

6.5 Movimento oscilatório

6.5.1 Osciladores acoplados

Na seção anterior estudamos, entre outras coisas, como funciona a transferência de energia de um agitador externo para um oscilador.

Agora vamos estudar o caso de dois osciladores acoplados, trocando energia entre si mesmos.

Consideramos o modelo ilustrado na figura 6.5-1

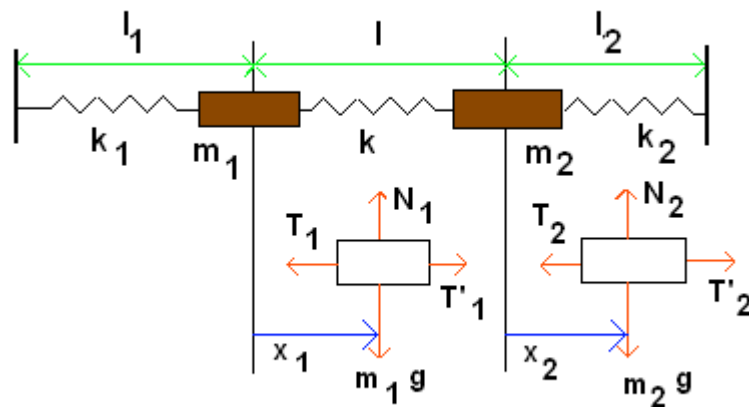


Fig.: 6.5-1

Duas "partículas" de massas m_1 e m_2 são presas uma à outra e a paredes fixas por molas. No estado relaxado, as molas têm os comprimentos l_{01}, l_0 e l_{02} . Na posição de equilíbrio, elas têm o comprimento l_1 e l_2 (neste estado as molas podem ser esticadas, ou seja, l_1 não necessariamente é igual a l_{01} , etc.).

Sobre a massa m_1 atuam quatro forças: m_1g , N_1 , T_1 e T'_1 , analogamente para m_2 .

A segunda lei de Newton para m_1 e m_2 reza (veja 3.1, 6.1.2):

$$m_1 \mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_1' = m_1 \mathbf{a}_1 \quad (1)$$

$$m_2 \mathbf{g} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2' = m_2 \mathbf{a}_2 \quad (2)$$

Para os deslocamentos (supomos que $x_2 > x_1$) podemos escrever

$$m_1 x_1'' = -k_1(s_1 + x_1) + k(s + x_2 - x_1) \quad (3)$$

$$m_2 x_2'' = -k(s + x_2 - x_1) + k_2(s_2 - x_2) \quad (4)$$

Os coeficientes significam $s = l - l_0$, $s_1 = l_1 - l_{01}$, $s_2 = l_2 - l_{02}$, ou seja, eles são os alongamentos que as molas já têm no estado de equilíbrio.

A energia potencial do sistema vem dada pela seguinte expressão

$$E_p = k_1(s_1 + x_1)^2/2 + k(s + x_2 - x_1)^2/2 + k_2(s_2 - x_2)^2/2 \quad (5)$$

Supomos agora, simplificando, que as molas estão, no estado de equilíbrio, distendidas e que têm os mesmos comprimentos. Neste caso particular, as equações de movimento (3) e (4) assumem as seguintes formas

$$x_1'' = -ax_1 + bx_2 \quad (6)$$

$$x_2'' = -cx_2 + dx_1 \quad (7)$$

A equação para x_1 contém com x_1 também x_2 , e na equação para x_2 parecem tanto x_2 quanto x_1 . Ambas as equações estão, por isso, acopladas, elas formam um sistema de duas equações diferenciais acopladas, veja, p. ex., 2.5.1, 3.6.3.

As constantes são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a &:= (k + k_1)/m_1, \\ b &:= k/m_1, \\ c &:= (k + k_2)/m_2, \\ d &:= k/m_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Agora resolveremos o sistema (6)-(7) numericamente. (Logo limitar-nos-emos ao caso particular de duas massas iguais tomando $k_1 = k_2 := k_0$ e $a = c = (k+k_0)/m$ e $b = d = k/m$.)

