

6.3 Movimento oscilatório

Esta seção dedicaremos ao estudo de alguns exemplos importantes de vibrações. Primeiro consideramos outro exemplo de vibração livre não-amortecida. Depois analisamos as oscilações amortecidas de uma coluna de água num manômetro de **tubo U**. Trata-se neste caso de oscilações não-lineares. Logo investigamos um oscilador não-linear do tipo x^3 .

Aliás, a maioria dos sistemas naturais são **não-lineares** e o comportamento deles é descrito por equações diferenciais ordinárias **não lineares**.

Nos parágrafos 6.3.4 e 6.3.5 tratamos do **pêndulo de torção** e do **pêndulo físico**.

6.3.1 Oscilações livres de um sistema massa-mola em posição vertical

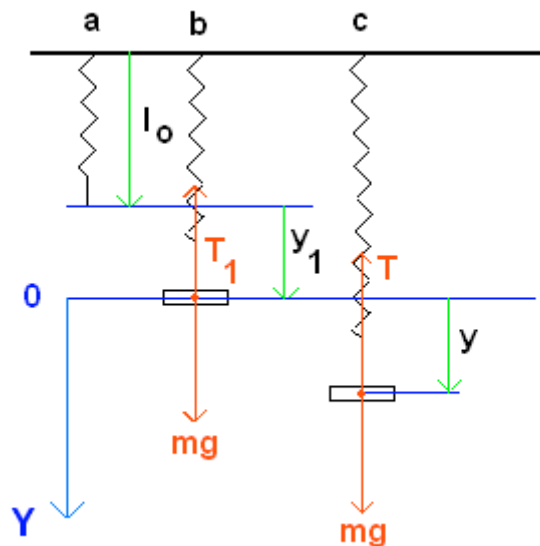


Fig.: 6.3-1

A figura mostra um sistema massa-mola vertical em três situações. No caso **a** temos a mola sem massa com comprimento l_0 . A representação **b** é a posição de equilíbrio que envolve uma deflexão não-nula da mola y_1 . O deslocamento y é medido a partir da posição de equilíbrio. \mathbf{T} é a força da mola sobre a massa m , mg é o peso da massa (= força que a Terra exerce sobre m).

Na **posição do equilíbrio** temos $mg = -\mathbf{T}_1 = -(-ky_1\mathbf{j}) = ky_1\mathbf{j}$, ou escalarmente:

$$mg = ky_1 \quad (1)$$

Para uma deflexão arbitrária, **posição c**, a segunda lei de Newton fornece

$$-k(y+y_1) + mg = my'' \quad (2)$$

Eq. (1) junto com Eq. (2) fornecem a equação do movimento

$$y'' + \omega_0^2 y = 0 \quad (3)$$

onde $\omega_0^2 := k/m$ e k = rigidez ou constante de mola. A equação (3) é idêntica à Eq. (6) da seção 6.1.2. Como solução de (3) podemos tomar da seção 6.1.2 a forma (9) ou (10)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (4)$$

$$\text{ou } x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5)$$

Para a constante B obteremos de $x'(0) = v_0$ o valor $B = v_0/\omega_0$.

(Os valores numéricos são: $l_0 = 20$ cm, $m = 1.2$ kg, $y_1 = 8$ cm. Os valores iniciais são $y(0) = y_0 = 3$ cm e $v_0 = 0.1$ m/s.)

Há duas forças conservativas que atuam sobre a massa oscilante: a força gravitacional e a força elástica da mola. A energia potencial deve conter também duas partes. Podemos, arbitrariamente, escolher como nível de referência para E_p a linha definida pela mola sem massa na posição **a**.

A energia potencial gravitacional seria $E_{p,1} = -mg(y_1 + y)$ e a da força elástica será $E_{p,2} = k(y_1 + y)^2/2$. (As derivadas negativas destas expressões fornecem as forças!)

