

## 7.3 Transformada de Laplace

### 7.3.1 Introdução

Uma ferramenta muito poderosa para encontrar as soluções das equações diferenciais lineares com coeficientes constantes é a *Transformada de Laplace*. (O nome é uma homenagem ao matemático francês P. S. Laplace, 1749-1827, que a estudou em 1782. Mas, as técnicas que usamos hoje em dia foram desenvolvidas em torno de um século depois por o engenheiro inglês O. Heaviside, 1850 - 1925.)

O uso de transformadas é conhecido -de muitas pessoas de idade apropriada- desde os dias da escola, pois a tabela de logaritmos decimais é usada no mesmo espírito que a tabela das transformações de Laplace. Vou explicar esta afirmação por meio do seguinte exercício:

$$\text{Calcule } x = 9,862^{3,48}.$$

Nos bons tempos, transformava-se primeiro o problema original escrevendo

$$\log x = 3,48 \cdot \log 9,862$$

O uso da função log transforma o problema complicado de elevar uma quantidade a uma potência (potenciação) em uma simples multiplicação (ou, também, a transformação de multiplicações e divisões em somas ou subtrações). Por meio de uma tabela logarítmica, encontramos  $\log x = 3,459$ .

Faltava somente buscar na tabela o antilogaritmo e obtivemos, assim, o resultado

$$x = \text{anti log } 3,459 = 2877.$$

Sendo, agora, adultos competentes, temos que resolver problemas de adultos competentes, por exemplo resolver uma equação diferencial por meio de uma tabela de transformações de Laplace. Mas aplicaremos a mesma técnica de três passos que utilizamos na escola resolvendo problemas com ajuda dos logaritmos:

1. Transformação da equação diferencial
2. Solução da equação transformada
3. Transformação inversa do resultado anterior.

### 7.3.2 Aplicando a transformada de Laplace

Sempre quando nos encontramos com funções do tempo, ou seja quando analisamos deslocamentos, velocidades, forças, tensões, correntes etc., será recomendável de perguntar-se, se a seguinte *transformada integral* (uma integral imprópria) não será útil para diminuir o nosso trabalho de cálculo:

$$F(s) := L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

Existem várias transformadas integrais, mas a dada pela relação (1) - que é denominada de *transformada de Laplace* (TL)- tem se mostrado particularmente útil na teoria das equações diferenciais ordinárias e parciais.

A integral define uma função  $F(s)$  para  $s$  tal que  $0 < e^{-s} < r$ , isto é, para  $s > \log(1/r)$ , onde  $r$  é o raio de convergência.  $F(s)$  é a "transformada de Laplace" de  $f(t)$ . Com a notação  $L\{f(t)\}$  queremos indicar que a integral pode ser vista como um operador  $L$  que transforma a função  $f(t)$  na função  $F(s)$  -isso explica o termo "transformada" usado acima.

Os três passos formulados acima podemos, agora, adaptar na relação (1):

1. Use a relação (1) para transformar o problema para uma função  $f(t)$  em um problema mais simples para outra função  $F(t)$ .
2. Resolva esse problema mais simples para encontrar  $F(t)$ .
3. Finalmente, recupere a função desejada  $f(t)$ .

A analogia com os passos de cálculo no caso de potenciação por meio da função  $\log$  (que corresponde à  $F$ ) é bem patente. Para encontrar  $f(t)$  (corresponde a  $x$ ), precisamos inverter a transformada, ou seja, encontrar  $L^{-1}\{F(s)\}$ , onde  $L^{-1}$  é o operador da transformada de Laplace inversa.

Vamos resolver agora um problema de valor inicial. Os passos a seguir, usando tabelas de Transformadas de Laplace, são bem explicados no já mencionado livro de W. E. Boyce e R. C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, sétima edição, LTC Editora, 2002, p. 158 ff. (Abreviatura: BDP)

Nós vamos calcular alguns exemplos deste livro usando MuPAD, que tem as transformadas incorporadas.