6.5.2 Solução numérica e Gráficos

Em seções anteriores vimos já equações diferenciais acopladas, veja p. ex. as explicações e programas em 3.2 e 5.2.3.

Estamos estudando o seguinte *caso especial*:

No começo, a massa m_2 foi deslocada para $x_2(0) = 1$ e logo liberada, enquanto m_1 estava em $x_1(0) = 0$ (temos $m_1 = m_2$). Logo de soltar o segundo oscilador, observamos como as suas oscilações são transmitidas para o primeiro e que a fase de deslocamento do oscilador m_1 está sempre atrasada de um ângulo de 90° em relação ao oscilador 2, que começa o movimento. (Precisa-se mover o gráfico de m_1 de 90° à esquerda, para obter fases idênticas. Veja a Fig.: 6.5-4). Devido à defasagem entre os dois osciladores, há uma troca de energia entre eles

Ambas as massas executam um movimento de batimento. Das figuras podemos ver que o tempo entre dois valores mínimos da amplitude (= tempo do batimento) é de 28 s. O período da oscilação própria é aproximadamente de 5,5 s. A figura 6.5-3 mostra somente o oscilador 1, o que faz que podemos ver os pormenores do movimento com maior nitidez.

- `reset()://Osciladores acoplados`
`x0:=0:vx0:=0://x=x1`
`y0:=1:vy0:=0://y=x2`
`a:=1.25:b:=0.25:c:=a:d:=b:`
`IVP:={x'(t)=-a*x(t)+b*y(t),`
`y'(t)=-c*y(t)+d*x(t),`
`x(0)=x0,x'(0)=vx0,`
`y(0)=y0,y'(0)=vy0}:`
`fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:`
`ivp:=numeric::ode2vectorfield(IVP,fields):`
`Y:=numeric::odesolve2(ivp):`
`C1:=plot::Scene2d(plot::Function2d(Y(t)[1],t=0..60,`
`Mesh=2000,Color=RGB::Red),Header="Oscilador`
`1",AxesTitles=["t/s","x"]):`

```

C2:=plot::Scene2d(plot::Function2d(Y(t)[2],t=0..60,Mesh=200
0), Header="Oscilador
2",AxesTitles=["t/s","x"]): plot(C1,C2)

