

6.4 Movimento oscilatório

6.4.1 Oscilações forçadas não-amortecidas

Quando um oscilador (um pêndulo) é forçado levemente, ele conserva a maior parte de sua individualidade -ligeiramente modificada, porém, pela presença da "forçagem". Assim, sua frequência é algo diferente do que seria sem estimulação exterior e sua amplitude é modulada no tempo. Diz-se que o regime é biperiódico, ou seja, que nele tornamos a encontrar a presença *superposta* das frequências do oscilador e da forçagem.

Uma pessoa oscilando em um balanço empurrado periodicamente por outra pessoa é um pêndulo forçado. O balanço, com a pessoa indo e vindo, tem sua frequência natural ω_0 . A pessoa, causando as oscilações forçadas, excita o balanço com uma frequência ω . Quando o balanço é estimulado com uma frequência muito próxima da sua frequência própria, isso lhe convém perfeitamente e ele tira daí a energia necessária para oscilar sem descanso.

Mas que acontece se a estimulação ocorrer com uma frequência qualquer?

Examinemos um pouco mais de perto um sistema massa-mola, nosso arquétipo de um oscilador.

A massa m (uma esfera) é suspensa à extremidade inferior da mola cuja extremidade superior está fixa em minha mão. Se mantenho minha mão imóvel, o pêndulo oscilará com sua frequência natural $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$. Quando a mão começa a subir e descer com a amplitude E e com a frequência ω , ou seja, quando minha mão oscila segundo a lei

$$y_A = E \cos \omega t, \quad (1)$$

a massa começa a mover-se, primeiro em forma caótica, depois com o ritmo da minha mão. O movimento inicial, semicaótico, extingue, normalmente, depois de pouco tempo, trata-se de um movimento *transitório*. O movimento que continua é chamada de movimento *estacionário* ou movimento no regime *permanente*.

Podemos referir-nos à seção 6.3.1, onde temos que substituir Eq. (1) por $mg = k(y_1 + y_A)$ e, em vez de $y'' + \omega_0^2 y = 0$, temos agora $y'' + \omega_0^2 y = \omega_0^2 E \cos \omega t$. Substituindo nesta equação a seguinte relação (2), podemos ver que (2) descreve corretamente o

deslocamento da massa no regime estacionário:

$$y = E \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (2)$$

O fator

$$y_m = E \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3)$$

é a amplitude do deslocamento e depende das freqüências ω_0 e ω . Vemos que y_m será infinito (não estamos tomando em conta amortecimento!) quando $\omega = \omega_0$. (Quando a freqüência ω da força aplicada é igual a ω_0 , dizemos que há *ressonância de amplitude*.)

Esta *ressonância* não pode, em realidade, suceder, já que não existe oscilação real sem atrito. Mas sí podem resultar amplitudes o suficientemente grandes para destruir o oscilador. Isso significa, em nosso caso, que a amplitude do movimento atingiria os limites da mola presa à massa. Diz-se que Caruso podia destruir um copo para vinho excitando o copo com sua voz a oscilações forçadas. Para quebrar dessa forma um copo, um cálculo mostra que o cantor deve ser capaz de produzir durante 2 até 3 segundos um som, com a freqüência natural do copo, com uma intensidade sonora de 140dB -e a freqüência do som deve variar no máximo em 1Hz!

6.4.2 Oscilações forçadas amortecidas

Agora introduziremos o amortecimento nas expressões de vibração forçada. Nossa equação básica será (utilizamos na segunda lei de Newton x em vez de y)

$$mx'' + bx' + kx = F_0 \cos \omega t \quad (4)$$

A função $F(t) = F_0 \cos \omega t$ representa a força aplicada que consideramos sendo harmônica, ω é a freqüência de excitação em radianos por segundo. (O entendimento da análise associada a forças harmônicas é um primeiro passo necessário no estudo de formas mais complexas. Confira a seção 6.1.2, onde falamos sobre a solução de uma equação diferencial homogênea (onde o lado direito é igualado a zero). Veja também o caso do oscilador subamortecido na seção 6.2.1.)

Na figura 6.4-1 vemos um corpo de massa m que se move sobre um plano, sujeito a três forças: uma força de *atrito* $-bx'$, opondo-se ao movimento (se $b > 0$); uma força de *restauração* $-kx$ e uma força *aplicada* $F(t)$.

