiro ou semi-inteiro de comprimentos de onda, é utilizado no revestimento de lentes para obtenção de transmissões muito altas de luz e em filtros óticos de filmes finos. A analogia estreita entre a ótica e a mecânica quântica vê-se nas equações básicas de ambas teorias, pois elas tem praticamente a mesma forma.

(A abordagem correta na mecânica quântica seria o uso dum ensemble de pacotes de ondas para a descrição dum feixe de partículas. Mas, os cálculos tornam-se bastante difíceis.)

4.8.3 Tips para deduzir a Eq. 26

As seguintes indicações querem ajudar ao leitor para superar as dificuldades algébricas no caminho para as Equações 26 e 27.

$$\gamma := \beta/\alpha; \quad \Gamma := F e^{i\alpha L}; \quad |\Gamma|^2 = |F|^2$$

$$D e^{-\beta L} + C e^{\beta L} = \Gamma; \quad i\gamma (D e^{-\beta L} - C e^{\beta L}) = \Gamma$$

$$\rightarrow D e^{-\beta L} = \Gamma (1 + i\gamma) / 2i\gamma; \quad C e^{\beta L} = -\Gamma (1 - i\gamma) / 2i\gamma$$

$$\rightarrow A + B = C + D = \Gamma (\cosh(\beta L) - i/\gamma \cdot \sinh(\beta L))$$

$$e \quad A - B = \Gamma (\cosh(\beta L) + i\gamma \cdot \sinh(\beta L))$$

$$\rightarrow A = \Gamma (\cosh(\beta L) + i/2 (\gamma - 1/\gamma) \sinh(\beta L))$$

$$B = -i/2 \Gamma (\gamma + 1/\gamma) \sinh(\beta L)$$

$$\rightarrow |A/F|^2 = 1 + 1/4 (\gamma + 1/\gamma)^2 \sinh^2(\beta L)$$

$$|B/F|^2 = 1/4 (\gamma + 1/\gamma)^2 \sinh^2(\beta L) \dots (26), (27)$$

4.8.4 Emissão de campo (field emission)

Vamos estudar a emissão "a frio" de elétrons de um metal sob a ação de um campo elétrico -a *emissão de campo*.

Utilizaremos como modelo de elétrons dentro de um metal aquilo no qual os elétrons não experimentam nenhuma força (modelo do "gás de elétrons").

Dentro do metal, $U(x)$ será constante, ou simplesmente tomamos o potencial igual a zero. A experiência mostra que se necessita uma certa força para remover os elétrons do metal, o que significa que a energia do elétron é maior no exterior do metal do que dentro. Suponhamos que $U(x) = W = \text{constante}$ para $x > 0$. (Os pontos com $x < 0$ estão dentro do metal.) A constante W é a *função trabalho* do metal. W constitui a energia mínima de ligação de um elétron no metal e é da ordem de alguns elétrons-volt.

Será preciso de generalizar primeiro a Eq. 28, válida para uma barreira de potencial retangular, para uma forma qualquer da barreira de potencial, como indicada na figura 8.

Consideramos a barreira decomposta em bandas estreitas, quase retangulares, de largura d_i para as quais vale a aproximação 28.

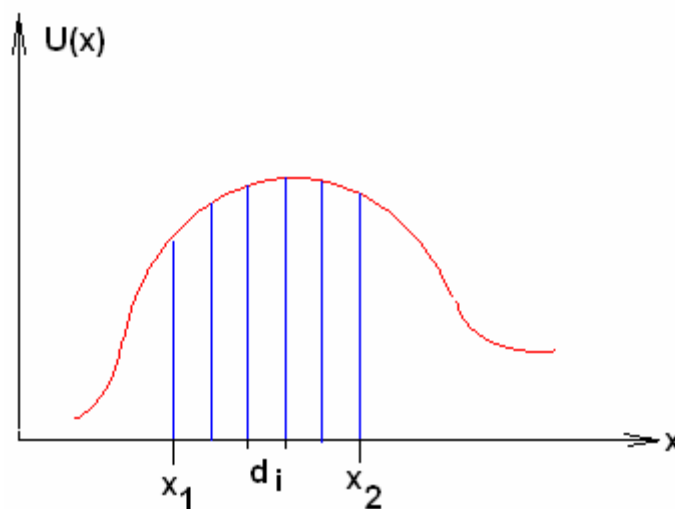


Fig.: 8

Para cada mini-barreira temos

$$T_i = T_{0,i} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x_i) - E)} dx} \quad (32)$$

T é o produto dos coeficientes de transmissão para as sucessivas bandas (probabilidades independentes se multiplicam)

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots = \exp(-2/\hbar \sum (2m(U_i - E)d_i)^{1/2})$$

A soma no argumento da função exponencial se transforma, no limite, na integral

$$T = T_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx} \quad (33)$$

Elétrons com a energia cinética $E_x < W$ não podem sair do metal. Mas, se aplicamos um campo elétrico E_{el} (no qual o elétron, de carga $-e$, tem a energia potencial $-e E_{el} x$), o elétron pode, eventualmente, atravessar a barreira resultante $W - e E_{el} x$ para $x > x_1 = 0$.