A energia potencial total é

$$E_p = E_{p,1} + E_{p,2} = ky^2/2 + (ky_1 - mg)y + ky_1^2/2 - mgy_1 \quad (6)$$

Substituindo Eq. (1) ficamos com $E_p = ky^2/2 + E_p(y_1)$. (7)

A constante aditiva $E_p(y_1)$ não tem significado físico e pode ser igualada a zero.

Para distender a mola de uma distância y , sem aceleração, aplicamos a força $F = ky$. O trabalho realizado é

$$W = \int_0^y F(y') dy' = \int_0^y ky' dy' = \frac{1}{2} ky^2 \quad (8)$$

Este é o trabalho realizado para qualquer deslocamento y . Introduzindo os valores numéricos para y e k , obtemos o trabalho requerido para distender a mola por 3 cm, que é 0.0661 J. (A constante de mola é $k = mg/y_1 = 1.2\text{kg} \cdot 9.8\text{ms}^{-2} / 0.08\text{m} = 147 \text{ N/m}$.)

O cálculo do trabalho foi fácil porque conhecíamos a força como função da posição ($F = ky$). Geralmente conhecemos a força como função do tempo e não podemos calcular o trabalho diretamente por $W = \int F dy$. Neste caso determinamos primeiro o deslocamento como função do tempo, usando a equação do movimento, $F = ma$.

Consideremos um

Exemplo:

Uma força $F = 15t \text{ N}$ age sobre uma massa de 5 kg. Se a massa parte do repouso, acha o trabalho realizado pela força durante os primeiros 5 s. x será a variável da posição.

A força é uma função do tempo, portanto calculamos primeiro também o deslocamento como função do tempo.

Sabemos que $v = v_0 + \int_{0..t} a \cdot dt = 0 + \int_{0..t} 3t \cdot dt$, já que $a = F/m = 15t \text{ N} / 5 \text{ kg} = 3t \text{ ms}^{-2}$

Integrando, obtemos $v = 3t^2/2$. Usando $x = x_0 + \int_{0..t} v \cdot dt = t^3/2$.

Resolvendo para t , obteremos $t = (2x)^{1/3}$, e a força em termos da posição fica

$F = 15 t = 15 \cdot 2^{1/3} \cdot x^{1/3}$. Usando, agora, $W = \int_{0..x} F \cdot dx$, obteremos $W = 15 \cdot 2^{1/3} \cdot 3x^{4/3} / 4$ ou seja $W \approx 14,174 \cdot x^{4/3}$.

Depois de $t = 5\text{s}$ temos $x = 0.5 \cdot 5^3 \text{ m} = 62,5 \text{ m}$. O trabalho é $W \approx 14,174 \cdot (62,5)^{4/3} \text{ J} = 3515,6 \text{ J}$.

Estes cálculos podemos fazer com MuPAD, por exemplo assim:

- `reset() :`
- `v:=int(3*t,t) :`
- `x:=int(%,t) :`
- `solve(x=X,t) :`
- `t:= %[2] ;`
- `F:=15*% :`
- `W:=int(%,X) :`
- `X:=5^3/2 :`
- `subs(W,X=%) :`
- `float(%)`

Na maioria dos casos é difícil exprimir a força como função da posição. Podemos, em tal caso, proceder da seguinte maneira: de $x = t^3/2$ temos $dx = 3t^2/2 \cdot dt$. Usando isso e $F = 15t$, podemos escrever

$W = \int_{0..t} 15t \cdot 1,5t^2 dt = 5,625 t^4$ J, e se substituirmos $t = 5s$, resulta $W = 3515,625$ J, em concordância com o resultado anterior.

O período $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi (m/k)^{1/2}$ e a frequência $f = 1/T$ dependem só da massa do oscilador e da constante k da mola. Eles são independentes das condições iniciais. Isso significa que estes parâmetros são somente determinados pela força elástica e que não dependem de outras influências externas. No caso da interação gravitacional observamos que o período de um planeta depende do raio da trajetória, ou seja de uma condição inicial.

