

## 7.2 Ondas

### 7.2.1 Nova dedução da equação de Onda a partir das propriedades do meio

Nesta seção continuaremos o estudo das ondas. Na seção anterior mencionamos que a equação de onda pode ser obtido baseando-se nas propriedades do meio no qual a onda é gerada e propagada. O meio considerado era uma corda.

Primeiro deduziremos, outra vez, a equação (4) do parágrafo 7.1.3 da seção anterior:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1)$$

Logo vamos ocupar-nos com a solução *analítica* desta equação diferencial parcial. (A fórmula de d'Alembert, Eq. (15) na seção anterior, era a solução geral *formal*.)

A Fig. 7.2\_1 mostra um elemento  $dl$  da corda

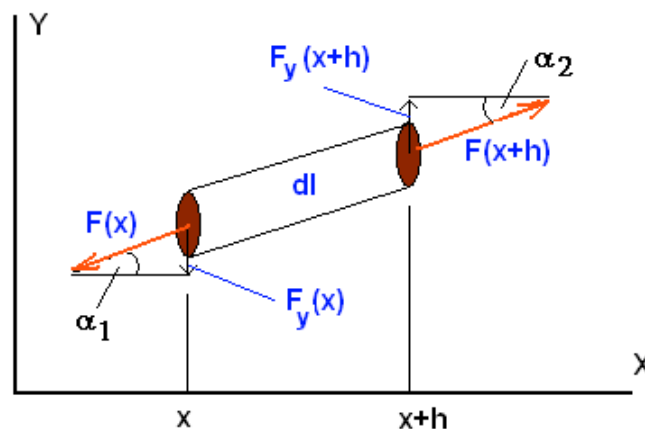


Fig. 7.2-1

A figura 7.2-1 mostra um elemento de volume da corda em um instante genérico da oscilação. Como o deslocamento na direção-y é extremamente pequeno em comparação com o comprimento L da corda, a alteração do comprimento da corda não vai ter influência sobre a tensão  $\sigma = F/A$ . A é a área de seção reta da corda. Por isso, as forças que atuam nos contornos do elemento com comprimento dl são praticamente iguais. Ou seja,  $F(x) = F(x + h)$ . A massa do elemento é  $dm = \rho A dl \approx \rho Ah$ . Além disso, supomos que dm é tão pequena que não precisamos tomar conta da força de gravidade. A força de restituição é  $F_r = F_y(x+h) - F_y(x) = F \sin \alpha_2 - F \sin \alpha_1$ .

Já que os deslocamentos são tão insignificantes, podemos escrever

$$\sin \alpha_1 = \text{tg } \alpha_1 \quad \text{e} \quad \sin \alpha_2 = \text{tg } \alpha_2$$

Sendo  $\text{tg } \alpha_2 = \partial y(x + h)/\partial x$  e  $\text{tg } \alpha_1 = \partial y(x)/\partial x$ , obtemos

$$F_r = \frac{\frac{\partial y(x+h)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x}}{h} \frac{F}{\rho A} dm \quad (3)$$

Quando o intervalo h se torna muito pequeno, a primeira fração que aparece no lado direito da Eq. (3) transforma-se na segunda derivada (em linguagem matemática, isso equivale a calcular o valor limite da fração para o denominador h tendendo a zero). Escreve-se

$$F_r = \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} \sigma \frac{dm}{\rho}$$

Segundo a segunda lei de Newton, isso equivale a

$$dm \frac{\partial^2 y(x)}{\partial t^2}$$

A equação de movimento do elemento da corda reza, então,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \text{com } c^2 = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{F}{A\rho} \quad (4)$$

Esta é a forma geral da equação de onda das ondas progressivas sobre o eixo x. (Note-se que usamos, por simplicidade, a letra y em lugar da letra grega  $\eta$ .) c é a velocidade da onda e a função de onda y depende de x e de t.

A Eq. (4) tem formas análogas em duas ou três dimensões. No caso das três dimensões, é comum usar a letra  $\Psi$  em lugar da letra  $y$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} := \nabla^2 \Psi := \Delta \Psi \quad (5)$$

O operador

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6)$$

é denominado o "Laplaciano" e permite uma escritura concisa das equações de onda.