```

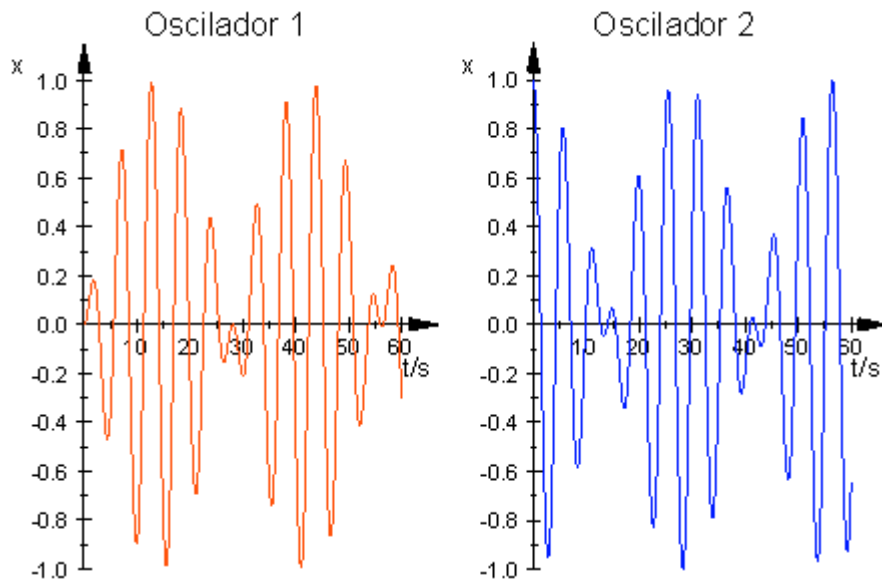


Fig.: 6.5-2

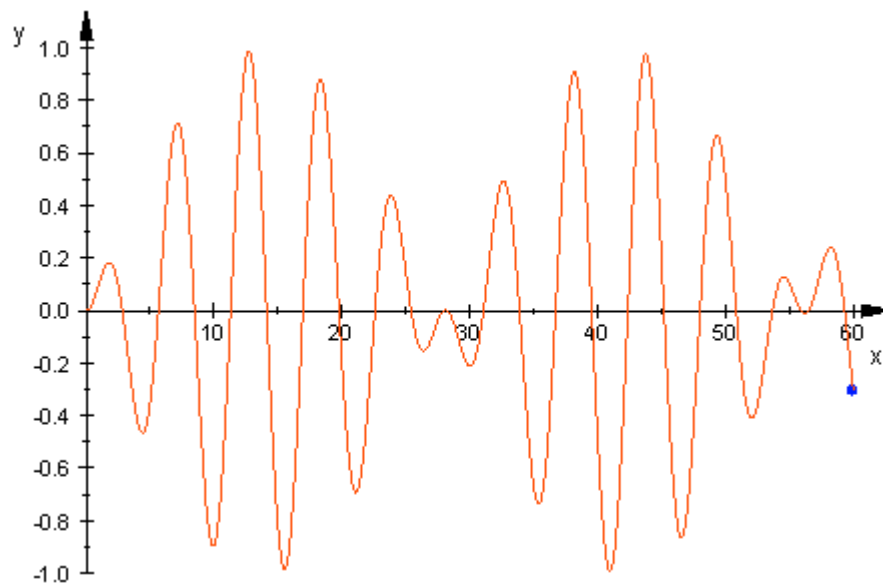


Fig.: 6.5-3

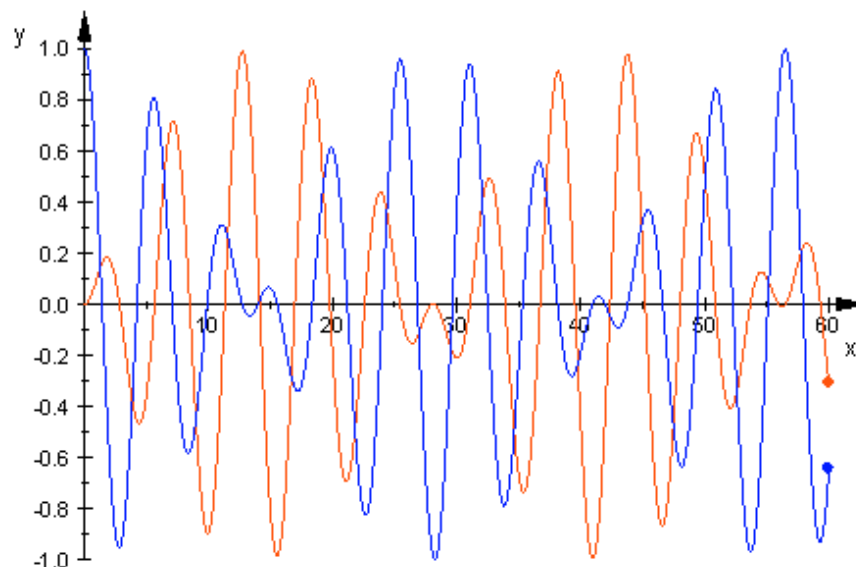


Fig.: 6.5-4

A figura 6.5-4 mostra os deslocamentos das massas m_1 e m_2 superpostos no mesmo gráfico. ($x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$).

O programa permite fazer um estudo completo das oscilações com diferentes condições iniciais. Podemos detectar que existem dois modos de oscilação, fala-se de *modos normais* ou *fundamentais*, para os quais a defasagem é 0° respectivamente 180° e nos quais não há transferência de energia.

O *primeiro modo normal* temos quando $x_1(0) = x_2(0) = A$, p. ex. $A = 1$. Os dois osciladores movem-se em fase. A mola do centro não sofre deformação e, portanto, não exerce força sobre as massas. Elas movem-se como se não estivessem acopladas. Ambas massas oscilam com a mesma frequência $\omega_0 = (k_0/m)^{1/2}$.