6.3.2 Oscilações amortecidas de uma coluna de água num manômetro de tubo U.

A equação do movimento oscilatório de uma coluna de água num **tubo U** deve conter o diâmetro D do tubo, o comprimento L da coluna, um fator de perturbação Z devido aos dois cotovelos de 90 graus e a viscosidade cinemática V do líquido. Nos textos da dinâmica dos líquidos podemos encontrar o desenvolvimento da seguinte equação do movimento, veja p. ex. W. Kalide, *Aufgabensammlung zur techn. Strömungslehre*, Hanser Vlg. München 1937.

$$x'' + 64V/D^2 \cdot x' - P/2L \cdot (x')^2 \cdot \text{sign } x' + 2g/L \cdot x = 0 \quad (9)$$

A função sign toma conta da mudança do sinal da velocidade. Para os parâmetros usamos $L = 1,5$ m, $D = 0,02$ m, $P = 0,36$; $V = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (água de 20°C). Usando estes valores, podemos reescrever a Eq. (9):

$$x'' + bx' - ax'^2 \cdot \text{sign } x' + kx = 0, \quad (10)$$

onde $a = 0,12$; $b = 0,16$; $c = 13,08$.

- `reset()://veja pêndulo simples em 3.2`
`a:=0.12:b:=0.16:k:=13.08:`
`x0:=0.1:v0:=0:`
`F:={x'(t)+b*x'(t)-a*x'(t)^2*sign(x'(t))+k*x(t)=0,`
`x'(0)=v0,x(0)=x0}:`
`fields:={x(t),x'(t)}:`
`f:=numeric::ode2vectorfield(F,fields):`
`X:=numeric::odesolve2(f):`
`dt:=0.1:imax:=200:`
`plot(`
`plot::Line2d([t-dt,X(t-dt)[1]],[t,X(t)[1]],`
`Color=RGB::Blue,VisibleAfter = t)`
`$ t in [i*dt $ i=1..imax])`

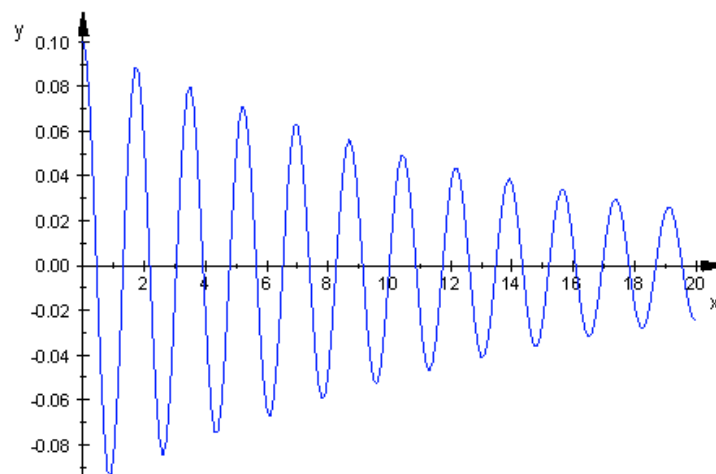


Fig.: 6.3-2

Eq. (10) é de segunda ordem e de segundo grau e a resolvemos numericamente. (A ordem da equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que ocorre na equação. Grau é o valor do expoente para a derivada mais alta da equação, quando a equação tem a forma de um polinômio na função incógnita e em suas derivadas.)

Se analisamos a solução de nosso modelo matemático para as oscilações da coluna de água no tubo U, parece que o amortecimento é pequeno de mais e que o modelo não pode ser aceito.

6.3.3 Oscilador anarmônico

A figura 6.3-3 mostra uma massa m que pode deslizar sem atrito sobre um trilho fixo. O corpo está ligado por uma mola a uma barra que se encontra numa distância l_0 do trilho. Também a mola tem o comprimento l_0 quando não fica esticada.