## 7.2.2 Solução com séries de Fourier (II)

A equação (4) é uma equação diferencial parcial. Não há técnica *geral* para resolver as equações diferenciais parciais, mas elas são resolvidas convenientemente, em muitos casos, pelo método denominado de *separação de variáveis*. Isso quer dizer que se procura soluções na forma de um produto, onde cada fator depende de uma variável só. Colocamos, então,

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad (7)$$

Usando esta separação de variáveis, obtemos duas equações diferenciais ordinárias. Inserindo este produto na Eq. (4) obtemos

$$X''(x)/X(x) = c^{-2} T''(t)/T(t) \quad (8)$$

Queremos que esta equação seja válida para todos os  $x$  do intervalo  $[0,L]$  e para todos os tempos  $t \geq 0$ . Mas, sendo que as variáveis  $x$  e  $t$  são independentes, os dois lados da equação (8) devem ser, separadamente, iguais a uma constante. (Isso pode ser demonstrado formalmente.)

Obtemos, assim, as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (9)$$

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad (10)$$

A constante de separação foi escrita na forma  $-\lambda$ , porque isto será conveniente em seguida. (Neste estágio,  $\lambda$  é completamente arbitrário e não é comprimento de onda.)

Todas as soluções da Eq. (9) devem satisfazer as seguintes condições de fronteira (ou contorno)

$$y(0,t) = X(0) T(t) = 0 \quad (11)$$

$$y(L,t) = X(L) T(t) = 0 \quad (12)$$

Como não estamos interessados em soluções que são identicamente zero, pedimos que  $T(t) \neq 0$ . Isso significa para a função  $X(x)$  a condição

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (13)$$

Neste estágio, temos especificados todos os pré-requisitos de um problema de contorno de Sturm-Liouville, a saber:

uma equação diferencial linear de segunda ordem,  
um intervalo e  
dois condições de contorno.

Aqui estão os pré-requisitos outra vez unidos:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (14)$$

$$0 \leq x \leq L \quad (15)$$

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (16)$$

Veremos que este problema, equações (14), (15), (16), não tem soluções para qualquer valor de  $\lambda$ . Somente para certos valores de  $\lambda$  -os *autovalores* do problema, veja 4.4.1 e 6.5.4- existem funções  $X$  que satisfazem as equações (14)-(16). Estas funções são as *autofunções* do problema de contorno de Sturm-Liouville.

Por o momento deixamos a equação temporal (10) ao lado e vamos concentrar-nos só nas equações espaciais (14)-(16).

Primeiramente analisemos as soluções para  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$  e  $\lambda > 0$ .

$\lambda = 0$

A solução da Eq. (14) é simplesmente  $X(x) = ax + b$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias. Devido à Eq. (16) vale  $X(0) = a \cdot 0 + b = 0$ , ou seja,  $b = 0$ . Também vale  $X(L) = aL + b = aL = 0$ . Já que  $L \neq 0$ , temos também  $a = 0$ .

Então,  $X$  é identicamente, isto é para todos os  $x$ , zero. Mas, não estamos interessados neste resultado.

$$\lambda < 0$$

Neste caso temos como solução geral da equação espacial (14) a expressão

$$X(x) = ae^{x\sqrt{-\lambda}} + be^{-x\sqrt{-\lambda}} \quad (17)$$

Com a imposição das condições de fronteira (16) obteremos

$$(e^{-L\sqrt{-\lambda}} - e^{L\sqrt{-\lambda}})b = 0.$$

Já que a parêntese é diferente de zero,  $b$  deve ser zero.

Com isto temos outra solução indesejável do problema de St.L., pois a também é zero.

Nossa esperança é que  $\lambda > 0$  nos vai proporcionar soluções aceitáveis.

$$\lambda > 0$$

Neste caso temos como solução geral

$$X(x) = a \cos x\sqrt{\lambda} + b \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda} \quad (18)$$

As condições de contorno (16) são agora

$$X(0) = a \cos 0 + b \operatorname{sen} 0 = a = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = b \operatorname{sen} L\sqrt{\lambda} = 0$$

Mas,  $b$  não pode ser zero, pois isso nos levaria outra vez a  $X(x) = 0$ . Resta nos buscar todos os valores de  $\lambda$  para os quais  $\operatorname{sen} L\sqrt{\lambda} = 0$ . Vemos que isso é o caso para

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Estes valores de  $\lambda := \lambda_n$  que conduzem a soluções não triviais do problema de St.L. são os autovalores do problema:

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

As autofunções são

$$X_n(x) = b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (21)$$

As autofunções contêm um fator indeterminado  $b_n$ . Por meio da relação trigonométrica

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = \frac{1}{2} \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} - \frac{1}{2} \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} \quad (22)$$

podemos comprovar que

$$\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx = 0 ; n \neq m \quad (23)$$

A propriedade expressa por esta equação chama-se a propriedade de *ortogonalidade* das autofunções.