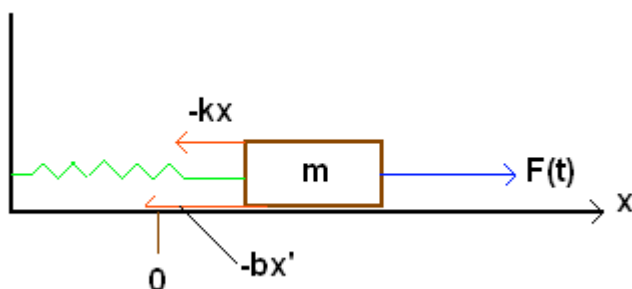


Figura 6.4-1

(Nosso problema tem um paralelo em teoria dos circuitos elétricos, ou seja, o representado pela equação diferencial de um circuito em série

$$L i(t)'' + R i(t)' + 1/C i(t) = F(t), \quad (5)$$

onde L é a indutância, R a resistência, C a capacitância, e $F(t)$ a derivada em relação ao tempo da força eletromotriz aplicada. Esta equação possui a mesma forma que a equação para o sistema mecânico. Assim, o comportamento do circuito elétrico pode ser usado para prever o comportamento do sistema mecânico. A corrente elétrica corresponde à velocidade e a carga é o paralelo à amplitude de deslocamento.)

A solução geral da equação não-homogênea (4) é a soma da solução geral da equação homogênea (chama-se também de solução *complementar* x_c) com uma solução particular x_p da equação completa (4). Para o caso de um amortecimento débil (subamortecido) encontramos na seção 6.2.2, Eq. (8), a solução complementar

$$x_c(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega't + \varphi). \quad (6)$$

Nós vamos considerar nesta seção somente sistemas subamortecidos.

Para encontrar *qualquer* solução da equação completa (não-homogênea), Lagrange há desenvolvido o método de variação dos constantes. Poderíamos resolver a equação (4) pela técnica de Lagrange, mas em vez disso, utilizemos nossa intuição física. Parece lógico que a massa oscilará com a frequência angular ω da força aplicada. Assim, tentaremos, como uma possível solução da Eq. (4), uma expressão da forma

$$x_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (7)$$

x_p = solução particular. (Em alemão chama-se uma *solução tentativa* um "Ansatz". Este termo utiliza-se também em outras línguas.)

Para testar o Ansatz (7), calculamos as duas primeiras derivadas e as substituímos na equação (4). Obteremos, assim, a seguinte expressão:

$$(-A\omega^2 - 2\gamma B\omega + \omega_0^2 A) \sin \omega t + (-B\omega^2 + 2\gamma A\omega + \omega_0^2 B) \cos \omega t = F_0 \cos \omega t / m. \quad (8)$$

Esta equação deve ser válida para todos os tempos t . Mas, isso só pode ser possível, se termos

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A - (2\gamma\omega) B = 0 \text{ e } (2\gamma\omega) A + (\omega_0^2 - \omega^2) B = F_0/m.$$

Este sistema de duas equações pode ser resolvido pela regra de Cramer, dando para A e B as seguintes expressões:

$$A = \frac{2\gamma\omega F_0 / m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (9)$$

$$B = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2) / m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (10)$$

Agora levamos a Eq.(7) na forma

$$x_p = A_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (11)$$

com

$$A_0 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2}} \quad (12)$$

$$\text{tg} \theta = \frac{\omega b}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (13)$$

A solução completa $x = x_c + x_p$ da equação (4) do movimento é, então, determinada:

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (14)$$

Esta equação representa a superposição de dois movimentos. O primeiro termo descreve uma oscilação amortecida da frequência angular

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}, \quad (15)$$

o segundo termo é a equação de um movimento harmônico com amplitude constante e com frequência ω .

Depois de um período breve, o movimento amortecido (movimento *transitório*) desaparece e só permanece um movimento com amplitude constante (movimento *estacionário*). Ou seja, o oscilador forçado move-se finalmente não com sua frequência natural ω_0 , mas sim com a frequência ω da força externa que atua sobre ele.

Devido ao amortecimento, a oscilação estacionária (forçada) tem uma defasagem em relação à força aplicada. O ângulo de fase, θ , dado pela Eq.(13), pode variar de 0 a π e representa a parcela de um ciclo pela qual a resposta x_p está atrasada em relação à função de excitação $F(t)$. Da seção 6.2.1 sabemos que $b := 2m\gamma$, onde γ é o fator do atrito e b é o coeficiente de arraste (ou a constante de amortecimento).

Para $\gamma = 0$, temos outra vez a equação (2) do começo de esta seção.

A Fig.: 6.4-2 mostra um exemplo para a Eq. (12). A fase transitória faz-se notar até quase 15 s. Depois de 15 s temos o regime permanente (estacionário).