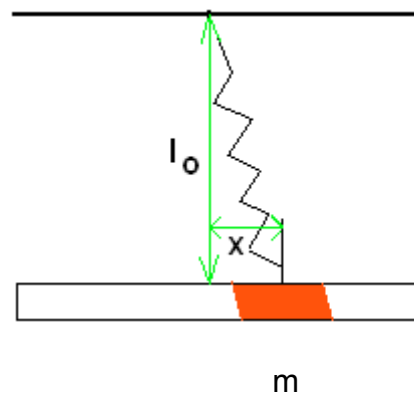


Fig.: 6.3-3

Quando o corpo se encontra deslocado pela distância x a mola se estende por

$$(l_0^2 + x^2)^{1/2} - l_0 = l_0 \left((1 + (x/l_0)^2)^{1/2} - 1 \right)$$

Para um deslocamento x pequeno podemos fazer $(x/l_0)^2 \ll 1$ e substituir a raiz por $1 + 0.5 (x/l_0)^2$. Com esta aproximação a força da mola sobre o corpo deslizando será

$$F = k x^2 / (2l_0) \quad (11)$$

Falta a componente da força elástica na direção horizontal $F_x = -F \cos \varphi$. (O sinal menos indica que a componente da força produzida pela mola é dirigida para a esquerda quando o corpo está deslocado para a direita.

Temos $\cos \varphi = x / (l_0^2 + x^2)^{1/2} \approx x / l_0$. A força de restituição é proporcional à terceira potência do deslocamento x :

$$F_x = -k / (2l_0^2) \cdot x^3 \quad (12)$$

Introduzindo a abreviatura $c := k / (2l_0^2)$, obtemos a seguinte equação do movimento

$$x'' = -c/m \cdot x^3 \quad (13)$$

Este oscilador- x^3 foi descrito e realizado experimentalmente por A. Cromer, veja o seu artigo *The x^3 Oscillator*, *The Physics Teacher* 30(1992) 249.

Interessante é o fato de o período deste oscilador anarmônico ser inversamente proporcional à amplitude, ou seja de T aumentar com A decaindo. Isso pode ser explicado pelo fato de F_x ser muito pequeno na proximidade do ponto de equilíbrio e que tem como consequência que o período é grande. Para deslocamentos grandes vemos que φ diminui e F_x crescer, o que resulta num período pequeno.

Já em 4.7.3 encontramos um oscilador anarmônico (compare Fig.: 4.7-4 do potencial de Lennard-Jones.). O movimento harmônico simples é provocado por uma força $F = -kx$, correspondente a uma energia potencial $E_p = k x^2 / 2$, quando x é medido a partir da posição de equilíbrio O . Quando a posição de equilíbrio não está na origem, mas em x_0 , como na figura 4.7-4, devemos escrever $E_p = k(x-x_0)^2 / 2$.

Consideremos agora uma partícula que efetua um movimento oscilatório **anarmônico** ao longo do eixo- x . A energia potencial é

$$E_p = ax^2 - bx^3 \quad (14)$$

A força que atua sobre a partícula será

$$\mathbf{F} = -dE_p/dx \cdot \mathbf{i} = (-2ax + 3bx^2) \cdot \mathbf{i} \quad (15)$$

ou

$$\mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = -2ax + 3bx^2 \quad (16)$$

A partícula fica em equilíbrio quando $F = 0$, ou seja quando $-2ax + 3bx^2 = 0$. Isso é o caso para $x_{11} = 0$ ou $x_{12} = 2a/3b$. Já que E_p tem em x_{11} um mínimo, a origem será o ponto do mínimo estável. x_{12} é um lugar de equilíbrio instável. No ponto máximo temos $E_p = 4a^3/(27b^3) := E_{crit}$

Se a energia total for $E (=0,4)$, a partícula oscilará entre as posições $x_1 (= -0,26)$ e $x_2 (= 0,4)$. Se a energia não for muito alta, a amplitude das oscilações será pequena e a força será elástica: $F = -kx$ com $k = d^2E_p/dx^2 = 2a$.