No *segundo modo normal*, os dois osciladores movem-se em oposição de fase (temos uma diferença de fase de π) com $x_1(0) = -A$ e $x_2(0) = A$ ($=1$). A frequência é agora maior que a frequência sem acoplamento $\omega = (\omega_0^2 + 2k/m)^{1/2}$, pois nesse caso, o centro da mola de acoplamento fica sempre em repouso, isso é como se fosse reduzido o comprimento da mola central à metade do comprimento original, ou, o que é o mesmo, como sua constante de mola fosse agora $2k$. (Os modos fundamentais podemos chamar de modos *puros*, os outros serão modos *mistos*.)

Em todos os outros casos observamos variações nas amplitudes dos osciladores. Este fenômeno ocorre quando dois movimentos harmônicos simples que têm a mesma direção e frequências diferentes interferem. O resultado da superposição é especialmente interessante quando as amplitudes são iguais. Nesse caso podemos observar uma flutuação de amplitude, chamada de *batimento*.

6.5.3 Solução analítica das equações de movimento

No seguinte parágrafo vamos ocupar-nos com a solução analítica das equações (6), (7) e (8) para o caso particular de duas massas iguais e com $k_1 = k_2 := k_0$ e $a = c = (k+k_0)/m$ e $b = d = k/m$.

Buscamos, então, a solução para o seguinte sistema:

$$x_1'' = -ax_1 + bx_2 \quad (9)$$

$$x_2'' = -ax_2 + bx_1 \quad (10)$$

Introduzimos, para simplificar o cálculo, as seguintes coordenadas novas

$$x := x_1 + x_2 \text{ e } y := x_1 - x_2 \quad (11)$$

Com ajuda dessas coordenadas (chamam-se coordenadas normais) podemos desacoplar as equações de movimento, pois as novas equações (somar e restar (9) e (10))

$$x'' = -(a-b)x \quad (12)$$

$$y'' = -(a+b)y \quad (13)$$

não são acopladas. Já que $a > b$, vemos que Eq.(12) é da forma $x'' + \omega_0^2 = 0$, onde $\omega_0^2 := a-b = k_0/m$ e que tem a solução

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) \quad (14)$$

Analogamente obtemos para y a equação

$$y = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \quad (15)$$

com $\omega^2 = a + b = (k_0 + 2k)/m = \omega_0^2 + 2k/m$.

Para voltar as coordenadas originais, basta somar e restar x e y, pois $x + y = 2x_1$ e $x - y = 2x_2$:

$$x_1 = 1/2 [A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)] \quad (16)$$

$$x_2 = 1/2 [A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) - A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)] \quad (17)$$

Essas duas equações indicam que x_1 e x_2 são as resultantes da interferência de dois movimentos harmônicos simples de mesma direção, mas de frequências e fases diferentes.

Escolhendo as condições iniciais apropriadamente, podemos fazer que $A_2 = 0$. Isso terá como consequência que $x_1 = x_2$. Seria isso o *primeiro modo normal*.

Se fizermos $A_1 = 0$, resulta $x_1 = -x_2$, o nosso *segundo modo normal*.

Agora usamos as condições iniciais que produziram os movimentos representados nas figuras 6.5-2-4. Foram esses $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $m_1 = m_2$ e $x_1'(0) = x_2'(0) = 0$.

Para cumprir com essas condições, temos que tomar $\alpha_1 = \alpha_2 := \alpha$, $A_1 = -A_2 := A$. Para que seja $x_2(0) = A$, precisamos $\alpha = 0$.