- `reset()://Vibração forçada`
`b:=0.5:m:=1:w:=2.5:F0:=30:`
`k:=40:x0:=1:v0:=10:`
`w0:=sqrt(k/m):`
`g:=b/(2*m):`
`w1:=sqrt(w0^2-g^2):`
`w2:=w0^2-w^2:`

```

C:=sqrt(x0^2+(v0+g*x0)/w1)^2)//seção 6.2.2, Eq. (10)
phi:=-arctan((v0+g*x0)/(x0*w1))//Eq. (11)
A:=F0/sqrt(m^2*w2^2+b^2*w2^2):
theta:=arctan(2*g*w/w2):
x:=C*exp(-g*t)*cos(w1*t+phi)+A*cos(w*t-theta):
osci:=plot::Function2d(x,Color=RGB::Blue,
t=0..20,Mesh=2000):

plot(osci,ViewingBoxXRange=0..20,ViewingBoxYRange=-2..2,
AxesTitles=["t","x"])

```

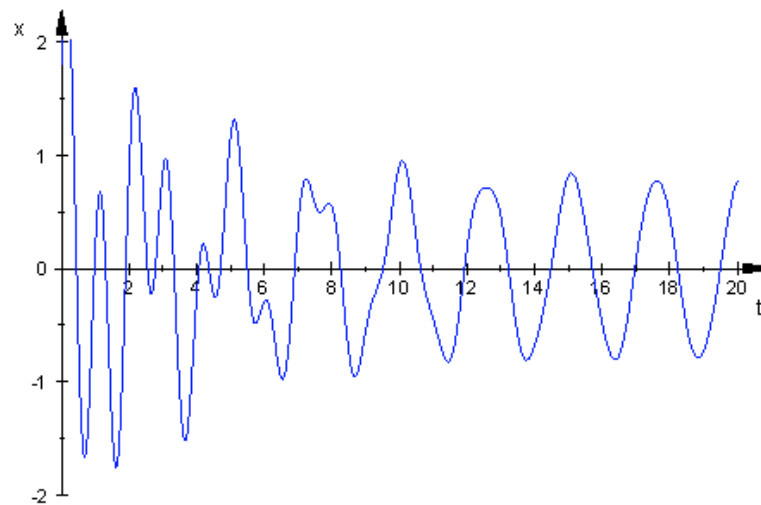


Fig.: 6.4-2

$F_0 = 0$ produz uma oscilação livre e amortecida que dura, mais ou menos, 20 segundos, veja Fig.: 6.4-3

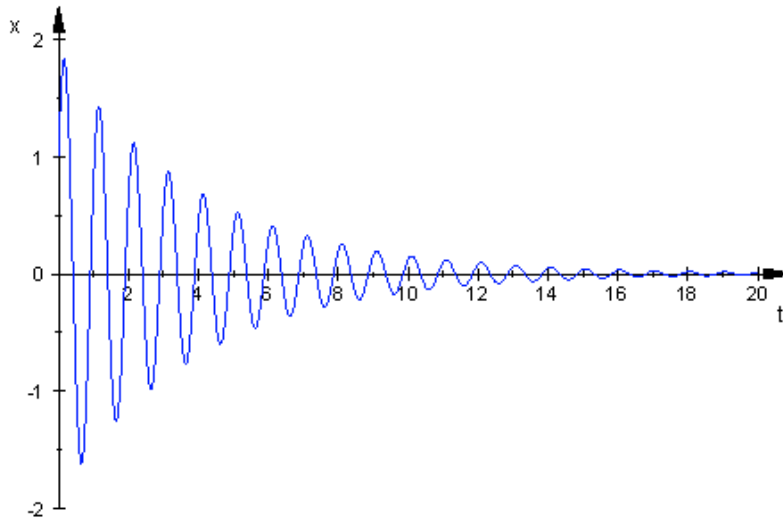


Fig.: 6.4-3

O movimento estacionário é independente das condições iniciais, ele depende somente dos parâmetros do sistema e, obviamente, da força aplicada.

O movimento transitório, porém, depende das condições iniciais. No caso da ressonância ($\omega \approx \omega_0$), a amplitude da vibração estacionária cresce, aproximadamente, até $A_r = F_0/(\omega_0 b)$.

É conveniente representar a razão adimensional entre amplitudes $M := A_0/(F_0/k)$ da Eq. (12) que também chama-se de *fator de amplificação* em função de ω/ω_0 .

(Para obter a relação

$$M := \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{2\gamma}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}} \quad (16)$$

dividimos numerador e denominador da Eq. (12) por k e substituímos k^2 por $m^2\omega_0^2$, já que $\omega_0^2 = k/m$. Logo introduzimos $2\gamma = b/m$. -Podemos simplificar ainda mais, usando $\zeta = \gamma/\omega_0$ -dzéta.