Com essa aproximação obtemos praticamente oscilações harmônicas simples com o período

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(m/2a)^{1/2} \quad (17)$$

- $a := 4.5 : b := 5 :$
 $E_p := a * x^2 - b * x^3 :$
 $E_{p0} := a * x^2 :$
 $E_{tot} := 0.4 :$
 $F := -2 * a * x + 3 * b * x^2 :$
`plotfunc2d(Ep, Etot, XRange=-0.5..0.8, YRange=-0.5..0.8,`
`Title="x1", TitlePosition=[-0.24, 0.41])`

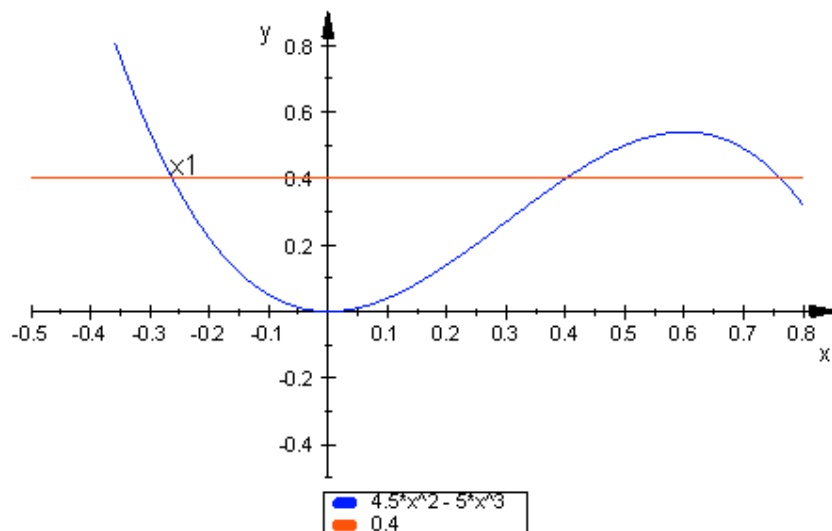


Fig.: 6.3-4

Se não aceitamos a aproximação de pequenas oscilações, a frequência dependerá do valor da energia.

Na seguinte figura vemos também a força e a energia potencial dum oscilador harmônico, que pode ser usada para baixas energias. Em muitos casos, essa aproximação é aceitável, mas, para altas energias, temos que calcular a frequência usando um método perturbativo ou aplicar o teorema de Taylor.

- `a:=4.5:b:=5:`
`Ep:=a*x^2-b*x^3:`
`Ep0:=a*x^2:`
`F:=-2*a*x+3*b*x^2://força`
`plotfunc2d(Ep,Ep0,F,XRange=-0.5..0.8,YRange=-1.5..0.8,`
`Title="F",TitlePosition=[0.4,-1.2])`

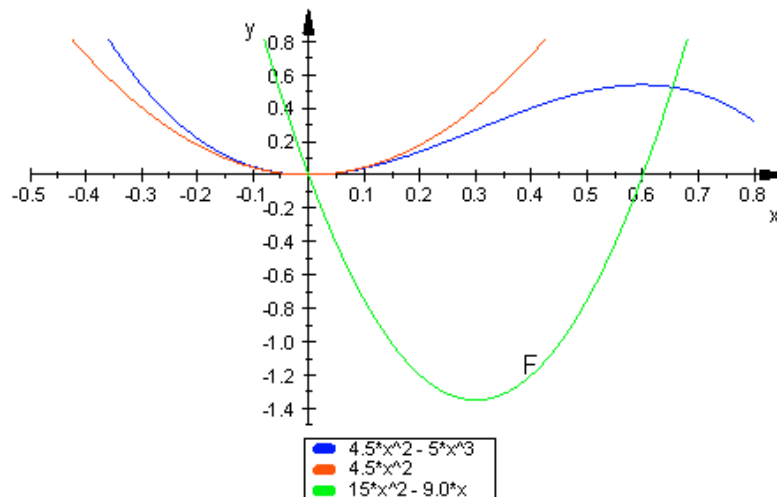


Fig.: 6.3-5

A força é positiva no exterior do intervalo $[0, 2a/3b] = [0, 0.6]$. Se a partícula entrar na região $x > 0.6$, então vai ser impelida ao infinito.