Obtemos assim

$$x_1 = 1/2 \cdot A(\cos\omega_0 t - \cos\omega t) \quad (18)$$

$$x_2 = 1/2 \cdot A(\cos\omega_0 t + \cos\omega t) \quad (19)$$

Essas equações podemos simplificar ainda mais, aplicando as formulas

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos(\alpha + \beta)/2 \cos(\alpha - \beta)/2 \quad (20)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin(\alpha + \beta)/2 \sin(\alpha - \beta)/2 \quad (21)$$

$$\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha), \cos(\alpha) = \cos(-\alpha) \quad (22)$$

A forma final será

$$x_1 = A \operatorname{sen} \frac{\omega - \omega_0}{2} t \cdot \operatorname{sen} \frac{\omega + \omega_0}{2} t \quad (23)$$

$$x_2 = A \operatorname{cos} \frac{\omega - \omega_0}{2} t \cdot \operatorname{cos} \frac{\omega + \omega_0}{2} t \quad (24)$$

Usando os valores do programa e com $m=1\text{kg}$, $\omega_0 = 1\text{s}^{-1}$, $k = k_0/4$, obteremos

$$(\omega - \omega_0)/2 = 0,1125 \text{ s}^{-1}, (\omega + \omega_0)/2 = 1,112 \text{ s}^{-1}$$

O período do batimento é $T_b = 2\pi/(\omega - \omega_0) \approx 28 \text{ s}$. O período da oscilação própria é

$T = 2\pi/(\omega + \omega_0)/2 = 2\pi/1,112 \text{ s}^{-1} = 5,65 \text{ s}$. Já mencionamos estes números mais acima.

Para o caso de *acoplamento débil*, podemos simplificar as fórmulas (23) e (24) outra vez. Escrevamos primeiro ω na forma

$$\omega = (k_0/m)^{1/2} \cdot (1+2k/k_0)^{1/2} \approx \omega_0 (1 + k/k_0) := \omega_0 + \beta \quad (25)$$

Pois o desenvolvimento em série da função $(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm 1/2 x - 1/8 x^2 \dots$ mostra que, para $x \ll 1$, podemos escrever $(1 \pm x)^{1/2} \approx 1 \pm 1/2 x$.

Temos então as aproximações $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0 + \beta \approx 2\omega_0$ e $\omega - \omega_0 = \beta$.

O movimento no caso de acoplamento débil podemos descrever, então, pelas equações

$$x_1 = A \operatorname{sen} \beta t/2 \cdot \operatorname{sen} \omega_0 t \quad (26)$$

$$x_2 = A \operatorname{cos} \beta t/2 \cdot \operatorname{cos} \omega_0 t \quad (27)$$

Estas são duas funções periódicas de frequência ω_0 moduladas por um termo de baixa frequência angular $\beta/2$. Já que estes fatores de frequência baixa estão defasados de 180° , a energia total move-se lentamente de um oscilador ao outro, sem cessar (teoricamente). São estes movimentos os *batimentos* conhecidos da acústica. Por exemplo, quando dois diapasões de frequências próximas vibram simultaneamente, observa-se uma flutuação na intensidade do som.

Uma amplitude máxima ocorrerá sempre que $\sin \beta t/2$ ou $\cos \beta t/2$ tiver o valor +1 ou -1, o que acontece duas vezes em cada repetição das funções sen ou co-seno.

6.5.4 Autovalores e autovetores

Consideraremos agora a superposição ou interferência de dois movimentos harmônicos simples sem introduzir coordenadas normais.

Discutamos o caso em que ambos movimentos têm a mesma freqüência e supomos as soluções da forma

$$x_1 = A_1 \cos(\Omega t + \alpha_1) \quad (28)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\Omega t + \alpha_2) \quad (29)$$

A razão de escrever Ω em vez de ω será em breve patente. Formamos as duas primeiras derivadas do sistema (28), (29) e vamos introduzi-las nas equações (9) e (10). Depois teremos que resolver, para a determinação das amplitudes A_1 e A_2 , o seguinte sistema homogêneo

$$(a - \Omega^2) A_1 - b A_2 = 0 \quad (30)$$

$$-d A_1 + (c - \Omega^2) A_2 = 0 \quad (31)$$

Podemos escrever este sistema em forma matricial:

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (32)$$

$$\text{ou } \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A}, \quad (33)$$

onde $\lambda := \Omega^2$. \mathbf{M} é a matriz dos coeficientes e \mathbf{A} é o vetor de A_1 e A_2 .