### Exemplo 1

Encontre a solução do problema de valor inicial com a equação homogênea

$$y'' - y' - 2y = 0$$

com as condições iniciais  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

### Solução:

Esse problema foi resolvido no livro BDP com o resultado

$$y(t) = e^{2t}/3 + 2e^{-t}/3.$$

É claro que com MuPAD obteremos a mesma solução:

- ```

reset() :
diffgl:=y''(t)-y'(t)-2*y(t)=0://Boyce-DiPrima p. 163
transform::laplace(diffgl, t, s) :
subs(%,y(0)=1,y'(0)=0,transform::laplace(y(t),t,s)=Y) :
L1:=solve(%,Y) :
L2:=op(op(L1([1])[1])) :
L:=op(L2,2) ;
y(t):=transform::invlaplace(L,s,t)

```

### Resultados:

$$(s-1)/[(s+1)(s-2)]$$

e

$$2\exp(-t)/3 + \exp(2t)/3$$

Existe uma fórmula geral para a transformada de Laplace inversa, mas necessita de conhecimentos sobre a teoria de funções de uma variável complexa.

As equações não-homogêneas são tratadas exatamente da mesma forma que as homogêneas; não é necessário resolver primeiro a equação homogênea correspondente. (A característica essencial do método da transformada de Laplace é o fato de que ele reduz a solução de uma equação diferencial ao problema de resolver uma equação algébrica.)

Vamos olhar agora um problema envolvendo uma equação diferencial não-homogênea:

### Exemplo 2

Encontre a solução da equação diferencial (BDP, p. 166)

$$y'' + y = \sin 2t$$

satisfazendo as condições iniciais  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ .

#### Solução:

É só usar a seguinte linha no programa anterior

```
diffgl:=y''(t)+y(t)=sin(2*t):
```

para obter o resultado:  $y = 2 \cos t + 5/3 \sin t - 1/3 \sin 2t$

Essa é a mesma solução que obtiveram BDP.

### Exemplo 3

Encontre a solução do seguinte problema inicial e fazer o gráfico da solução:

$$y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t} \text{ com } y(0) = y'(0) = 0$$

**Solução:**

- `reset() :`  
`diffgl:=y''(t)+4*y'(t)+4*y(t)=t^2*exp(-2*t) :`  
`transform::laplace(diffgl, t, s) :`  
`subs(% ,y(0)=0,y'(0)=0,transform::laplace(y(t),t,s)=Y) :`  
`L1:=solve(% ,Y) :`  
`L2:=op(op(L1([1])[1])) :`  
`L:=op(L2,2) :`  
`y(t):=transform::invlaplace(L,s,t)`

**Resultado:**

$$y(t) = t^4 e^{-2t} / 12$$

- `f:=plot::Function2d(y(t),t=0..10,AxisTitles=["t","y"]):`  
`plot(f)`

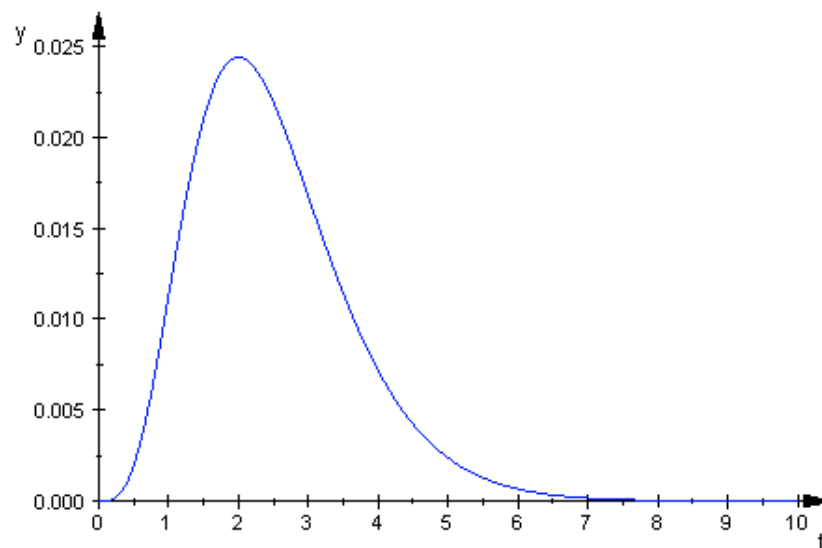


Fig.: 7.3\_1

Outro exemplo seria uma oscilação livre amortecida, veja seção 6.2. Vamos supor que a equação diferencial do movimento seja  $y'' + 2y' + 17y = 0$  com as condições  $y(0) = 20$  e  $y'(0) = 0$ .

