

7.1 Ondas

7.1.1 Cadeia linear de osciladores acoplados

Consideremos uma cadeia linear de contas acopladas uma com a outra por molas minúsculas (imaginárias) e idênticas.

Podemos considerar tal corrente como modelo de um arame com distribuição contínua de massa. A seguinte figura 7.1-1 mostra as abreviações que vamos utilizar no texto.

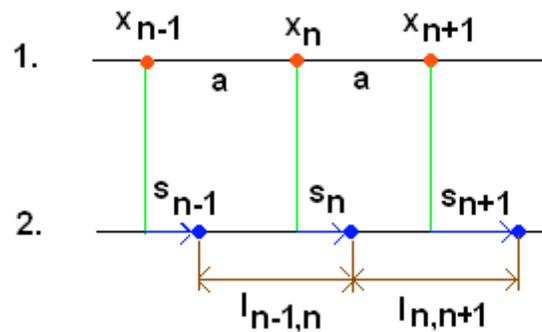


Fig.: 7.1-1

A parte 1. mostra as posições de equilíbrio, a parte 2. mostra as posições no instante t .

A posição da n -ésima conta está dada por $x_n = na$, $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, a sua posição no instante t é $r_n(t) = x_n + s_n(t) = na + s_n(t)$.

A distância entre a conta- m e a conta- n vem dada por

$$l_{m,n} = l_{m,m+1} + l_{m+1,m+2} + \dots + l_{n-2,n-1} + l_{n-1,n} \quad (1)$$

A força F_n que atua sobre a n -ésima partícula depende de suas distâncias das demais contas. Já que todas as contas - e molas- são idênticas entre eles, F_n tem para todas a mesma forma.

A equação de movimento da n-ésima partícula reza

$$m r_n'' = m s_n'' = F_n = F(\dots; l_{n-2,n}; l_{n-1,n}; l_{n,n+1}; \dots) \quad (2)$$

Da figura podemos ler as seguintes equações entre distâncias e deslocamentos s_n :

(3)

$$\begin{aligned} & \dots \quad \dots \quad \dots \\ l_{n-2,n} &= 2a + s_n - s_{n-2} \\ l_{n-1,n} &= a + s_n - s_{n-1} \\ l_{n,n+1} &= a + s_{n+1} - s_n \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

A função força é zero, se cada $l_{n,n+1} = a$, pois a mede a posição do equilíbrio entre duas partículas. Além disso, vamos considerar somente deslocamentos pequenos, para poder aproximar a função força pelos dois primeiros termos da série de Taylor (veja o próximo parágrafo). Para uma variável só, escrevemos então

$$F_n = F(\dots; l_{n-1,n}; \dots) = F(a) + (l_{n-1,n} - a) \frac{\partial F}{\partial l_{n-1,n}} = (s_n - s_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial l_{n-1,n}} \quad l_{n-1,n}=a \quad (4)$$

Para simplificar a notação, designaremos a derivada parcial por κ_1 . A derivada com respeito a $l_{n,n+1}$ seria κ_1 , aquela com respeito a $l_{n,n+2} = 2a + s_{n+2} - s_n$ será κ_2 , etc.

A série de Taylor nas variáveis $l_{n-2,n}; l_{n-1,n}; l_{n,n+1}$ tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_n &= F(\dots; 2a + s_n - s_{n-2}; a + s_n - s_{n-1}; a + s_{n+1} - s_n; \dots) \\ &= \dots; +\kappa_2(a + s_n - s_{n-2}) + \kappa_1(s_n - s_{n-1}) + \kappa_1(s_{n+1} - s_n) + \kappa_2(a + s_{n+2} - s_n) + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Partículas $n-1$ e $n+1$ são idênticas, e as forças sobre a n-ésima partícula -devido à presença delas- têm o mesmo módulo, mas de sinal oposto.

Por isso podemos escrever $\kappa_{-1} = -\kappa_1$; $\kappa_{-2} = -\kappa_2$ etc. A força sobre a n-ésima partícula é, então,

$$F_n = \kappa_1(s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) + \kappa_2(s_{n-2} - 2s_n + s_{n+2}) + \dots \quad (5)$$

A equação de movimento da n-ésima partícula é

$$m s_n'' = \kappa_1(s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) + \kappa_2(s_{n-2} - 2s_n + s_{n+2}) + \dots \quad (6)$$

Vemos claramente que o movimento da n-ésima partícula depende dos movimentos dos demais partículas. As equações para $n = \dots; -1, 0, 1, 2, \dots$ são acopladas e não podem ser resolvidas separadamente.

Para poder seguir adiante, temos que fazer mais simplificações. Poderíamos tomar em conta que a influência de partículas afastadas é menor do que a das partículas na vizinhança. As forças dos vizinhos próximos são determinadas por κ_1 e podemos supor que as derivadas κ_n , com $n > 1$, podem ser desprezadas (κ_n determina as forças entre partículas que se encontram numa distância de $n \cdot a$).