Dividindo Eq. (12) por F_0/k , proporciona, finalmente, a Eq. (16) para M .)

Na próxima figura 6.4-4 vemos um gráfico de M contra a razão de freqüências adimensional $f := \omega/\omega_0$ para diversos valores da constante de amortecimento b . Estas curvas chamam-se de *Curvas de ressonância*.

- `reset()://Curvas de ressonância`
`M:=1/sqrt((1-f^2)^2+4*z^2*f^2)//f:=w/wo`
`valores:=[0.1,0.2,0.3,0.5]//valores de zeta`
`A:=subs(M,z=valores[i])$ i=1..4:`
`plotfunc2d(A, f=0..2,Mesh=1000,GridVisible=TRUE,`
`AxisTitles=["w/wo","M"]):`

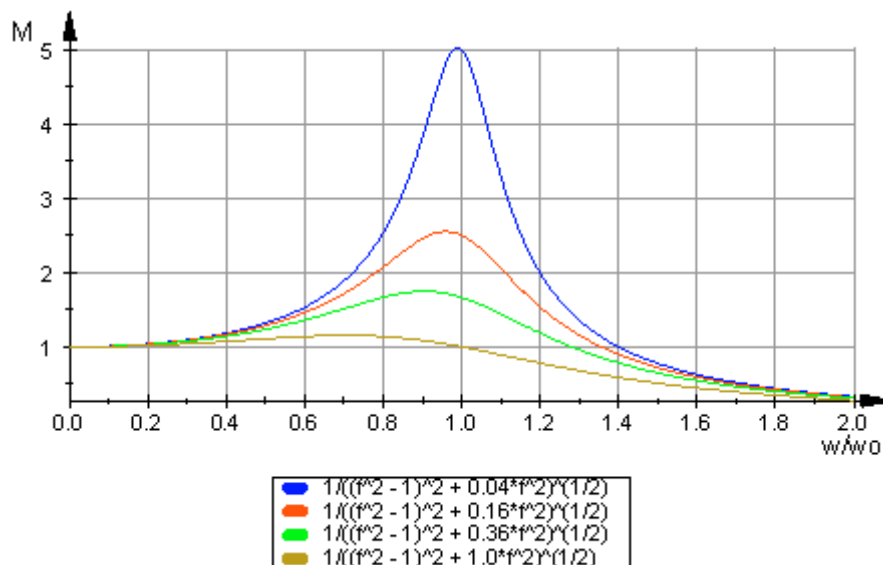


Fig.: 6.4-4

Esta família de curvas de ressonância mostra que um menor amortecimento produz um pico de ressonância mais alto e mais estreito. A amplitude do deslocamento do oscilador depende da freqüência angular ω da força de excitação. Observe que nos quatro casos a amplitude é -aproximadamente- máxima quando $\omega/\omega_0 = 1$, ou seja, quando a condição de ressonância é satisfeita.

A freqüência de ressonância é $\omega_r = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2}$ quando o oscilador é amortecido. Somente para $\gamma = 0$ temos $\omega_r = \omega_0$. Quando o amortecimento é muito pequeno, não há grande diferença entre ω_r e ω_0 . Para a velocidade e para a energia do oscilador temos sempre $\omega_r = \omega_0$. Este ponto discutiremos mais adiante.

6.4.3 Freqüência de Ressonância

Analisemos agora com mais detalhe a freqüência de ressonância. Primeiro estudamos a amplitude A_0 do deslocamento em função da freqüência ω , logo a da energia e da velocidade.

A amplitude A_0 , Eq. (12), é tanto maior quanto menor $\omega - \omega_0$. Mas, devido ao termo $r := 4\gamma^2\omega^2$, A_0 não pode atingir nunca um valor "infinito", ou seja, ela não pode aumentar sem limite. Este termo r de amortecimento tem um segundo efeito, ele faz com que o máximo da amplitude não suceda quando $\omega = \omega_0$, pois r mesmo é função de ω .

O máximo de A_0 ocorre quando o denominador

$$N := \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (17)$$

assume o valor mínimo.

Derivando N com respeito a ω e igualando a derivada $dN/d\omega$ a zero, obtemos para $\omega_{\max} := \omega_{\text{res,A}}$ a expressão

$$\omega_{\text{res,A}}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad (18)$$

Ou seja, $\omega_{\text{res,A}}$ é um pouco menor do ω_0 quando γ é pequeno, veja a figura 6.4-4. Desprezando o termo com γ , podemos, porém, dizer que a amplitude A_0 atinge para $\omega \approx \omega_0$ um valor máximo de $A_{\text{res}} \approx F_0/(\omega_0 b)$ como já afirmamos. A expressão exata veremos mais adiante.