Para  $n = m$  podemos demonstrar que a integral,

$$\int_0^L b_n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx \quad (24)$$

é igual a  $b_n^2 L/2$ . Utilizando a relação trigonométrica

$$1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} \quad (25)$$

obtemos

$$\frac{b_n^2}{2} \int_0^L dx - \frac{b_n^2}{2} \int_0^L \cos \frac{2n\pi x}{L} dx = \frac{b_n^2}{2} L \quad (26)$$

O fator  $b_n$  está ainda arbitrário. Vamos atribuir-lhe o valor  $b_n^2 = 2/L$ , pois isso faz com que a integral (24) se torna igual a 1. Isso faz  $b_n = (2/L)^{1/2}$ , mas na teoria das séries de Fourier, utiliza-se normalmente  $b_n = 2/L$ . A raiz muitas vezes indica que existe normalização.

Esta determinação do fator  $b_n$  chama-se de *normalização* das autofunções. O conjunto das autofunções com as propriedades (23) e (27):

$$\int_0^L X_n^2(x) dx = 1 \quad (27)$$

forma um sistema normalizado a 1. (As autofunções formam um Conjunto Completo, isto é, podemos expandir qualquer função em termos das autofunções.)

Lembremo-nos que a constante de separação foi escrita na forma  $-\lambda$ . Já que  $-\lambda$  deve ser negativo, costuma-se escrever  $-\lambda = -k^2$  e chamam-se também os números reais

$$k_n = n\pi/L \quad (28)$$

autovalores. Veja Eq. (20)

Voltemos agora à função temporal (10)

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad (10)$$

com as condições (1) e (12).

A solução geral da Eq. (10) é  $T(t) = c \cos kct + d \sin kct$ , ou, usando (28),

$$T_n(t) = c_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + d_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \quad (29)$$

As funções  $y(x,0)$  e  $\partial y(x,0)/\partial t$  são as condições iniciais do problema e devem ser fornecidas junto com o problema em estudo. Elas vão servir-nos a determinar as constantes  $c_n$  e  $d_n$ . Na seção anterior utilizamos  $f(x) := y(x,0)$  e  $g(x) := \partial y(x,0)/\partial t$ .

Obtivemos, então, a seguinte solução particular do problema da corda vibrante:

$$y_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \left( c_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + d_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \quad (30)$$

As funções  $y_n(x,t)$  chamam-se de *modos normais* (ou naturais) e a solução geral é obtida como combinação linear de tais modos normais:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) \quad (31)$$

Falta agora a determinação das constantes  $c_n$  e  $d_n$ , os coeficientes de Fourier. (A Eq. (31) representa um movimento perpétuo, o que é a consequência de não haver incluído os efeitos da dissipação de energia. Ela será, então, somente uma aproximação para a descrição do movimento de uma corda real.)

As duas condições iniciais proporcionam

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (32)$$

e

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial y_n(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n\pi c}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (33)$$

Multiplicando a Eq. (32) por  $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$  e integrando termo a termo de 0 até L, vemos que  $c_n$  será dado por

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L y(x, 0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (34)$$

Na teoria das séries de Fourier usa-se, normalmente, o fator  $2/L$ . Da mesma maneira obtemos

$$d_n = \frac{L}{n\pi c} \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (35)$$

As séries (32) e (33) são as séries de Fourier para as funções  $f(x) := y(x, 0)$ , ou seja, o deslocamento inicial da corda, e  $g(x) := \partial y(x, 0)/\partial t$ , a velocidade inicial. Fourier foi o primeiro a demonstrar que os coeficientes  $c_n$  e  $d_n$  podem ser calculados explicitamente. Mais adiante vamos falar um pouco sobre os trabalhos de Fourier.



### Exemplo:

Consideremos uma corda esticada no centro, ou seja, em  $x_0 = L/2$ , por  $y(x_0, 0) = d$ . Já que a velocidade inicial é zero para todos os pontos  $x$ , temos  $d_n = 0$ .

A função  $f(x) = y(x, 0)$  vem dada por

$$y(x, 0) = \begin{cases} 2xd/L; & 0 < x < L/2 \\ -2xd/L + 2d; & L/2 < x < L \end{cases} \quad (36)$$

Para  $c_n$  obtemos

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2d}{L} \left[ \int_0^{L/2} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{L/2}^L (L-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{d\sqrt{2L}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \end{aligned} \quad (37)$$

Vemos que todos os modos desaparecem para os quais  $\operatorname{sen}(n\pi/2) = 0$ . São estes os modos naturais com  $n = 2, 4, 6, \dots$

O modo correspondente a  $n = 1$  é denominado *modo fundamental*, e os modos correspondentes a  $n = 2, 3, 4, \dots$  são denominados *harmônicos*.