Aplicando essa suposição, faz com que as equações (6) ficam sem acoplamento e observamos que

$$m s_n'' = \kappa (s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) \quad (7)$$

descrevem movimentos harmônicos simples das partículas ao redor de suas posições de equilíbrio (escrevemos agora κ em vez de κ_1). Veja 3.6.3, 4.7.4, 5.3.3, 6.2

Poderíamos, então, buscar soluções da forma

$$s_n(t) = A e^{i\omega t} \quad (8)$$

Mas esta suposição só é admissível se todas as partículas oscilam com amplitudes e fases iguais, respectivamente. Além disso, podemos constatar que Eq. (8) não é compatível com as equações (7) de movimento.

Pois o lado esquerdo de (7) daria $-A\omega^2 e^{i\omega t}$, enquanto o lado direito se tornaria zero. Mas, se supomos que os movimentos de duas partículas adjacentes estão defasados, ou seja, se temos

$$s_{n+1}(t) = s_n(t) e^{-ika} \quad (9)$$

com $s_0(t) = A e^{i(\omega t - nka)}$, o que equivale a

$$s_n(t) = A e^{i(\omega t - nka)}, \quad (10)$$

então satisfazemos as equações de movimento. Pois, se substituimos (10) na Eq. (7), veremos que ambos os lados da Eq. (7) serão iguais, se

$$m\omega^2 = \kappa(2 - e^{ika} - e^{-ika}) = 2\kappa(1 - \cos ka). \quad (11)$$

Isso quer dizer que Eq. (10) é uma solução, se

$$\omega = 2(\kappa/m)^{1/2} \text{sen}(ka/2) \quad (12)$$

Uma solução *real* da Eq. (7) reza $s_n(t) = A \cos(\omega t - kna)$, ou seja

$$s_n(t) = A \cos(\omega t - kx_n) \quad (13)$$

Esta equação descreve a propagação de uma perturbação como uma *onda* ao longo da cadeia linear.

A distância mais curta entre osciladores da mesma fase é denominada *comprimento de onda* λ .

Lembrando que a função co-seno é par, obtemos, em vez da Eq. (13), também

$$s_n(t) = A \cos(kx_n - \omega t) \quad (14)$$

O argumento da função co-seno é chamado de *fase da onda*.

Para um observador que corre em sintonia com um deslocamento máximo (ou com qualquer outra fase de deslocamento) ao longo da cadeia, o argumento do co-seno será sempre constante. A velocidade do observador é, em cada instante, igual à velocidade da fase que ele fica observando. Por isso, a *velocidade da fase* vem dada por

$$c := v_f = x_n/t = \omega/k \quad (15)$$

Eq. (15) é, ao mesmo tempo, a velocidade de propagação da onda. c = celeridade. Para percorrer uma distância λ , a onda precisa o tempo $T = 1/f = 2\pi/\omega$. Temos, então, a relação

$$c = \lambda f = \lambda\omega/2\pi \quad (16)$$

o que significa que $k = 2\pi/\lambda$ (17)

T é o período da onda e a grandeza k chama-se *vetor de onda* ou *número de onda (angular)*. Não confunda isso com a constante k duma mola.

7.1.2 Série de Taylor com MuPAD

(Matemático inglês, 1685 - 1731)

Antes de prosseguir na discussão de oscilações e ondas, são oportunas algumas considerações sobre alguns importantes técnicas que MuPAD fornece para trabalhar com as séries de Taylor e de MacLaurin (Colin MacLaurin, da Escócia, 1698 - 1746).

Seja f uma função dada, o teorema de Taylor permite-nos escrevê-la na forma de uma *série de potências*

$$f(x) = f(a) + f'(a)/1! \cdot (x - a) + f''(a)/2! \cdot (x - a)^2 + \dots \quad (1)$$

Esta equação é a série de Taylor em torno de $x = a$.

MuPAD nos proporciona a forma geral da expansão de uma função f , p. ex. até a ordem 3, com a seguinte função: **series (f(x), x=a, 3)**

$$f(a) - f'(a) \cdot (a - x) + \frac{f''(a) \cdot (a - x)^2}{2} + O(-(a - x)^3)$$

Quando $a = 0$, obtemos a série de MacLaurin de f . Também a substituição $t = x - a$ reduz a série de Taylor geral à forma de uma série de Maclaurin.

Embora essa série possa não convergir, salvo para $x = a$, e mesmo que ela convirja, possa não ter $f(x)$ como soma, podemos, não obstante, escrever para cada n

$$f(x) = f(a) + f'(a)/1! \cdot (x - a) + f''(a)/2! \cdot (x - a)^2 + \dots + f^{(n)}(a)/n! \cdot (x - a)^n + R_n,$$

onde R_n é o resto. Mais adiante volveremos a falar sobre este "resto".