É curioso observar que a velocidade e a energia do oscilador não são máximas para $\omega = \omega_{\text{res,A}}$.

No caso da energia cinética temos (compare também 6.2.4):

$$E_k = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\omega^2 F_0^2 \sin^2(\omega t - \theta)}{2m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} \quad (19)$$

E_k tem um máximo quando o seno é ± 1 . Neste caso, E_k é igual à energia total E

$$E = \frac{\omega^2 F_0^2}{2m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} \quad (20)$$

O máximo de E não coincide, em geral, com o mínimo do denominador, pois na Eq. (20) também o numerador contém o fator ω^2 .

De $dE/d\omega = 0$ obtemos para a frequência do máximo de E

$$\omega_{\text{res},E} = \omega_0 \quad (21)$$

O mesmo resultado obtemos para a velocidade. Portanto ocorre ressonância de energia (e velocidade) quando a frequência da força aplicada é igual à frequência natural do oscilador. O valor da energia é, no caso da ressonância, dado por

$$E_{\text{res}} = \frac{m F_0^2}{2 b^2} \quad (22)$$

O valor da amplitude do deslocamento é dado, no caso da ressonância, por

$$A_{\text{res}} = \frac{F_0}{b\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (23)$$

Quando o amortecimento é desprezível, temos outra vez $A_{\text{res}} \approx F_0/(b\omega_0)$.

Exemplo numérico:

Um oscilador forçado com $F = 10 \text{ N} \cdot \cos \omega t$ tem uma massa de $m = 0,1 \text{ kg}$. Sua frequência natural é de $\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$. O fator do atrito é $\gamma = 3 \text{ s}^{-1}$.

Determinar a amplitude do deslocamento e a frequência da ressonância.

Como mudam os resultados se $\gamma = 0,3 \text{ s}^{-1}$?

Solução:

$$\gamma = b/(2m); \quad \omega_{\text{res}, A} = (400\text{s}^{-2} - 2 \cdot 9\text{s}^{-2})^{1/2} = 19,54 \text{ s}^{-1}$$

$$A_{\text{res}} = 10\text{N}/[2m\gamma(400\text{s}^{-2} - 9 \text{s}^{-2})^{1/2}] = 0,843 \text{ m}$$

Para $\gamma = 0,3 \text{ s}^{-1}$ obtemos $\omega_{\text{res}, A} = 20 \text{ s}^{-1}$ e $A_{\text{res}} = 8,33 \text{ m}$.

A relação aproximada dá, também, $A_{\text{res}} \approx 10\text{N}/(2 \cdot 0,1\text{kg} \cdot 0,3\text{s}^{-1} \cdot 20\text{s}^{-1}) = 8,33 \text{ m}$.

Na Eq. (19) fica embutida a **velocidade** $v = dx_p/dt = -A_o \omega \text{ sen}(\omega t - \theta)$ do oscilador no regime permanente. A amplitude da velocidade é $V_o = \omega A_o$. Para a frequência da ressonância obtemos -como já foi dito- $\omega_{\text{res}, v} = \omega_o$, como no caso da energia. Podemos reescrever a Eq. $v = -A_o \omega \text{ sen}(\omega t - \theta)$ para obter $v = V_o \text{ cos}(\omega t - \theta + \pi/2)$.

Isso demonstra que a fase da velocidade está sempre avançada de 90° em relação à fase do deslocamento.

Definindo $\alpha = \theta - \pi/2$, podemos escrever

$$\text{tg}\alpha = -\frac{1}{\text{tg}\theta} = \frac{m(\omega^2 - \omega_o^2)}{\omega b} \quad (24)$$

Isso produz $v = V_o \text{ cos}(\omega t - \alpha)$. Daí vemos que a diferença em fase entre velocidade e força é α . Compare este resultado com a Eq. (13) para a fase do deslocamento!

Da Eq. (24) deduzimos que $\alpha = 0$ para $\omega = \omega_o$, ou seja, para esta frequência, a velocidade está em fase com a força aplicada.

6.4.4 Fase do deslocamento

A fase do deslocamento do oscilador está sempre atrasada de um ângulo θ em relação à força aplicada. Consideremos então a constante de fase θ que está sempre entre 0 e π , confira Eq. (13). Sabemos que $\text{tg}\theta = \text{sen}\theta/\text{cos}\theta$, onde $\text{sen}\theta \sim \gamma\omega$ e $\text{cos}\theta \sim \omega_o^2 - \omega^2$.

Para $\omega < \omega_o$, tem-se $\text{cos}\theta > 0$, e portanto $\theta < \pi/2$. Quando $\omega > \omega_o$, temos $\text{cos}\theta < 0$, ou seja, $\theta > \pi/2$. Quando $\omega = \omega_o$, vemos da Eq. (13) que o oscilador tem uma fase atrasada de $\pi/2$ em relação à força.