O resultado, obtido por meio dos métodos "normais", é  $y(t) = 20,6 e^{-t} \cos(4t - 0,245)$ .

MuPAD dá a mesma solução, mas na forma  $y(t) = 20 e^{-t} \cos(4t + 1/4 \text{ sen } 4t)$ . Ambos os gráficos são idênticos:

- `f:=plot::Function2d(y(t),t=0..5,AxisTitles=["t","y"]):`  
`g:=plot::Function2d(20.6*exp(-t)*cos(4*t-0.245),`  
`t=0..5,Color=RGB::Red):`  
`plot(f,g)`

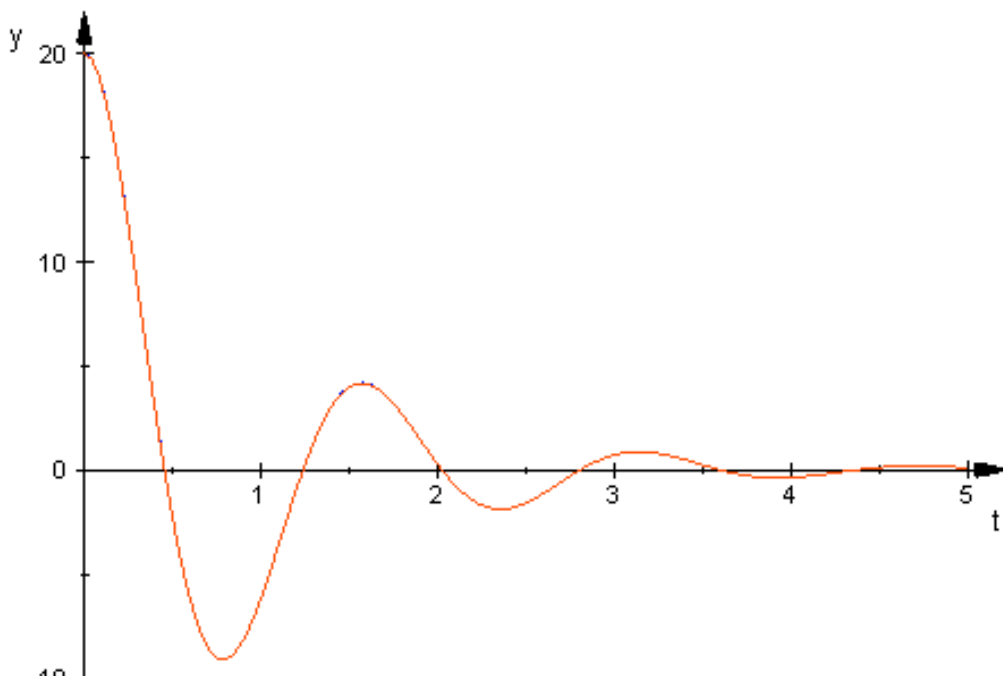


Fig.: 7.3\_2

No caso de um *sistema* de equações diferenciais devemos transformar cada equação separadamente.

O MuPAD pode resolver as equações diferenciais porque ele contém as regras para calcular as transformadas de derivadas:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0),$$

$$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0),$$

$$L\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$$

MuPAD mostra estas regras com as seguintes instruções

- `reset()://Transformadas das derivadas`  
`transform::laplace(y'(t),t,s);`  
`transform::laplace(y''(t),t,s);`  
`transform::laplace(y'''(t),t,s);`

**Resultados:**

```
s transform::laplace(y(t), t, s) - y(0)
s^2 transform::laplace(y(t), t, s) - D(y)(0) - s y(0)
s^3 transform::laplace(y(t), t, s) -s^2 y(0)-D(D(y))(0)-s D(y)(0)
```

**Exemplo 4** (BDP, Nr. 27, p. 162, *Função Gama*)

Considere a transformada de Laplace de  $t^k$ , onde  $k > -1$ .  
 Seja  $k$  igual a um inteiro positivo  $n$ ; mostre que  $L\{t^n\} = n!/s^{n+1}$ .