A função $f(x) = f(a) + f'(a)/1! \cdot (x - a) + f''(a)/2! \cdot (x - a)^2$ chama-se *polinômio* de Taylor de segundo grau da função $f(x)$ no ponto a . Fala-se também da aproximação quadrática de $f(x)$ no ponto a .

Para produzir uma série cortada podemos utilizar

- `Series::Puiseux(1/x, x = 1, 5);
expr(%)`

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + O((x-1)^5)$$

$$(x-1)^2 - x - (x-1)^3 + (x-1)^4 + 2$$

ou simplesmente

- `taylor(1/x, x=1, 5)`

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + O((x-1)^5)$$

- `expr(%)`

$$(x-1)^2 - x - (x-1)^3 + (x-1)^4 + 2$$

A função `taylor` produz uma série de Taylor truncada, incluindo um termo que indica a ordem do resto. Com a função `expr` podemos tirar este termo. Obtemos, assim, um *polinômio de Taylor* de grau n para a função f em $x = a$.

`taylor(1/x, x=1, 5)` calcula a série de potências de $1/x$ em torno do ponto $x = 1$ até o termo com x^4 . Compare também a seguinte possibilidade:

- `series(exp(x), x=1, 6)`

$$e + e \cdot (x-1) + \frac{e \cdot (x-1)^2}{2} + \frac{e \cdot (x-1)^3}{6} + \frac{e \cdot (x-1)^4}{24} + \frac{e \cdot (x-1)^5}{120} + O((x-1)^6)$$

Trata-se da série de potências de e^x em torno de $x = 1$ até a ordem $(x-1)^5$.

Outro exemplo:

Expandir $\ln(x)$ numa série de Taylor em torno de $x=1$ até a ordem $(x-1)^3$

- `l:=series(ln(x), x=1, 3)`

$$x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + O((x-1)^4)$$

Compare

- `taylor(e^x, x=0, 5)`

$$1 + x \cdot \ln(e) + \frac{x^2 \cdot \ln(e)^2}{2} + \frac{x^3 \cdot \ln(e)^3}{6} + \frac{x^4 \cdot \ln(e)^4}{24} + O(x^5)$$

- `subs(%, ln(e)=1)`

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

com

- `taylor(exp(x), x=0, 5)`

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

Para extrair o n-ésimo coeficiente de uma série s, o MuPAD oferece a função `coeff(s, n)`.

Por exemplo: `s:=series(exp(x), x=0, 5)`

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

- `coeff(s, 4)`

$$\frac{1}{24}$$

O seguinte programa nos deixa ver claramente a força dos polinômios de Taylor na aproximação de outras funções em torno dum ponto dado.

- `reset()://Polinômio de Taylor`
`PR:=Dom::Polynomial(Dom::Numerical):`
`Ord:=3:P:=1:// Polinômio de grau 3 no ponto x=0`
`f:=PR(taylor(sin(x), x=P, Ord)):`
`f1:=plot::Function2d(f, x=-4..4)//polinômio de Taylor`
`f2:=plot::Function2d(sin(x), Color=RGB::Red, x=-4..4):`

```
ponto:=plot::Point2d(P,sin(P), Color=RGB::Green,
PointSize = 3*unit::mm):
plot(f1,f2,ponto,ViewingBoxYRange=-3..2)
```

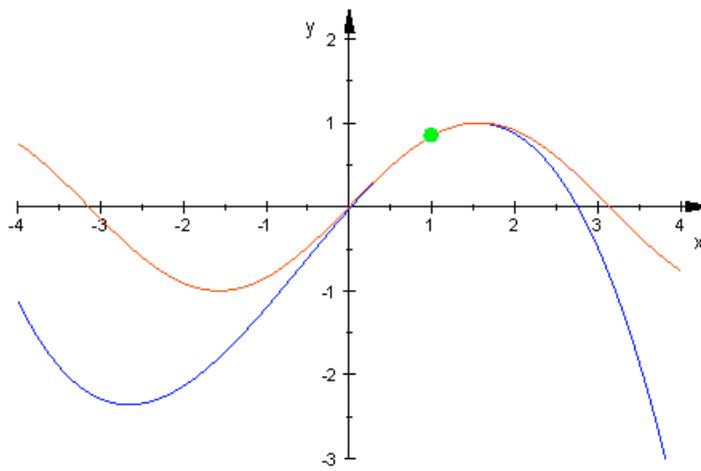


Fig.: 1

Existe uma fórmula, a *fórmula do resto*, para determinar o erro cometido no cálculo da soma de uma série de potências:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (2)$$

O valor de z , que é entre a e x , não é dado explicitamente e, por isso, não é possível calcular R_n de modo explícito. Contudo, freqüentemente, pode-se usar a Eq. (2) para obter uma *estimativa superior* para $|R_n|$.