Já que $E_x = W - e E_{el} x_2$, temos $x_2 = (W - E_x)/e E_{el}$; $x_1 = 0$

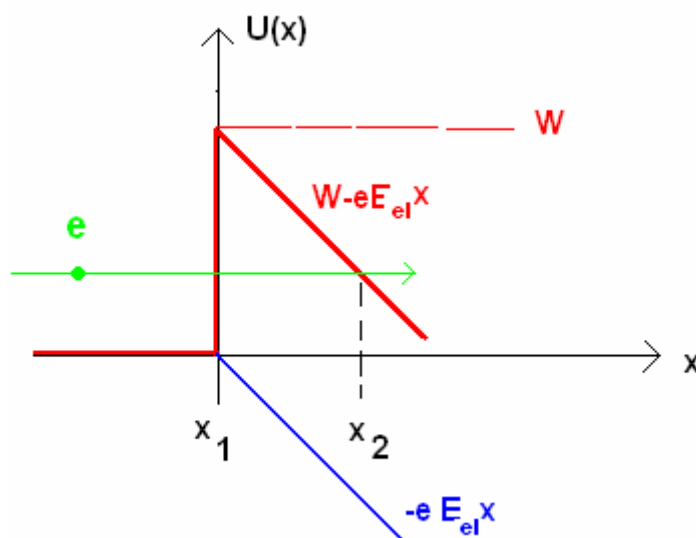


Fig.: 9

Agora precisamos calcular a integral

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(W - eE_{el}x - E_x)} dx \quad (34)$$

Introduzindo a nova variável $z = eE_{el} x/(W-E_x)$, resulta

$$S = \sqrt{2m} \frac{(W - E_x)^{3/2}}{eE_{el}} \int_0^1 \sqrt{1-z} dz = \frac{2\sqrt{2m}}{3} \frac{(W - E_x)^{3/2}}{eE_{el}} \quad (35)$$

Para o coeficiente T obteremos para elétrons com energia cinética E_x

$$T(E_x) = T_0 e^{-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{(W-E_x)^{3/2}}{eE_{el}}} \quad (36)$$

Tomando o valor médio de T sobre todos os valores E_x teremos

$$\langle T \rangle = \langle T_0 \rangle e^{-\frac{\varepsilon}{E_{el}}} \quad (37)$$

$\langle T_0 \rangle$ e ε são constantes do material.

Se denominamos por J_e a corrente dos elétrons dentro do metal movendo-se em direção à barreira, obtemos para a corrente da emissão "a frio"

$$J(E_{el}) = J_e \langle T \rangle = A e^{-\frac{\varepsilon}{E_{el}}} \quad (38)$$

$T := J_d/J_e$. Esta lei foi comprovada experimentalmente.

Uma abordagem mais detalhada (p.ex. segundo Fowler-Nordheim) proporcionaria a seguinte fórmula para a densidade de corrente

$$J(E_{el}) = C E_{el}^2 e^{-\frac{\varepsilon}{E_{el}}} \quad [A/m^2] \quad (39)$$

Por exemplo, as constantes para tungstênio têm os seguintes valores

$$C = 1,26 \cdot 10^5 \text{ A / V}^2 \text{ e } \varepsilon = 2,76 \cdot 10^{10} \text{ V / m}$$

No caso da emissão termiônica, a temperatura, T , desempenha o papel do campo elétrico E_{el} . Em vez de (39) obteremos a famosa equação de Richardson - Dushman

$$J_{th} = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}} \quad (40)$$

As constantes A e W podem ser determinadas experimentalmente medindo J_{th} em função de T para um cátodo dado. Se fizermos um gráfico $\ln (J_{th}/T^2)$ versus $1/T$ (Richardson-Plot), obteremos uma reta que corta o eixo perpendicular em $\ln A$ e que tem a inclinação $\text{tg } \delta = W/k$. Estes valores proporcionam A e W . k é a constante de Boltzmann de $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$

Na presença dum pequeno campo elétrico aumenta J_{th} (efeito Schottky).

No livro de Serway, Física 4, encontra-se um ensaio interessante sobre o Microscópio de Varredura por tunelamento, p. 83.