A denominação *harmônico* tem origem na música.

A forma  $y(x, t)$  da corda podemos aproximar pelos 5 primeiros harmônicos, dos quais somente restam os três com  $n = 1, 3, 5$

$$y(x, t) = \frac{8d}{\pi^2} \left[ \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi ct}{L} - \frac{1}{9} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{3\pi ct}{L} + \frac{1}{25} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L} \cos \frac{5\pi ct}{L} \right] \quad (38)$$

As amplitudes relativas são 1, 1/9, 1/25, .... Já que a intensidade dos sons irradiados é proporcional ao quadrado da amplitude, a intensidade da primeira harmônica é 81 vezes maior do que a da terceira e 625 vezes maior que a da quinta etc.

Para um valor fixo de  $n$ , a expressão  $\sin(n\pi x/L)\cos(n\pi ct/L)$  da Eq. (30) (o fator  $d_n$  é zero devido a  $T'(0) = 0$ ) é periódica no tempo com período  $T_n = 2L/nc$ ; ela representa, portanto, um movimento vibratório da corda com esse período, ou com frequência  $f_n = nc/2L$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

O fator  $\sin(n\pi x/L)$  representa o deslocamento da corda para a frequência dada. As primeiras seis formas de deslocamento, os *modos normais* (que no caso de uma corda vibrante, presa nos extremos, sempre tem a forma de uma sinusóide), vemos na seguinte figura 7.2-2:

- `reset() //modos normais de vibração de uma corda`  
`L:=1:`  
`valores_n:= [1,2,3,4,5,6]:`  
`u:= (x,t) -> sin(n*PI*x/L):`  
`curvas:= plot::Scene2d(plot::Function2d(subs(u(x,n),`  
`n=valores_n[i]), Color=RGB::Green, x=0..L) $i=1..6:`  
`plot(curvas)`

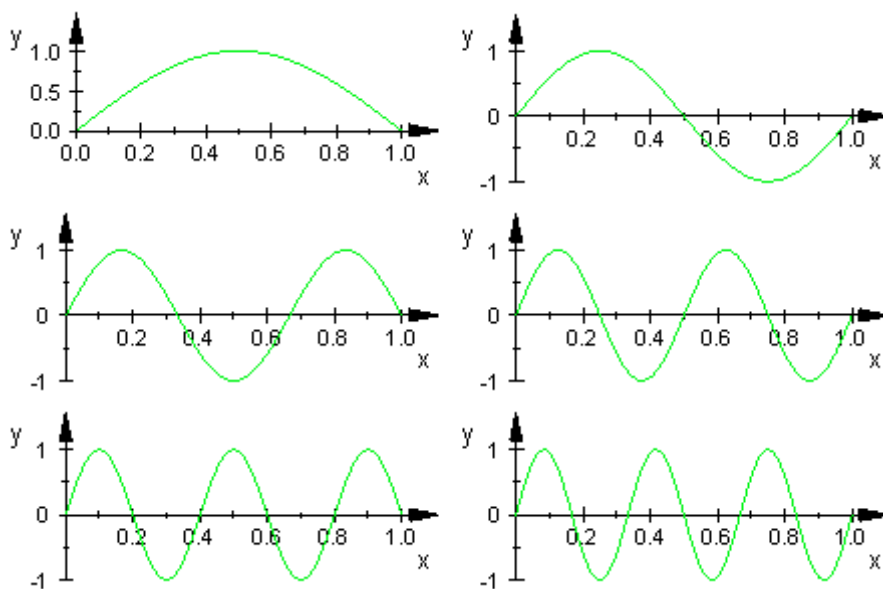


Fig.:7.2-2

O período espacial do  $n$ -ésimo modo normal é  $2L/n$  e é chamado o comprimento de onda do modo de frequência  $f_n = nc/2L$ . (Não usamos aqui  $\lambda_n$  para denominar o comprimento de onda, já que isso foi usado na Eq. (20) como variável de separação.)

O primeiro modo normal, o *modo fundamental*, tem comprimento de onda =  $2L$  e frequência =  $\pi c/L$ . O segundo modo, o *primeiro harmônico*, tem comprimento de onda =  $L$  e frequência =  $c/L$ , e assim por diante.