Exemplo:

Seja $f(x) = \sin(x) \cos(x)$. Calcular, usando MuPAD, o resto do polinômio de Taylor para $n = 8$, 11 e para $x = 0$. Calcular, também, uma estimativa superior para $|R_{11}|$ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Vamos usar a fórmula do resto:

- `f:=x->sin(x)*cos(x) :`
`resto:=diff(f(x),x $ 9)// n= 8`

$$256 \cdot \cos(x)^2 - 256 \cdot \sin(x)^2$$

- `subs(resto,x=z)*x^9/9!`

$$\frac{x^9 \cdot (256 \cdot \cos(z)^2 - 256 \cdot \sin(z)^2)}{362880}$$

- `f:=x->sin(x)*cos(x) :`
`resto:=diff(f(x),x $ 12)://n = 11`
`subs(resto,x=z)*x^12/12!`

$$\frac{4 \cdot x^{12} \cdot \cos(z) \cdot \sin(z)}{467775}$$

Uma estimativa superior para $|R_{11}|$ obtemos com $|x| \leq \pi/2$ e $|\cos(z) \sin(z)| \leq 1$ para todos os valores $0 \leq z \leq x$.

Temos que substituir x por $\pi/2$ e $\cos(z) \sin(z)$ por 1:

- `f:=x->sin(x)*cos(x) :`
`resto:=diff(f(x),x $ 12) :`
`subs(resto,x=z)*x^12/12!`

$$\frac{4 \cdot x^{12} \cdot \cos(z) \cdot \sin(z)}{467775}$$

- `subs(%,x=PI/2, cos(z)=1/sin(z))`

$$\frac{\pi^{12}}{479001600}$$

- `float(%)`

$$0.001929574309$$

As séries de potências têm se mostrado muito úteis na teoria das equações diferenciais ordinárias e parciais e para as *transformações de Laplace*. Mais tarde vamos dar maiores informações no assunto.

7.1.3 Equação de onda

Neste parágrafo estudaremos o movimento ondulatório num meio contínuo, onde as forças de molas devem ser substituídas pelas tensões geradas pelo meio. (As deformações do meio geram forças de restauração ao equilíbrio.)

As posições não denominamos por x_n , antes por x . A coordenada, que descreve a onda, designamos pela letra grega ξ , quando o deslocamento é horizontal. Assim,

$$\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (1)$$

é a equação de uma *onda longitudinal* na qual as partículas (p. ex. as moléculas do ar) se deslocam na direção de propagação da onda. Ondas do som em um fluido são ondas longitudinais. (As partículas do fluido, que se propagam como onda, movem-se para a esquerda e para a direita. A velocidade de uma partícula é $\partial\xi/\partial t$. Associada a esse deslocamento longitudinal do fluido (líquidos e gases), aparece uma oscilação da pressão no fluido. Portanto, a onda (p. ex. o som) pode ser descrita tanto em termos de deslocamento do fluido como em termos da variação de pressão, assim, o som pode ser descrito como uma onda de pressão. A sua equação é

$$\Delta p = \Delta p_m \sin(\omega t - kx), \quad (2)$$

onde x é o caminho percorrido pela onda, e t o tempo decorrido. k é o número de onda, e ω a sua frequência angular. Δp_m é a pressão máxima da onda sonora.

Uma onda é uma perturbação que se propaga em um meio, e sua velocidade c (= velocidade da fase) depende do meio (p. ex. a velocidade de uma onda numa corda depende das propriedades da corda: sua tensão e sua densidade). A fórmula para c em qualquer meio é dada por

$$c = (K/\rho)^{1/2}, \quad (3)$$

onde K é o módulo de compressão (volumétrica) e ρ é a densidade do meio. Para corpos sólidos usa-se o módulo de elasticidade E em vez de K . A fórmula para uma onda numa corda esticada reza $c = (\sigma/\rho)^{1/2}$, onde $\sigma = F/A$ é a tensão na corda.

Muitas vezes escreve-se $c = (\tau/\mu)^{1/2}$, onde τ é a força da tração (em N) e μ é a *massa específica linear* m/L (em kg/m), ou seja, a massa por unidade de comprimento.

Ondas longitudinais podem ocorrer em líquidos, gases e também em sólidos. Ondas transversais (ou transversas) porém, como p. ex. a onda que se propaga em uma corda, só podem existir em sólidos. O movimento transversal requer que cada partícula arraste as partículas adjacentes às quais ela está ligada. Em um fluido, isto não é possível, já que as partículas adjacentes podem-se deslocar facilmente pelas demais. O movimento longitudinal somente requer que cada partícula "empurre" os seus vizinhos.