**Solução:**

Este é um exemplo que mostra que o método da TL pode usar-se nos estudos teóricos, pois a TL nos leva a uma generalização do conceito do fatorial para poder incluir números reais arbitrários  $> -1$  e números complexos com  $\text{Re}(z) > 0$ .

O parâmetro  $k$  deve ser maior que  $-1$ , a fim de impedir que a integral  $\int_{0, \text{inf}} t^k e^{-st} dt = L\{t^k\}$  diverja em  $t = 0$ . Feita essa restrição sobre  $k$ , a integral converge se  $s > 0$ .

Quando  $k$  é um inteiro positivo ou nulo, a integral pode ser facilmente calculada:

$$\int_{0,\text{inf}} e^{-st} dt = 1/s; \quad \int_{0,\text{inf}} t e^{-st} dt = 1/s^2; \quad \dots (s>0)$$

De um modo geral, uma integração por partes mostra que, se  $s>0$ , temos

$$\int_{0,\text{inf}} t^k e^{-st} dt = k/s \int_{0,\text{inf}} t^{k-1} e^{-st} dt \quad (2)$$

(Para a integração por partes, temos  $t^k \rightarrow kt^{k-1} dt$  e  $e^{-st} \rightarrow -1/s e^{-st}$ .  
A integração dá  $\int k^t e^{-st} dt = [-t^k e^{-st}/s]_{0,\text{inf}} + k/s \int t^{k-1} e^{-st} dt$ . Para  $s>0$  e  $k>0$  a parêntese é zero.)

Por indução concluímos que, para  $s > 0$ ,

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-st} dt = \frac{k}{s} \frac{k-1}{s} \dots \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad (3)$$

Para  $s = 1$ , a fórmula (3) será escrita  $k! = \int_{0,\text{inf}} t^k e^{-t} dt$ .

Com isso temos nas mãos um método para generalizar o *fatorial*, ou seja, poderíamos usar

$k! = \int_{0,\text{inf}} t^k e^{-t} dt$  para definir  $k!$  para um número real arbitrário maior que  $-1$ .

Costuma-se designar esse fatorial generalizado por  $\Gamma(k+1)$ .

A *Função Gama*  $\Gamma(k)$  é definida pela equação a seguir (segunda integral de Euler):

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt, \quad k > 0; \quad (4)$$

quando  $k$  é um inteiro positivo o nulo, temos  $\Gamma(k+1) = k!$

A integral de  $L\{t^k\}$  pode ser expressa em termos da Função Gama:

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-st} dt = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}, \quad s > 0 \quad (5)$$

Com isso, a Eq. (2) afirma que  $\Gamma(k+1)/s^{k+1} = k/s \Gamma(k)/s^k$ , ou seja,

$$\Gamma(k+1) = k \Gamma(k) \quad (6)$$

Mais propriedades da Função Gama encontram-se no livro de Boyce e DiPrima.



### 7.3.3 Aplicando a Série de Fourier

Nas duas últimas seções, mostramos as aplicações das Séries de Fourier em conexão com a equação de onda. Falta, agora, ver como se aplica a técnica de Fourier em certos casos concretos, avaliando também as integrais. É este o passo mais árduo numa análise de Fourier e, parece, que MuPAD 3 ainda não tem integrado funções especiais para essa tarefa. Também vamos olhar, novamente, as equações (20) de 7.1.4 e (38) da seção precedente, a 7.2.2, para explicar melhor sua origem.

Suponha que  $f(x)$  seja uma função (não-periódica) definida no intervalo  $[0, L]$ . Mostramos, nesta seção, que é possível representar  $f$  por uma série em senos ou por uma série em co-senos, através da construção da extensão periódica ímpar ou par de  $f$ , respectivamente.