O modo de ordem  $n$  contém  $n$  semicomprimentos de onda.

Para terminar este parágrafo, vamos escrever a Eq. (30) numa forma que nos ajudará a compreender ainda melhor estas *ondas estacionárias* da figura 7.2-2.

Para este fim, escreveremos a expressão na parêntese da Eq. (30) como

$$\alpha_n \cos(\omega_n t + \delta_n), \quad (39)$$

onde  $\omega_n = n\pi c/L$ ;  $\alpha_n^2 = c_n^2 + d_n^2$ ;  $\delta_n = -\arctg(d_n/c_n)$ .

Resulta assim

$$y_n(x,t) = A_n(x) \cos(\omega_n t + \delta_n), \quad (40)$$

$$A_n(x) = (2/L)^{1/2} \alpha_n \text{sen}(n\pi x/L) \quad (41)$$

Para um valor fixo de  $x$ , a Eq. (40) significa uma oscilação harmônica com a frequência angular  $\omega_n$  e a amplitude  $A_n(x)$ . Devido ao fator  $\text{sen}(n\pi x/L)$ , há pontos na corda que sempre permanecem em repouso. São esses os nós do movimento. Eles ocorrem sempre que  $\text{sen}(n\pi x/L)$  é zero, ou seja para  $x = mL/n$  com  $m = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ . Já que não há propagação, diz-se que na corda existe uma *onda estacionária* com o deslocamento mudando apenas de amplitude. O modo de ordem  $n$  tem  $(n-1)$  nós além dos extremos fixos.

Uma amplitude máxima (ventre) ocorre sempre que  $\text{sen}(n\pi x/L) = \pm 1$ . Os ventres ficam nos pontos com  $x = (2m+1)L/(2n)$ ;  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ . P. ex. no modo  $n = 3$  temos para  $m$  os valores  $0, 1, 2$ . Isso dá  $x = L/6, L/2, 5L/6$ . Há  $n$  ventres no modo  $n$ .

Uma fotografia instantânea no instante  $t_0$  é descrita pela equação

$$y(x,t_0) = B(t_0) \text{sen}(n\pi x/L), \text{ onde } B(t) = (2/L)^{1/2} \alpha_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (42)$$

Se  $t_0$  é um instante com  $\cos(\omega_n t_0 + \delta_n) = \pm 1$ , temos um ventre da oscilação. Todos os pontos da corda têm deslocamento zero para  $\cos(\omega_n t_0 + \delta_n) = 0$ .

As frequências  $f_n = \omega_n/2\pi = nc/2L$  chamam-se frequências normais (ou frequências naturais). Estas frequências são múltiplos inteiros da frequência mais baixa:  $f_n = nf_1$ .

A expressão

$$f_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{A\rho}} \quad (43)$$

foi descoberta experimentalmente em 1636 por Mersenne e ela contém as três leis das cordas vibrantes com respeito à frequência fundamental  $f_1$ :

1.  $f_1$  é inversamente proporcional ao comprimento da corda.
2.  $f_1$  é proporcional à raiz quadrada da tensão.
3.  $f_1$  é inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade do material da corda.

Num piano, a frequência fundamental  $f_1$  é variada de corda em corda variando  $L$ ,  $\rho$  e a tensão  $\sigma = F/A$ . Um afinador de piano somente vai variar, normalmente, a tensão na corda.

Uma maneira de produzir o modo fundamental seria deslocar a corda apropriadamente desde a posição do equilíbrio. Mas, isso não é o que acontece quando um pianista toca uma nota batendo o teclado.

A corda é posta em movimento por a ação de um pequeno martelo de feltro com o resultado de que devem ser usados mais termos da série (31).

Vamos mencionar, para terminar a discussão da corda vibrante, o seguinte assunto.

A fórmula de d'Alembert, Eq. (15) da seção anterior (7.1.3), foi declarado como solução geral da equação de onda unidimensional.

Agora, se a Eq. (15) é verdadeiramente a solução geral, então deve ser possível, reescrever a Eq. (30) como superposição de duas ondas que se movem com velocidades idênticas em sentidos opostos -uma movendo-se à direita, outra à esquerda-, como diz também a fórmula (8) da seção 7.1.3.

Isso é realmente possível, pois pode-se transformar a Eq. (31) para obter a aparência da fórmula de d'Alembert (e que mostra, ao mesmo tempo, que uma onda estacionária é a superposição de ondas progressivas). Uma demonstração detalhada pode-se encontrar em H.F. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*, p. 191 ff, ou no texto de Boyce-DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, p. 323.