6.3.4 Pêndulo de torção

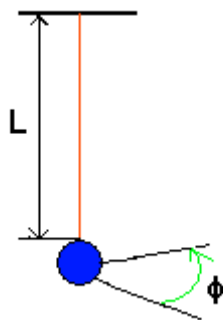


Fig.: 6.3-6

A figura mostra uma *versão angular* de um oscilador harmônico simples linear. Uma esfera é suspensa por um fio fino e longo (1m) de aço. A outra extremidade do fio é fixa num suporte.

Se girarmos a esfera a partir da sua posição de repouso e a soltarmos, ela oscilará em torno de seu eixo de suspensão em um movimento harmônico simples angular (MHS angular). Girando a esfera, torcemos o fio de suspensão e ela armazena energia potencial como faz uma mola ao ser deformada. A torção no fio fornece um torque restaurador dado por

$$M = - D\phi \quad (18)$$

(veja 4.2.1 onde foi introduzido o torque **M**.)

A constante D é a constante de torção que depende do comprimento, do diâmetro e do material do fio de suspensão:

$$D = 4r^4/(2L) \cdot G \quad (19)$$

G = módulo de torção (constante do material).

A Eq. (18) é a equivalente angular da Eq. linear $F = -kx$ (lei de Hooke).

Em vez de $ma = -kx$ escrevemos agora $I \cdot \phi'' = - D\phi$, onde I é o momento de inércia da esfera em relação ao eixo definido pelo fio, veja 4.2.2. ϕ'' = aceleração angular.

Sendo Eq. (18) a forma angular da lei de Hooke, podemos suspeitar que a equação equivalente a $T = 2\pi(m/k)^{1/2}$ será

$$T = 2\pi (I/D)^{1/2} \quad (20)$$

Eq. (20) é a equação correta para o período do pêndulo de torção sem amortecimento. Isso segue da solução da equação $I\varphi'' = -D\varphi$ que reza $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$ com

$$\omega_0 = (D/I)^{1/2} = 2\pi/T \quad (20a)$$

Este resultado podemos utilizar para determinar experimentalmente o momento de inércia de um corpo, se a constante D do fio é conhecida.

Quando a esfera oscilar submergida num líquido de viscosidade η , temos a seguinte forma da segunda lei de Newton:

$$I\varphi'' = -D\varphi - b\varphi' \quad (21)$$

cuja solução é

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega' t), \quad (22)$$

onde $\gamma = b/(2I)$ e $\omega' = (D/I - (b/2I)^2)^{1/2}$.

$I = 2mR^2/5$ é o momento de inércia da esfera do raio R em relação ao fio como eixo, veja 3.4.11, onde obtivemos para $\rho=1$ o valor $I = 8\pi R^5/15$. Multiplicando isso por $\rho = m/V$ e usando $V = 4/3 \cdot R^3 \pi$, resultará $I = 2mR^2/5$.

Em Hidromecânica aprendemos que o coeficiente do amortecimento b é dado por $b = 8\pi\eta R^3$, veja por exemplo Lamb, H.: Hydrodynamics, Cambridge, 1916, 633.

O estudo das oscilações de uma esfera num líquido é usado para a medição da viscosidade do líquido.

A famosa balança de torção de **Cavendish** (1731-1797),

é, também, uma espécie de pêndulo de torção. Ela é utilizada para medir a constante gravitacional. O ângulo da torção mede-se por meio de um feixe de luz incidente sobre um pequeno espelho fixado ao pêndulo, veja também

http://www.malhatlantica.pt/luisperna/lei_gravitacional.htm,

O feixe refletido cai sobre uma escala que se encontra numa distância de alguns metros do espelho. Com este aparato, Cavendish pôde obter o valor de G com precisão razoável.

6.3.5 Pêndulo físico

Qualquer corpo rígido pode realizar oscilações em torno de um eixo horizontal que não passa pelo centro de massa do corpo (o pivô, o ponto de articulação, não pode estar no centro de massa C).