Neste caso, o deslocamento, veja Eq. (11), vem dada pela expressão

$$x_{p,r} = F_0/(b\omega_0) \cos(\omega_0 t - \pi/2) = F_0/(b\omega_0) \sin(\omega_0 t) \quad (25)$$

Portanto, nesta frequência o oscilador oscila como se a força de restauração (lei de Hooke) de sua mola estivesse ausente e seu movimento fosse influenciado somente pela força de atrito e, naturalmente, pela força da excitação aplicada.

É interessante observar que para frequências muito grandes, $\omega \gg \omega_0$, a oscilação da massa é defasada em relação à força de um ângulo de π radianos.

A Fig. 6.4-5 mostra como o ângulo de fase θ varia com a razão de frequências para diversos valores da taxa de amortecimento ζ (dzéta).

No programa usamos a Eq. (13), mas temos tomar em conta que a função $y = \arctg x$ tem como contradomínio a restrição $]-\pi/2, +\pi/2[$. Os demais valores de y obtemos somando $\pm k \pi$ ao valor principal.

Tomamos conta dessa particularidade pelo seguinte procedimento

```
T:=proc(f)//f:=w/wo
begin
if f<1 then arctan(2*z*f/(1-f^2))
elif f>1 then arctan(2*z*f/(1-f^2))+PI
end_if
end_proc:
```

Vem aqui o programa completo:

- ```
reset()//fase segun Eq. (11)
T:=proc(f)//f:=w/wo
begin
if f<1 then arctan(2*z*f/(1-f^2))
elif f>1 then arctan(2*z*f/(1-f^2))+PI
end_if
end_proc:

valores:=[0.1,0.2,0.3,0.5]//valores de dzéta
Teth:=subs(T,z=valores[i])$ i=1..4:
plotfunc2d(Teth, f=0..3,Mesh=1000,GridVisible=TRUE,
AxesTitles=["w/wo","theta/rad"]):
```

Mais econômica é a função `piecewise` que já usamos anteriormente (conferir 5.3.1):

- ```

reset()://fase do deslocamento segun Eq. (13)
T:=piecewise ([f<=1,arctan(2*z*f/(1-f^2))],
[f>1,arctan(2*z*f/(1-f^2))+PI]):
valores:=[0.1,0.2,0.3,0.5]://valores de dzéta
Tet:=subs(T,z=valores[i])$ i=1..4:
plotfunc2d(Tet, f=0..3,Mesh=1000,GridVisible=TRUE,
AxesTitles=["w/wo","theta/rad"]):

```

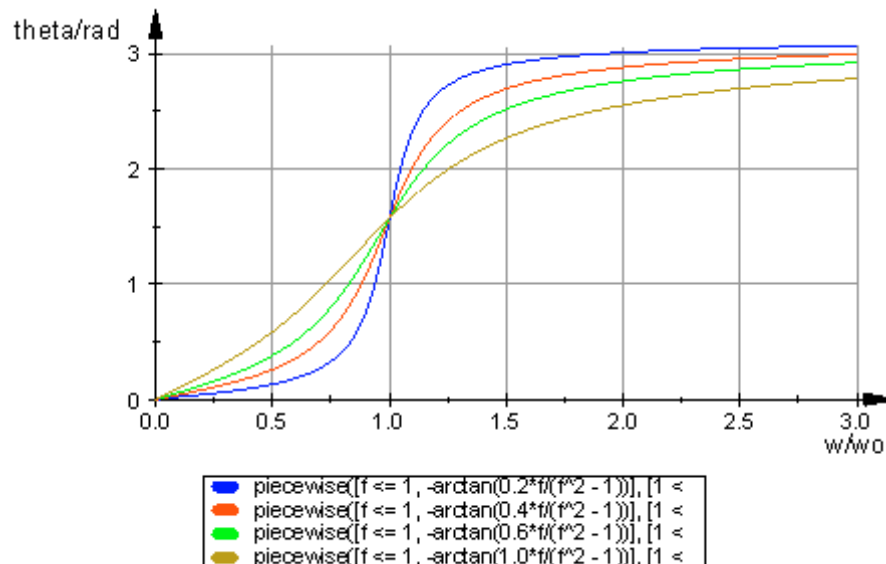


Fig.: 6.4-5

Observe que o valor de θ , quando $\omega/\omega_0 = 1$, é $\pi/2 = 90^\circ$ para todos os valores de ζ .