A *função de onda* $\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ pode-se considerar como solução de uma equação diferencial parcial. Diferenciando duas vezes a Eq. (1), obtemos

$$\begin{aligned}\partial^2 \xi / \partial t^2 &= -A\omega^2 \cos(\omega t - kx) \\ k^2 / \omega^2 \cdot \partial^2 \xi / \partial t^2 &= -Ak^2 \cos(\omega t - kx) \\ \partial^2 \xi / \partial x^2 &= -A(-k)^2 \cos(\omega t - kx)\end{aligned}$$

De estas equações obtemos a equação de onda que estamos procurando:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (4)$$

Evidentemente, pode-se obter esta equação diretamente das propriedades do meio elástico no qual a onda se propaga. Esta dedução faremos mais adiante. (Também poderíamos optar por combinar as *primeiras* derivadas da Eq. (1), mas, desta forma, obtém-se *duas* equações de onda, uma para cada direção de propagação. Eq. (4) é algo universal para ondas lineares.)

Podemos aplicar a Eq. (4) também no caso *da onda em uma corda*.

Os deslocamentos transversais da posição do equilíbrio designamos pelo símbolo η . Para descrever o comportamento de uma *corda oscilante*, precisamos, além da equação (4), de condições iniciais e de valores de contorno.

Quando a corda, de comprimento L , está fixa nos seus extremidades (= contornos), temos como valores de contorno que o deslocamento é sempre zero:

$$\eta(0,t) = \eta(L,t) = 0; t > 0 \quad (5)$$

Já que a equação de onda é tanto em relação a x quanto a t de segunda ordem, temos que dar duas condições iniciais: a *forma* inicial e a *velocidade* inicial:

$$\eta(x,0) := f(x); 0 < x < L \quad (6)$$

$$\partial\eta(x,0)/\partial t := g(x); 0 < x < L \quad (7)$$

Vamos mostrar que cada função de $x + ct$ ou $x - ct$ satisfaz a equação de onda (4), especialmente a Eq. (1) é uma função deste tipo. Já que Eq. (4) é linear tanto em ξ quanto em η , temos como solução geral da equação de onda

$$\eta(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (8)$$

F e G são funções quaisquer dos argumentos $x - ct$ e $x + ct$. $F(x - ct)$ descreve uma perturbação que se propaga na direção positiva de x , $G(x + ct)$ representa uma perturbação propagando-se no sentido de $-x$. No tempo $t = 0$ deve ser

$$f(x) = F(x) + G(x) \quad (9)$$

Para obter expressões separadas para F e G , derivamos Eq. (8) com respeito ao tempo

$$\partial\eta/\partial t = -cF'(x - ct) + cG'(x + ct) \quad (10)$$

No instante $t = 0$ vale, além disso,

$$g(x) = -cdF(x)/dx + cdG(x)/dx \quad (11)$$

Agora integramos isso entre a e x

$$G(x) - F(x) = G(a) - F(a) + c^{-1} \int_a^x g(x) dx \quad (12)$$

Basta combinar Eq. (9) com Eq. (12), para obter

$$G(x) = (G(a) - F(a))/2 + f(x)/2 + 1/(2c) \cdot \int_a^x g(x) dx \quad (13)$$

$$F(x) = -(G(a) - F(a))/2 + f(x)/2 - 1/(2c) \cdot \int_a^x g(x) dx \quad (14)$$

Usando estes resultados, podemos dar a E. (8) a seguinte forma

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x) dx \quad (15)$$

Quando se trata de uma corda esticada, que tem, ao começo, uma forma triangular - sem velocidade inicial, $g(x) = 0$ segundo Eq. (7) - e que é solta em $t = 0$, então resta da Eq. (15) só

$$\eta(x,t) = [f(c + ct) + f(x - ct)]/2, \quad (16)$$

onde $f(x)$ é a forma inicial da corda.

7.1.4 Solução com séries de Fourier (I)

A solução (16) foi desenvolvido por D'Alembert (1717-1783). Um método diferente foi já mencionado em 1753 por Daniel Bernoulli (1700-1782). Ele afirmou que o problema da corda vibrante pode ser resolvido pela seguinte soma

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \quad (17)$$

Bernoulli teve razão. Mas, nem D'Alembert nem Euler tiveram fé na afirmação do Bernoulli, eles estavam convencidos de que uma série como a (17) nunca poderia representar a forma de um corda esticada (triângulo).