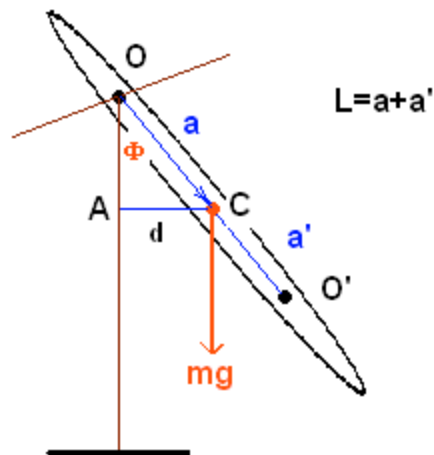


Fig.: 6.3-7

Sabemos que $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, veja 4.2.1, em relação ao ponto fixo O, onde \mathbf{r} é o vetor posição (idêntico ao vetor \mathbf{a} de O para C). Para o valor absoluto de \mathbf{M} temos

$M = r \cdot mg \cdot \sin\varphi = d \cdot mg$, onde $d = AC = \text{sen}\varphi$ é o "braço de alavanca" para mg .

Já que \mathbf{M} tenta de impedir o crescimento de φ , temos que usar um sinal de menos na equação do movimento

$$I \cdot \varphi''(t) = - mg \cdot a \cdot \sin\varphi(t) \quad (23)$$

I é o momento de inércia relativo ao eixo de rotação. Por meio do teorema dos eixos paralelos (teorema de Steiner, veja 4.3.3) podemos escrever

$$(I_C + ma^2) \cdot \varphi''(t) = - mg \cdot a \cdot \sin\varphi(t) \quad (24)$$

Ora, a dependência em seno faz que a equação é não-linear. Supondo que as oscilações tenham pequenas amplitudes, podemos considerar $\sin\varphi \approx \varphi$ e escrever

$$\varphi''(t) = -mg \cdot a / (I_C + ma^2) \cdot \varphi(t) \quad (25)$$

Isso é a equação de um movimento harmônico simples com o período

$$T = 2\pi \left((I_C + ma^2) / (mga) \right)^{1/2} \quad (26)$$

No outro lado do centro de massa C marcamos um ponto O' que podemos, também, usar como ponto de articulação (pivô).

Em relação ao ponto O' temos o período $T' = 2\pi \left((I_C + ma'^2) / (mga') \right)^{1/2}$.

Seja a' a distância para a qual $T = T'$, ou seja $a' = I_C / (ma)$. Para a soma $L = a + a'$ obteremos

$$L = a + a' = (I_C + m a^2) / (m a) \quad (27)$$

Substituindo L na Eq. (26) resulta

$$T = 2\pi \cdot (L/g)^{1/2} \quad (28)$$

Tornamos a encontrar, então, uma expressão da forma idêntica à do pêndulo simples. A grandeza L chama-se de *comprimento reduzido* do pêndulo físico.

As grandezas L e T podem ser determinadas experimentalmente com boa precisão, de modo que por meio da Eq. (28) podemos obter um bom valor experimental para a aceleração de queda livre g num local particular sobre a superfície da Terra.

Foi o Captain Henry Kater (1777-1835) ou primeiro que utilizou este método para determinar, em 1818, o valor de g. Em Potsdam fizeram Kühnen e Furtwängler varios refinamentos na técnica de medição e publicaram, em 1906, o valor de $g = 981,274 \text{ cm/s}^2$. Este valor foi o padrão até 1968. Neste ano, Hammond e Faller viajaram pelo mundo, levando consigo, desmontado e guardado em várias caixas, um interferômetro "portátil" de queda livre de 800 kg, para medir em alguns lugares escolhidos previamente o valor de g com uma precisão nunca vista. No porão do instituto de física da universidade nacional de Bogotá obtiveram, por exemplo, o valor de $g = 977,390015 \text{ cm/s}^2$, um valor que mais tarde foi devidamente gravado no proprio lugar da medição.

É claro, que com um aparato tão exato (as últimas versões pesam somente uns 500 kg) poderíamos fazer prospecções geofísicas e buscar água, petróleo e até ouro no quintal da avó.