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -d & c \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Buscamos vetores \mathbf{A} (autovetores) que satisfaçam (33), os números λ são os autovalores. (Veja as explicações na seção 4.4.) Veremos que os autovalores são as freqüências das oscilações normais. Da seção 4.4 sabemos que os autovalores devem satisfazer a equação característica

$$\lambda^2 - (\text{Tr}\mathbf{M})\lambda + \det \mathbf{M} = 0 \quad (35)$$

Agora vamos servi-nos de MuPAD, para determinar os autovalores e os autovetores:

- `reset() // Autovalores e autovetores`
`DIGITS:=6:`
`A:=matrix([[(k+k0)/m, -k/m], [-k/m, (k+k0)/m]):`
`a:=linalg::eigenvectors(A):`
`a[1], a[2]:`
`a[1][1], a[1][3][1];`
`a[2][1], a[2][3][1]`

Este programa nos proporciona os autovalores $\omega_0^2 := k_0/m$ e $\omega^2 := \omega_0^2 + 2k/m$ e os autovetores $\mathbf{A}_1 = (1,1)$ e $\mathbf{A}_2 = (-1,1)$.

Estes resultados nos são conhecidos.

6.5.5 Verificação experimental

Experimentalmente, é muito fácil observar as oscilações acopladas, especialmente os batimentos. Bastam duas porcas de parafuso, dois fios, um canudo ou um espetinho e uma madeirinha. Para fazer o acoplamento entre os pêndulos, basta pôr os dois fios uma vez em torno do canudo. Conferir Priest, J.-Poth, J.: *Teaching physics with coupled pendulums*, The Physics Teacher, Febr. (1982) 80.

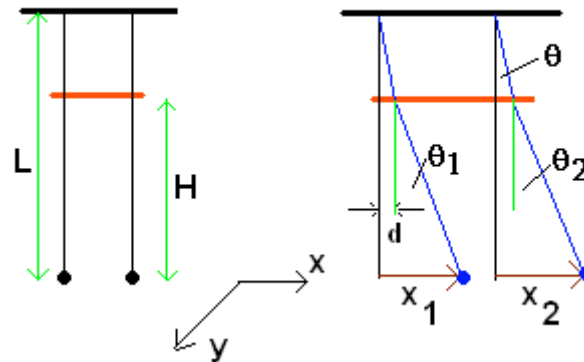


Fig.: 6.5-5

A equação de movimento para um pêndulo com comprimento H (p. ex. $H = 0.8\text{m}$, $L = 1\text{m}$) reza $x'' = -gx/H$. No caso dos dois pêndulos acoplados temos

$$x_1'' = -g/H \cdot (x_1 - d) \quad (36)$$

$$x_2'' = -g/H \cdot (x_2 - d) \quad (37)$$

Restando as equações e introduzindo a nova coordenada $y = x_1 - x_2$, resulta

$$y'' = -g/H \cdot y \quad (38)$$

A frequência correspondente é $\omega = (g/H)^{1/2}$.

Somando as equações, proporciona $x_1'' + x_2'' = -g(x_1 + x_2 - 2d)/H$. Supomos que $\theta_1 \approx \theta_2$. Temos então $(x_1 - d)/H \approx x_1/L$ e $(x_2 - d)/H \approx x_2/L$.

Assim podemos escrever $x_1 + x_2 - 2d = x_1 - d + x_2 - d \approx H(x_1 + x_2)/L$ e obtemos

$$x'' = -g/H \cdot x, \quad (39)$$

onde $x := x_1 + x_2$. Temos, assim, a segunda frequência própria: $\omega_0 = (g/L)^{1/2}$.

Para determinar x_1 e x_2 usa-se o mesmo procedimento do parágrafo anterior e obtém-se, outra vez, as equações (23), (24) usando as mesmas condições iniciais, a saber $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = A$, $m_1 = m_2$ e $x_1'(0) = x_2'(0) = 0$.

6.5.6 Figuras de Lissajous

Consideremos agora os pêndulos de 6.5.5 e os deixamos oscilar no plano x-y, p.ex. deslocando um dos pêndulos no ponto com $x = 8$ cm e $y = 6$ cm. Depois de havê-lo solto, ele vai descrever figuras complicadas no plano x-y (uma figura de Lissajous, J. Lissajous, 1822-1880).