A coordenada do deslocamento x do oscilador fica, nesse caso, 90° fora de fase com a força que excita o sistema. Uma consequência disso é que a potência transferida ao oscilador é máxima.

Este fenômeno podemos entender melhor se voltamos à velocidade, onde vimos que ela está *em fase* com a força aplicada quando $\omega = \omega_0$. O trabalho efetuado sobre o oscilador pela força aplicada é $F \cdot v$ e é sempre positivo já que F e v estão em fase. Portanto podemos afirmar que na ressonância da velocidade (ou da energia) é máxima a transferência de energia da força aplicada ao oscilador forçado.

6.4.5 Potência transferida ao oscilador

Quando se calcula a **potência média** absorvida pelo sistema, observa-se também uma ressonância para $\omega = \omega_0$. Investiguemos agora este aspecto.

O trabalho exercido pela força externa $F(t)$ no deslocamento dx do oscilador é dado por $F(t) dx$. A potência entregada pela força $F(t)$ ao oscilador é $P(t) = F(t) \cdot dx/dt = F(t) v$.

O valor médio temporal da potência absorvida pelo oscilador é dado por (confira 6.2.4):

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle &= \int F(t)x'(t)dt / \int dt & (26) \\ &= \int F_0 \cos \omega t [-A_0 \omega \sin(\omega t - \theta)] dt / \int dt \end{aligned}$$

Com $\sin(\omega t - \theta) = \sin \omega t \cos \theta - \cos \omega t \sin \theta$ obtemos

$$\langle P \rangle = \int (-1/2 \cdot F_0 A_0 \omega \cos \theta \sin 2\omega t + F_0 A_0 \omega \sin \theta \cos^2 \omega t) dt / \int dt \quad (27)$$

O valor médio temporal (é a média em um ciclo) de $\sin 2\omega t$ é zero e o de $\cos^2 \omega t$ é $1/2$, pois

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}, \quad (28)$$

onde $T = 2\pi/\omega$.

Então temos para a absorção de potência em um ciclo -usando A_0 da Eq. (12)- a seguinte expressão:

$$\langle P \rangle = \frac{\frac{1}{2} F_0^2 \omega^2 b}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2} \quad (29)$$

Também o gráfico da Eq. (29), Fig. 6.4-6, é uma típica curva de ressonância como as curvas da Fig. 6.4-4, também com um máximo em $\omega = \omega_0$. O valor máximo da potência transferida será

$$\langle P \rangle_{\max} = F_0^2 / (2b) \quad (30)$$

Curvas de ressonância de potência:

- ```

F0:=10:m:=0.1:w0:=5://Ressonância de potência
pot:=0.5*F0^2*w^2*b/(m^2*(w^2-w0^2)^2+w^2*b^2):
valores:=[0.1,0.3,0.5]://valores de b
P:=subs(pot,b=valores[i])$ i=1..3:
plotfunc2d(P, w=0..10,Mesh=1000,GridVisible=TRUE,
AxesTitles=["w/s-1", "<P>/W"]):

```

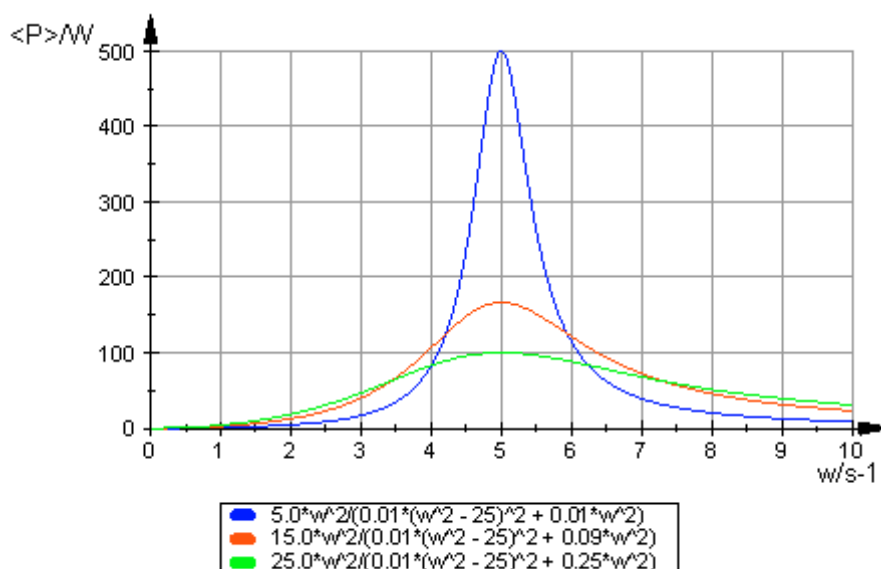


Fig. 6.4-6

A Fig. 6.4-6 mostra um gráfico da função  $\langle P(\omega) \rangle$  para três valores de  $b$ . Nota-se que o pico de ressonância é mais estreito e intenso para menores valores de  $b = 2m\gamma$ .