Mas, em 1822 mostrou Fourier (1768-1830) que séries da forma (17) são convergentes na maioria dos casos e que elas podem aproximar com bastante exatidão quase qualquer função f , contínua e periódica de período $T = 2\pi/\omega$. (Se $T = 2\pi$, resulta $\omega = 1$). O teorema de Fourier pode ser expressa como uma soma trigonométrica:

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t \\ & + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Esta *série de Fourier* escreve-se de várias maneiras, segundo a escolha do período. Se $T = 2\pi$, temos $\omega = 1$ e a série toma a forma (escrevendo x em vez de t):

$$f(x) = a_0/2 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \quad (19)$$

A seguinte série representa a forma triangular de uma corda de comprimento L , esticada em $x = x_0$ pela distância $u(x_0, 0) = b$ (o deslocamento η designamos por $u(x, t)$):

$$u(x, t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n x_0 \pi}{L} \cos \frac{n v \pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L} \quad (20)$$

O período desta equação é $T=L$ e $\omega = 2\pi/L$. O fator A é $A = 2bL^2/[x_0(L-x_0)\pi^2]$. A reprodução da ponta da corda é tanto melhor quanto maior o número de termos da série (20) que se utiliza no cálculo.

A primeira vista, o problema de descrever o movimento da corda parece ser bastante complicado. Mas com ajuda de MuPAD, podemos representar a corda em qualquer instante t , utilizando um número arbitrário de termos da série (20). (No parágrafo "Solução com séries de Fourier (II)" vamos ocupar-nos detalhadamente com a equação de onda e sua solução por meio de séries de Fourier. Por ora, estudamos o assunto experimentalmente. Se quer estudar a *solução numérica*, pode encontrar um estudo do problema da corda vibrante em F. J. Mehr, PdN-Ph. 2/82 S. 45). Para ver melhor a aproximação de funções periódicas por meio de séries de Fourier, utilizamos o seguinte programa de MuPAD para o caso da Eq. (20).

Consideremos, então, uma corda com $L = 1.5$ m, $b = 5$ mm, $x_0 = 1$ m. A velocidade é $v = 100$ m/s -trata-se de um fio de ferro com 1 mm de diâmetro. $\rho = 7640$ kg/m³ e $F = 60$ N. (A ponta da corda esticada transcorre horizontalmente a distância de 1m em 10 s. Já que o caminho horizontal total é de 3m, o tempo para voltar à posição original será de 30 ms.)

- `reset()://Série de Fourier`
`b:=0.005:L:=1.5:xo:=1://xo= lugar do pico`
`v:=100://velocidade da onda`
`A:=2*b*L^2/(xo*(L-xo)*PI^2):`
`p:=PI/L:m:=xo*p:q:=v*p:`
`t:=0://t em milissegundos`
`u1:=x->A*sum(n^-2*sin(n*m)*cos(n*q*t)*sin(n*p*x),n=1..2):`
`U1 := plot::Function2d(u1(x), x = 0..L, Color =`
`RGB::Green):`
`u2:=x->A*sum(n^-2*sin(n*m)*cos(n*q*t)*sin(n*p*x),n=1..5):`
`U2 := plot::Function2d(u2(x), x = 0..L, Color = RGB::Blue):`
`u3:=x->A*sum(n^-2*sin(n*m)*cos(n*q*t)*sin(n*p*x),n=1..50):`
`U3 := plot::Function2d(u3(x), x = 0..L, Color = RGB::Red):`
`f:=x->piecewise([x<=xo,b*x/xo],[x<=L,b*L/(L-xo)-b/(L-`
`xo)*x]):`
`F := plot::Function2d(f(x), x = 0..L, Color = RGB::Black):`
`plot(U1,U2,U3,F, AxesTitles=["x/m", "Y/m"])`

A figura 1 mostra a aproximação à forma original da corda com $N = 2, 5, 50$ termos. O triângulo preto foi traçado com $f(x) = b/cx$, $0 \leq x \leq x_0$, e $bL/(L-x_0) - b/(L-x_0)x$ para $x_0 < x \leq L$. Ele coincide praticamente com u_3 .

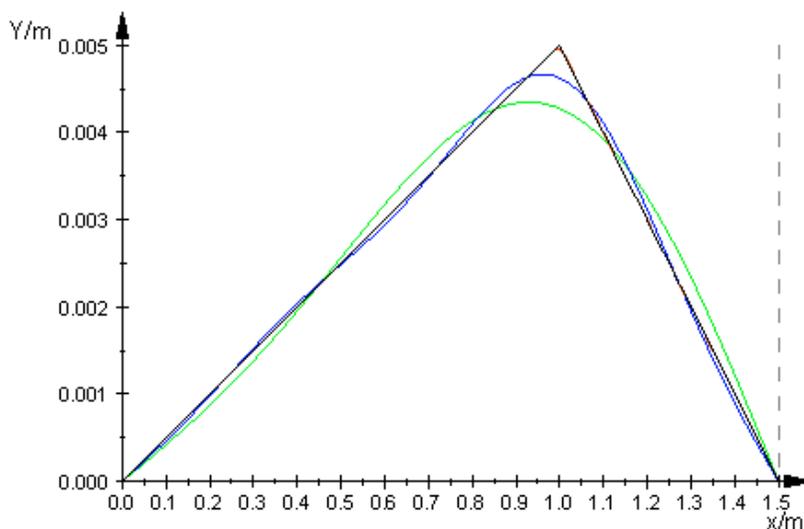


Fig.: 7.1.4_1

A seguinte figura mostra a aproximação à corda no instante $t = 8$ ms usando 2, 5 e 50 termos da série (20).