Devido ao acoplamento débil na direção y, temos para a componente y simplesmente

$$y = y_0 \cos \omega_0 t; \quad \omega_0 = (g/L)^{1/2} \quad (40)$$

(Se um pêndulo oscila na direção y, ou seja, perpendicularmente ao eixo x, o outro não será influenciado por este movimento. Somente se um pêndulo, p. ex. o segundo, tiver ao princípio uma componente em y e em x, o outro, o primeiro pêndulo, vai ser excitado e começará com um movimento de batimentos. Isso indica que os componentes-x são fortemente acoplados.)

Para a componente x do segundo pêndulo utilizamos no programa a equação (24):

- ```

reset()://Figuras de Lissajous
x0:=0.08:y0:=0.06:L:=0.7:H:=0.35:g:=9.81:
w0:=sqrt(g/L):
w:=sqrt(g/H):
y:=t->y0*cos(w0*t)//y2
x:=t->x0*cos((w-w0)*t/2)*cos((w+w0)*t/2)//x2
plot(plot::Curve2d([x(t),y(t)],t=0..4.1)):

```

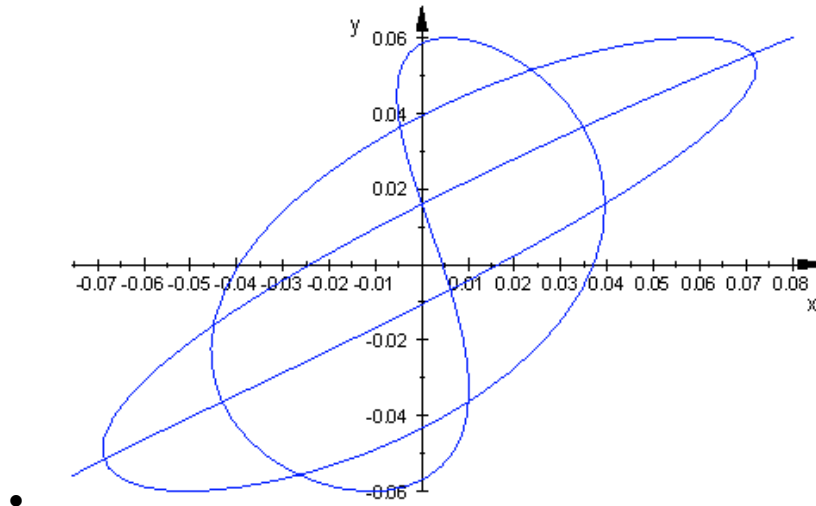


Fig.:6.5-6

Uma curva de Lissajous pode ser observada facilmente na tela de um osciloscópio colocando a componente  $x$  no canal horizontal e a componente  $y$  no canal vertical. Precisamos dum gerador eletrônico para produzir dois voltagens harmônicas perpendiculares. Os elétrons num osciloscópio são defletidos por dois campos de tal maneira que, em qualquer instante  $t$ , o deslocamento é dado por  $x = x_0 \cos(\omega t)$  e  $y = y_0 \cos(\omega t + \alpha)$ .

Curvas fechadas só podemos ver quando a razão das freqüências é um número racional, ou seja, quando  $\omega_1$  e  $\omega_2$  não possuem divisor comum.

Se a razão das freqüências angulares é irracional, resultam oscilações não periódicas.

Se  $\omega_1 / \omega_2$  não for um número racional, então a curva será "aberta" e, após um longo tempo, a partícula terá passado por todos os pontos do retângulo limitado por  $x = \pm x_0$  e  $y = \pm y_0$ . Ela nunca passará duas vezes por um dado ponto com a mesma velocidade.

Imaginemos uma partícula presa por duas molas horizontais e duas verticais, todas iguais. Se o deslocamento da partícula for pequeno com respeito aos comprimentos das molas, podemos supor que as forças horizontais e verticais não estejam acopladas.