Na seguinte figura 7.3\_3 vemos, como exemplo, a função  $f(x) = x$  definida no intervalo  $[0, 1]$ . A figura mostra também a construção de uma função *periódica e par* que coincide com  $f(x) = x$  no intervalo  $[0, 1]$ . (Existem várias maneiras de construir uma função periódica coincidindo com  $f(x) = x$  no  $[0, 1]$ , por exemplo uma função dente de serra ou uma função triangular par etc. Veja a Eq. (9) para o caso ímpar.) A função periódica, definida em todo o eixo- $x$ , chamamos a *extensão par/ímpar periódica* da função dada.

$$f(x) \text{ é par se } f(-x) = f(x); \quad f(x) \text{ é ímpar, se } f(-x) = -f(x).$$

A função  $\sin(n\pi x/L)$  é ímpar e tem o *período*  $T = 2L$ , pois temos

$$\sin(n\pi(x+2L)/L) = \sin(n\pi x/L + 2n\pi) = \sin(n\pi x/L)$$

Se a extensão periódica é par, como na figura 7.3\_3, a série de Fourier correspondente conterá só termos co-seno, ela será uma "série de Fourier em co-senos".

(A função  $f(x) = |x|$  coincide também com  $f(x) = x$  para  $0 \leq x \leq 1$ .)

O programa a seguir mostra como se pode definir um procedimento com um número grande de instruções "if" - "else".

- ```
F:=proc(x)// onda triangular, simetria par
begin
if -3<= x and x < -2 then
-x-2
else
if -2 <= x and x < -1 then
```

```

x + 2
else
if -1 <= x and x < 0 then
-x
else
if 0 <= x and x < 1 then
x
else
if 1 <= x and x < 2 then
2 - x
else
if 1 <= x and x < 3 then
x-2
end_if
end_if
end_if
end_if
end_if
end_if
end_proc:

```

```

y:=x:
F1:=plot::Function2d(F,Color=RGB::Red,x=-3..3):
F2:=plot::Function2d(y(x),Color=RGB::Blue,x=0..1):
plot(F1,F2)

```

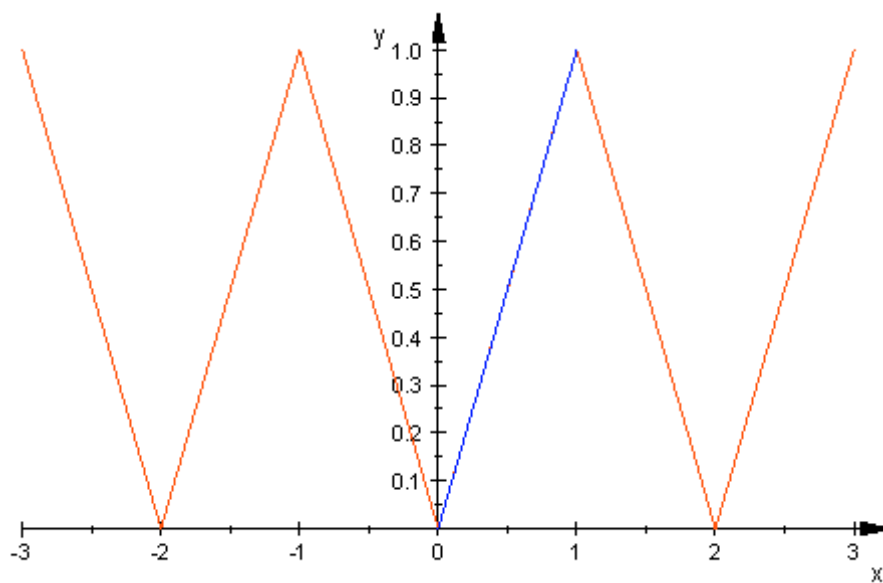


Fig.:7.3\_3

Se  $f$  é uma função **par**, temos uma série em co-senos, pois a série de Fourier de qualquer função par é formada, apenas, pelas funções trigonométricas pares  $\cos(n\pi x/L)$  e pelo termo constante (veja p.ex. Boyes-DiPrima, p. 306 ff). Temos, entyó,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (7)$$

com os coeficientes

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (8)$$

No caso de uma função **ímpar** temos somente termos em senos -e falta o termo constante. Os coeficientes chamam-se  $b_n$ .