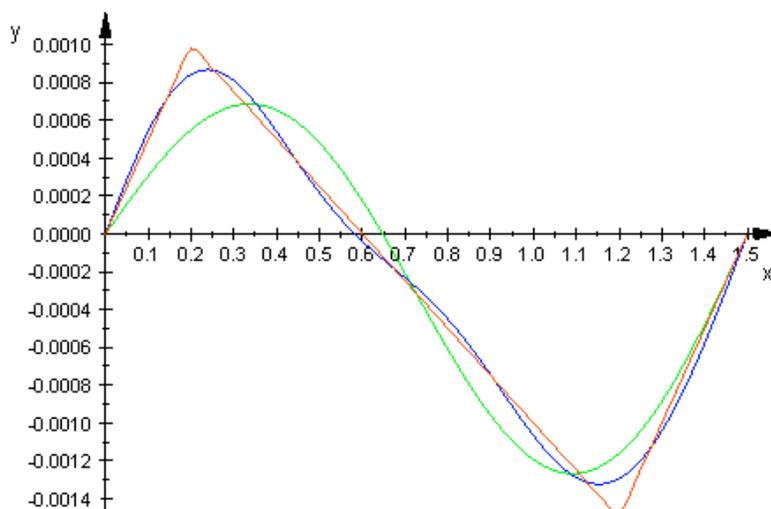


Fig.: 7.1.4_2

Nas duas figuras seguintes são mostrados instantâneos da corda em 12 diferentes instantes.

A Fig.: 7.1.4_3 mostra a aparência nos instantes

`[0,0.003,0.006,0.009,0.012,0.015]` segundos

Logo, na Fig.: 7.1.4_4, vemos as formas nas instantes

`[0.015,0.018,0.021,0.024,0.027,0.030]` segundos

- reset()://Série de Fourier**
b:=0.005:L:=1.5:xo:=1://xo= lugar do pico
v:=100://velocidade da onda
valores_t:= [0,0.003,0.006,0.009,0.012,0.015]:// tempo
A:=2*b*L^2/(xo*(L-xo)*PI^2):
p:=PI/L:m:=xo*p:q:=v*p:
u:=(x,t)->
A*sum(n^-2*sin(n*m)*cos(n*q*t)*sin(n*p*x),n=1..10):
curvas:=plot::Scene2d(plot::Function2d(subs(u(x,t),
t=valores_t[i]),Color=RGB::Blue,x=0..L))\$i=1..6:
plot(curvas)

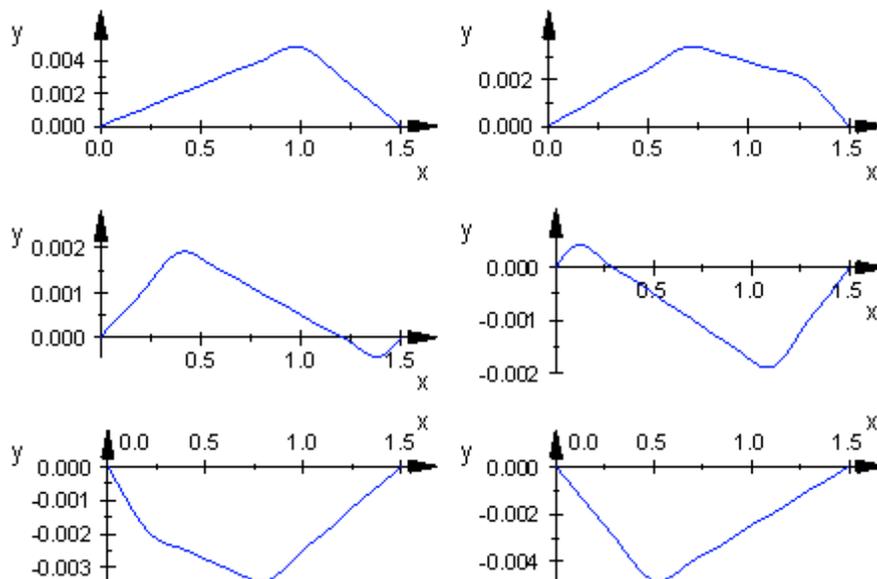


Fig.: 7.1.4_3

O último instantâneo da Fig.: 7.1.4_3 mostrou a corda no instante $t = 15$ ms. Neste mesmo instante começamos a próxima série de instantâneos, ela termina com $t = 30$ milissegundos, quando a corda recupera sua forma inicial.