Nas frequências  $\omega_1 = (\omega_0^2 + \gamma^2)^{1/2} - \gamma$  e  $\omega_2 = (\omega_0^2 + \gamma^2)^{1/2} + \gamma$ , a função  $\langle P(\omega) \rangle$  cai para a metade do valor do pico. Portanto, a largura  $\Delta\omega$  a meia altura do pico da curva de ressonância da potência é igual a  $\omega_2 - \omega_1 = 2\gamma$ .

Em 6.2.4 foi introduzido o *fator de mérito* (ou qualidade)  $Q = \omega_0 / (2\gamma) = \omega_0 \tau$  do oscilador. Agora podemos apresentar uma nova definição de Q, utilizando a largura a meia altura do pico da curva  $\langle P(\omega) \rangle$ :

$$Q := \omega_0 / \Delta\omega \quad (31)$$

Para o oscilador com  $b = 0,1 \text{ kg/s}$  da figura 6.4-5 obtemos os seguintes resultados:

$$\omega_1 = (25 \text{ s}^{-2} + 0,05 \text{ s}^{-2})^{1/2} - 0,2236 \text{ s}^{-1} = 4,7814 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 = 5,2286 \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 0,4472 \text{ s}^{-1} (= 2\gamma)$$

O fator de qualidade Q é 11,18.

A nova definição de Q oferece um caminho prático para a medição do fator de qualidade, pois  $\omega_0$  e  $\Delta\omega$  podem ser determinados, normalmente, sem grandes dificuldades.

## 6.4.6 Tratamento com Números complexos

O tratamento matemático do movimento oscilatório forçado torna-se muito mais simples com o uso de números complexos. (Já na seção 3.6.3 fizemos uso destes números na descrição de rotações.) Em 3.6.4 explicamos os comandos de MuPAD no tratamento de números complexos. Veja também a seção 3.7.2, onde foram dados exemplos para o uso de números complexos na descrição da mecânica num carrossel.

Considere, outra vez, nossa Eq. (4)

$$m\ddot{x} + kx + b\dot{x}' = F_0 \cos \omega t \quad (32)$$

Para a solução com números complexos, temos que acrescentar a equação - multiplicada por i-

$$m\ddot{y} + ky + by' = F_0 \sin \omega t \quad (33)$$



para obter 
$$mz'' + kz + bz' = F_0 e^{i\omega t}, \quad (34)$$

onde  $z = x + i y$ . Para resolver a equação (32), resolvemos primeiro a equação (34), que é normalmente de solução mais fácil, e no final, tomamos a parte real da solução encontrada, o que é que nos interessa.

(Quando a força aplicada é dada por  $F_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , temos que escrever, no lado direito,  $F_0 e^{i\omega t}$ , onde a amplitude é  $F_0 = F_0 e^{i\alpha}$ .)

Supomos que a solução seja do tipo 
$$z = z_0 e^{i\omega t} \quad (35).$$

Substituindo esta relação na Eq.(34), obtém-se

$$z_0 = F_0 / (k - m\omega^2 + i b\omega) = F_0 / (m(\omega_0^2 - \omega^2) + i b\omega) \quad (36)$$

(A derivada de  $z = z_0 e^{i\omega t}$  é  $dz/dt = i\omega z_0 e^{i\omega t}$ , a segunda derivada é  $z'' = -\omega^2 z_0 e^{i\omega t}$ )

O denominador de  $z_0$  podemos expressar -como toda quantidade complexa- em forma exponencial:

$$m(\omega_0^2 - \omega^2) + i b\omega = [m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2]^{1/2} e^{i\theta}, \quad (37)$$

onde 
$$\theta = \arctan(b\omega / (m(\omega_0^2 - \omega^2))). \quad (38)$$

Obtemos, assim,

$$A_0 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2}} \quad (38)$$

Com esse resultado podemos escrever

$$z_0 = A_0 e^{-i\theta} \quad (39)$$

e a Eq. (35) se torna 
$$z = A_0 e^{i(\omega t - \theta)} \quad (40)$$

A solução procurada é a parte real da Eq. (40), ou seja

$$x = A_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (41)$$

Para obter a solução geral da Eq. (4), temos que acrescentar a solução geral da equação homogênea  $mx'' + kx + bx' = 0$ . Esta solução não interessa, normalmente, pois ela descreve uma oscilação que desaparece em pouco tempo. A oscilação que perdura é descrita por Eq. (41).