Para as forças ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  podemos escrever

$$F_x = -k_x x = m\ddot{x} \quad (41)$$

$$F_y = -k_y y = m\ddot{y} \quad (42)$$

As soluções são oscilações harmônicas simples com

$$x = A \sin \omega_1 t \quad (43)$$

$$y = B \sin (\omega_2 t + \alpha) \quad (44)$$

Para as freqüências temos:  $\omega_1^2 = k_x/m$ ;  $\omega_2^2 = k_y/m$  (45)

Com o seguinte programa podemos traçar os gráficos das equações (43), (44) para uma variedade de freqüências e fases.

- ```

reset()://Lissajous
A:=5:B:=5:
valores_a:=[0,PI/4,PI/2,3*PI/4]:
w1:=3:w2:=1:
x:=t->A*sin(w1*t):
y:=t->B*sin(w2*t+a):
curvas:=plot::Scene2d(plot::Curve2d(subs([x(t),y(t)],
a=valores_a[i]), Color=RGB::Blue,t=0..2*PI))$ i=1..4:
plot(curvas,Scaling=Constrained)

```

Escolhemos amplitudes iguais, $A = B = 5$, e $\omega_2 : \omega_1 = 1:3$, para as fases escolhemos $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$ e $3\pi/4$.

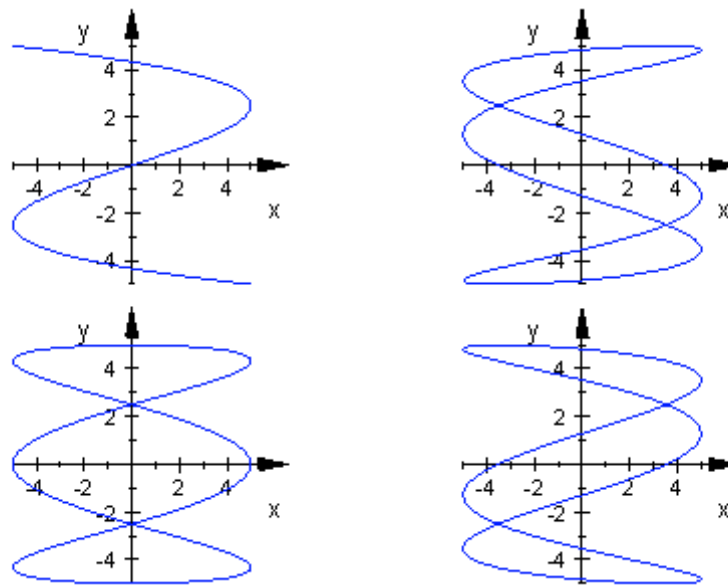


Fig.: 6.5-7

Jules Antoine Lissajous investigou em 1857 "suas" curvas experimentalmente fazendo uso de dois grandes diapásões, mas ele publicou também dois estudos teóricos nos quais explicou seus resultados experimentais.

Mas Lissajous não foi o primeiro em estudar as curvas. Já em 1815, o americano Nathaniel Bowditch publicou gráficos das curvas, juntamente com os cálculos. (Bowditch, N.: Mem. Am. Acad. Arts Sci. 3(1815)413.

Consideremos agora o caso especial de *freqüências iguais*.

1. $\alpha = 0$. Podemos dividir Eq. (44) por Eq. (43) para obter a equação de uma reta:

$$y(x) = B/A x$$

2. $\alpha = \pi$. A equação de y podemos escrever na forma $y(t) = -B \sin \omega t$. Dividindo as duas equações, proporciona outra vez um reta, mas, esta vez, com inclinação negativa.
3. $\alpha = \pi/2$. Por meio de $y(t) = B \cos(\omega t + \pi/2) = -B \sin \omega t$ encontramos uma elipse

$$x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$$

4. $\alpha =$ arbitrário. Após de um cálculo pouco difícil, obtemos a equação geral de uma elipse

$$x^2/A^2 + y^2/B^2 - 2xy/(AB) \cdot \cos\alpha = \sin^2 \alpha$$

Esta equação contem os casos anteriores.