(Algumas funções são pares outras ímpares, mas a maioria é nem par nem ímpar, p. ex.,  $e^x$ . Mas toda função pode ser escrita como soma de uma função par e uma função ímpar:  $e^x = 1/2 (e^x + e^{-x}) + 1/2 (e^x - e^{-x}) = \cosh x + \sinh x$ .  $\cosh =$  par,  $\sinh =$  ímpar.)

A série (7) representa a função dada no intervalo  $[0,L]$ , fora desse intervalo, a série (7) representará, caso seja convergente, a *extensão par 2L-periódica* de  $f(x)$ . Costuma-se chamar a série (7) de série em senos *de meio intervalo*.

A seguinte figura 7.3\_4 mostra a função  $f(x) = x$  no intervalo  $[0,1]$  e sua *extensão ímpar 2L-periódica* sobre todo o eixo-x. O gráfico representa uma onda de dente de serra. A série de Fourier correspondente é uma série em senos:

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (9)$$

- `reset()://dente de serra`

`L:=1:`

`A:=2*L/PI:`

`u:=x->A*sum((-1)^(n+1)*sin(n*PI*x/L)/n, n=1..20):`

`U:=plot::Function2d(u(x), x=-3..3, Color=RGB::Blue):`

`plot(U)`

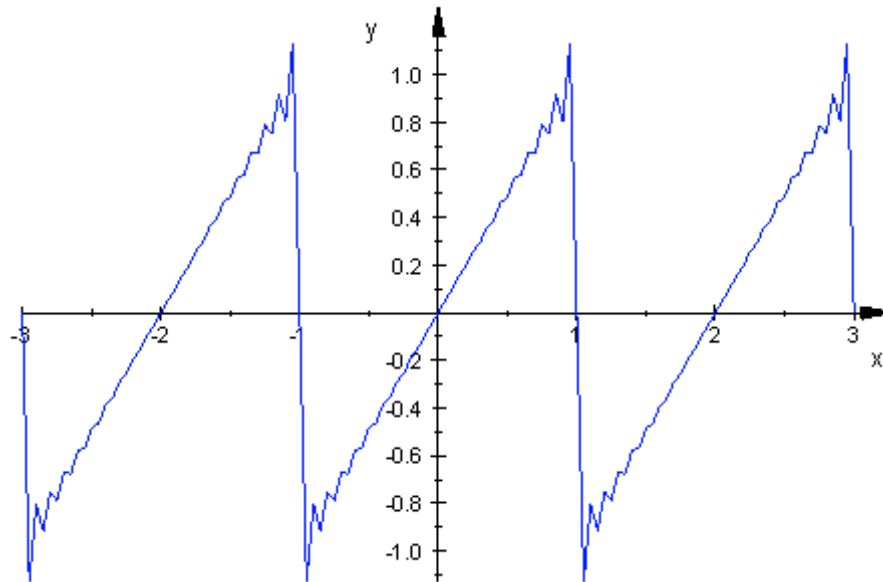


Fig.: 7.3\_4

### Exemplo 1

Consideremos, outra vez, o caso da corda, esticada no centro, do parágrafo 7.2.2.

Seja a função  $f(x)$  dada por  $2xd/L$  em  $0 < x < L/2$  e por  $-2xd/L + 2d$  em  $L/2 < x < L$ .

Usamos os valores numéricos  $L = 2$  e  $d = 0.1$ .

A figura 7.3\_5 mostra a função  $f$  juntamente com sua *extensão ímpar*  $2L$ -periódica sobre todo o eixo- $x$ .