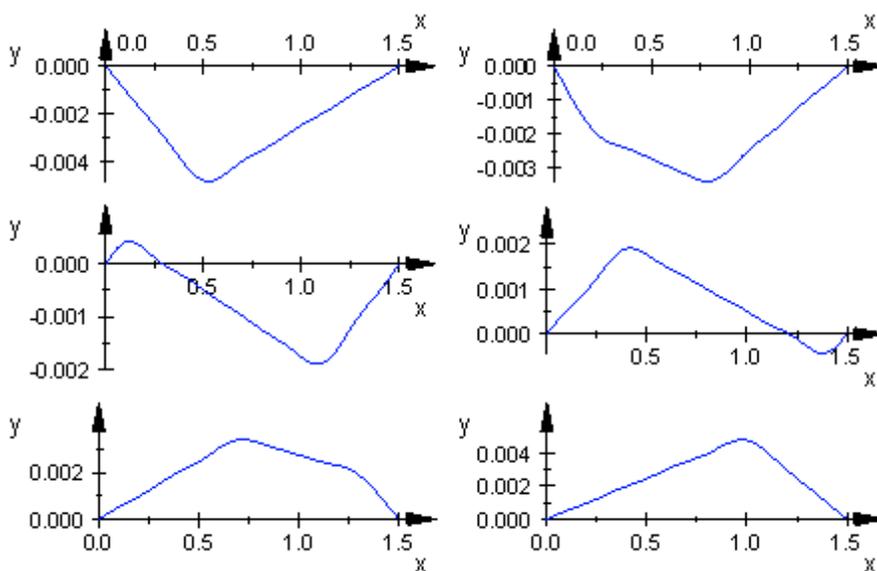


Fig.: 7.1.4_4

Em todas as representações foram usados 10 termos da série (20). Dependendo onde paramos a série, ou seja, quantos termos empregamos, a reprodução da função pela série (20), fica melhor e melhor. Viemos isso nas figuras Fig.: 7.1.4_1 - 2.

Para terminar esta seção, fazemos o gráfico da seguinte soma de funções trigonométricas da forma

$$u(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2n-1)x]}{2n-1} \quad (21)$$

É bem surpreendente que o resultado são pulsos retangulares:

- `reset()` // Série de Fourier de pulso retangular
`A:=4/PI:`
`u:=x->A*sum(sin((2*n-1)*x)/(2*n-1),n=1..20):`
`U:= plot::Function2d(u(x), x = -PI..3*PI, Color =`
`RGB::Blue):`
`plot(U)`

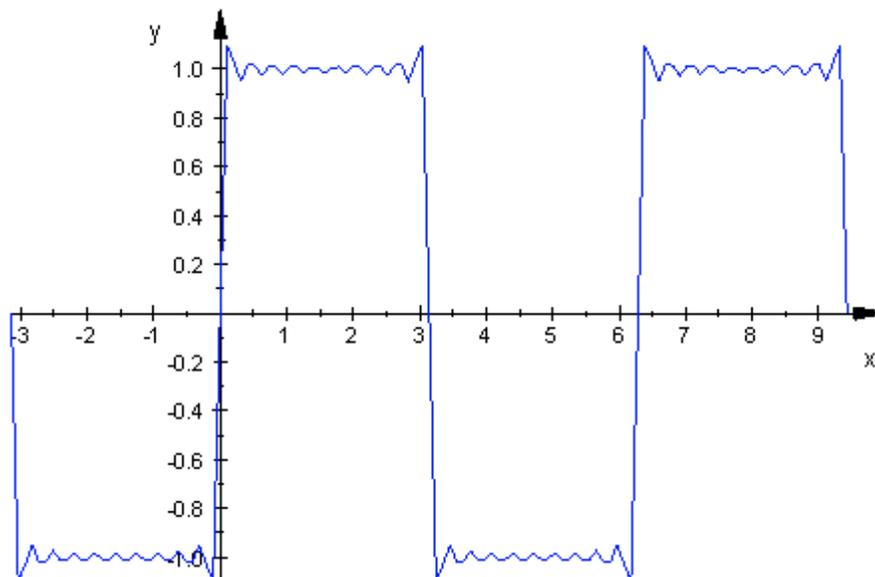


Fig.: 7.1.4_4

Vale a pena, experimentar um pouco com o programa, por exemplo utilizar `cos` em vez de `sen` e, no denominador, $(2n - 1)^2$ em vez de $2n - 1$.

Com $\cos((2*n-1)*x)/(2*n-1)^2$ obtém-se uma linda onda triangular.