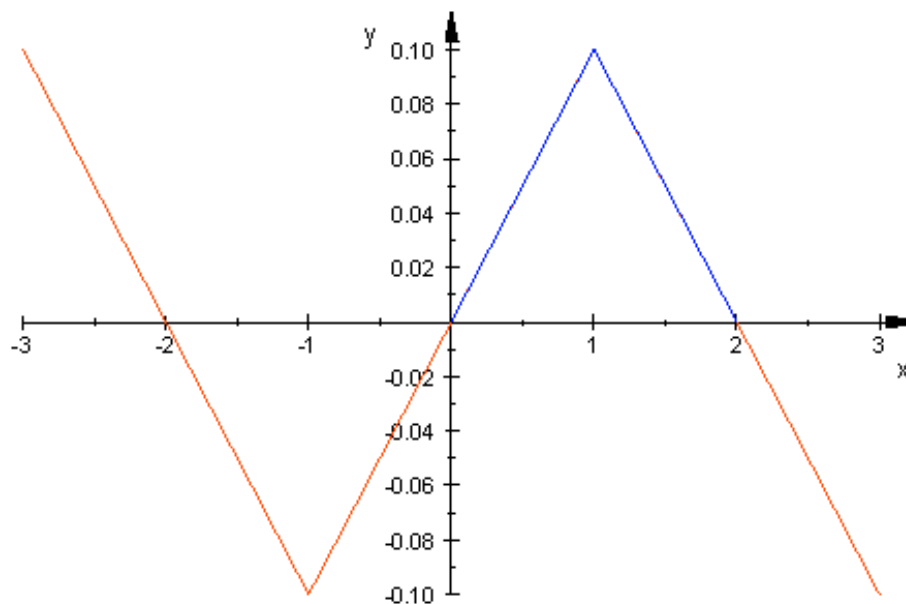


Fig.: 7.3\_5

Já que elegíamos uma extensão ímpar, a série a usar será em senos com coeficientes  $b_n$ . (Com uma *extensão par*  $2L$ -periódica deveríamos usar a série em co-senos.)

$$b_n = 2/L \int_{0,L} f(x) \text{sen}(n\pi x/L) dx$$

$$= 2/L \{ 2d/L \int_{0,L/2} x \text{sen}(n\pi x/L) dx + 2d/L \int_{L/2,L} (L-x) \text{sen}(n\pi x/L) dx \} \quad (10)$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_{0,L/2} x \text{sen}(n\pi x/L) dx = -Lx/n\pi \cos(n\pi x/L) \Big|_{0,L/2} + L/n\pi \int_{0,L/2} \cos(n\pi x/L) dx$$

$$= -L^2/2n\pi \cos(n\pi/2) + L^2/n^2\pi^2 \text{sen}(n\pi/2) \quad (11)$$

Em forma semelhante, obtemos

$$\int_{L/2, L} (L-x) \sin(n\pi x/L) dx = L^2/2n\pi \cos(n\pi/2) + L^2/n^2\pi^2 \sin(n\pi/2) \quad (12)$$

Substituindo Eqs. (11) e (12) na Eq. (10), obtemos

$$b_n = \frac{8d}{n^2\pi^2} \sin(n\pi/2) \quad (13)$$

A série de Fourier será

$$f(x) = 8d/\pi^2 [ \sin(\pi x/L) - 1/9 \sin(3\pi x/L) + 1/25 \sin(5\pi x/L) - \dots ] \quad (14)$$

É isso o mesmo resultado que vimos em 7.2.2, Eq. (38) para  $t = 0$ .

```
A:=2*b*L^2/(x0(L-x0)*PI^2)::série (20) com x0 = L/2
u:=x->A*sum(n^-2*sin(n*PI*x0/L)*sin(n*PI*x/L), n=1..20):
U:=plot::Function2d(u(x), x=-3..3, Color=RGB::Blue):
plot(U)
```

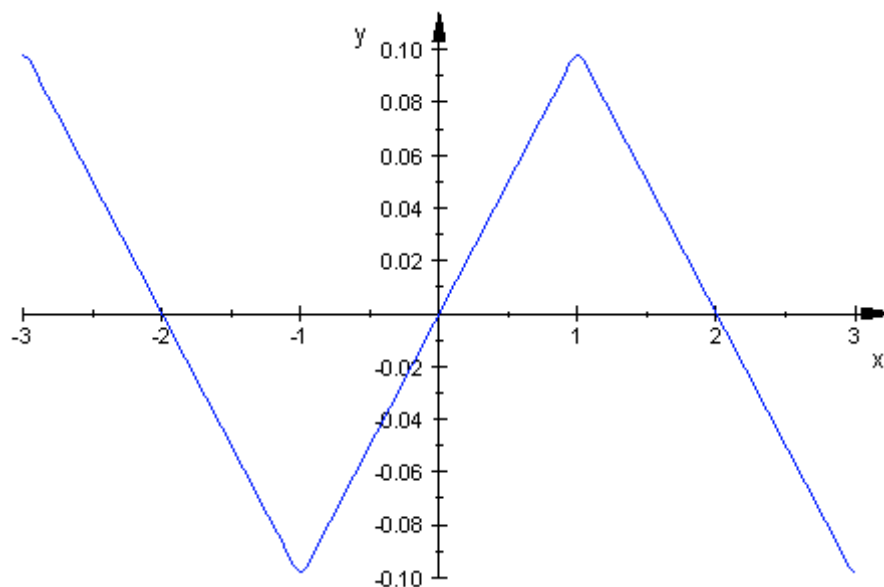


Fig.: 7.3\_6

A Eq.(20) na seção 7.1.4 coincide, para  $t = 0$ , também com o nosso resultado (14). A figura 7.3-6 toma em conta 20 termos da série (20).

Em princípio, deveríamos obter o mesmo resultado, usando uma extensão par. Isso é certo, e a extensão par converge mais rapidamente para a função dada no intervalo  $[0,L]$  do que a série em senos.

Em geral, a forma da expansão usada será determinada pelo propósito para o qual é necessária.

Em muitos casos, por exemplo na mecânica quântica, precisamos da **forma complexa** da série de Fourier.

Pode-se obter essa forma, substituindo as seguintes fórmulas para senos e cossenos em termos de expoentes imaginários

$$\sin nx = (e^{inx} - e^{-inx})/2i \quad (15)$$

$$\cos nx = (e^{inx} + e^{-inx})/2 \quad (16)$$

numa série de Fourier, por exemplo na série

$$f(x) = 1/2 + 2/\pi (\sin x/1 + \sin 3x / 3 + \sin 5x /5 + \dots), \quad (17)$$

para obter uma série com termos em  $e^{inx}$  e  $e^{-inx}$ :

$$f(x) = 1/2 + 1/i\pi (e^{ix}/1 + e^{3ix}/3 + e^{5ix}/5 + \dots) + 1/i\pi (-e^{-ix}/1 - e^{-3ix}/3 - e^{-5ix}/5 - \dots) \quad (18)$$

Isso é a forma complexa buscada.

Pode-se mostrar que com uma formula só se pode calcular os coeficientes da série de Fourier em forma complexa. Esta fórmula reza

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (19)$$

### Exemplo 2

Encontre a série de Fourier complexa para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (20)$$

**Solução**

$$c_n = 1/2\pi \int_{-\pi,0} e^{-in\pi} \cdot 0 \cdot dx + 1/2\pi \int_{0,\pi} e^{inx} \cdot 1 \cdot dx$$

$$= 1/2\pi [e^{inx}/in]_0^\pi = (-2\pi in)^{-1} (e^{in\pi} - 1) = 1/in\pi, \text{ n vmpar}$$

$$= 0 \quad \text{para n par} \neq 0$$

$$c_0 = 1/2\pi \int_{0,\pi} dx = 1/2$$

A série buscada será

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (21)$$

Substituindo os coeficientes dá

$$f(x) = 1/2 + 1/i\pi (e^{ix}/1 + e^{3ix}/3 + e^{5ix}/5 + \dots) + 1/i\pi (-e^{-ix}/1 - e^{-3ix}/3 - e^{-5ix}/5 - \dots)$$

ou seja, outra vez a série (18).

Por meio das fórmulas (15) e (16) podemos obter a forma (17) da série de Fourier.

As três funções  $\sin nx$ ,  $\cos nx$  e  $e^{inx}$  têm o período  $2\pi$ .

No caso do intervalo  $[0,L]$  temos para  $c_n$  a forma

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx \quad (22)$$

Em vez de (21) temos agora

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi x}{L}} \quad (23)$$