

6.2 Movimento oscilatório

6.2.1 Oscilações livres amortecidas

Até aqui ignoramos a força de atrito. Mas todo sistema mecânico possui algum grau inerente de atrito, que age como um consumidor de energia mecânica. Sabemos, pela experiência, que um corpo que vibra, oscila com uma amplitude que gradualmente decresce e, eventualmente, pára. A força de atrito é para velocidades pequenas proporcional à velocidade: $R = -bx'(t)$. O sinal negativo é devido ao fato de R ser oposto à velocidade $v = x'(t)$.

Para as velocidades maiores, R será proporcional a v^2 . Isso foi o caso em 2.5.1, onde estudamos o movimento de uma bola de tênis. A dependência em v^2 causa problemas de difícil solução. Porém, o sistema massa-mola em que a força tem a forma $F = -kx - bx'$ é modelo simplificado para muitas situações físicas reais.

A segunda lei de Newton fornece a seguinte equação do movimento

$$mx''(t) = -kx(t) - bx'(t) \quad (1)$$

Essa equação é usualmente escrita na forma

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

com as abreviações $\omega_0^2 = k/m$ e $2\gamma = b/m$. b é o coeficiente de arraste. A constante γ chamaremos de fator do atrito.

Um sistema que se deixa descrever pela equação (2) é chamada de oscilador harmônico livre com um grau de liberdade e com amortecimento viscoso. (A constante de proporcionalidade b é conhecida também como o *coeficiente de amortecimento viscoso* e possui unidades de N·s/m.)

Uma equação diferencial homogênea com coeficientes constantes tem sempre uma solução da forma $x = C e^{\lambda t}$. A substituição na Eq. (2) fornece a equação característica

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (3)$$

que tem as duas raízes:

$$\lambda_1 = -\gamma + (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} \quad (4a)$$

$$\lambda_2 = -\gamma - (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} \quad (4b)$$

Com cada uma delas $x(t) = C e^{\lambda t}$ vai ser uma solução de (2). A solução geral com duas constantes C_1 e C_2 é

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

(A superposição de soluções é somente permitida com equações diferenciais lineares, ou seja com e.dif. que são lineares com respeito à variável x e suas derivadas.)

Como $0 \leq \gamma < \infty$, o radicando $\gamma^2 - \omega_0^2$ pode ser positivo, negativo ou mesmo nulo, dando origem a três categorias de movimento amortecido.

6.2.2 Oscilador superamortecido: $\gamma^2 > \omega_0^2$

As raízes λ_1 e λ_2 são números reais negativos e a equação (5) descreve um movimento que se aproxima de zero para grandes valores de tempo t . O sistema não apresenta oscilações. Uma vez deslocado e solto, o sistema (massa) retorna a sua posição de equilíbrio em um movimento (processo) descrito por a soma de duas funções exponenciais decrescentes. (Eq. (5) não pode dar zero para mais de um valor de t . O movimento decai com x aproximando-se de zero para tempos grandes, e o movimento é não-periódico.)

A solução pode ser escrita como

$$x(t) = A e^{-\alpha t} + B e^{-\beta t}, \quad (6)$$

onde usamos as abreviaturas $\alpha = (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}$, $A = [(\gamma + \alpha)x_0 + v_0]/(2\alpha)$, $B = -[(\gamma - \alpha)x_0 + v_0]/(2\alpha)$, x_0 , v_0 = condições iniciais.

Segue agora um exemplo calculado com MuPAD.

Nosso problema de valor inicial (PVI) é dado por $x''(t) + 60x'(t) + 100x(t) = 0$ com as condições iniciais $x(0) = x_0 = 5$ e $x'(0) = v_0 = 0$

- `reset()` :
`pvi := ode({x''(t) + 60*x'(t) + 100*x(t) = 0,`
`x(0) = 5, x'(0) = 0}, x(t)):`
`solve(%)`

$$\left\{ \left(\frac{15 \cdot \sqrt{2}}{8} + \frac{5}{2} \right) \cdot e^{(20 \cdot \sqrt{2} - 30) \cdot t} - \left(\frac{15 \cdot \sqrt{2}}{8} - \frac{5}{2} \right) \cdot e^{-(20 \cdot \sqrt{2} + 30) \cdot t} \right\}$$

- `eq:=op(%,1);`

$$\left(\frac{15 \cdot \sqrt{2}}{8} + \frac{5}{2} \right) \cdot e^{(20 \cdot \sqrt{2} - 30) \cdot t} - \left(\frac{15 \cdot \sqrt{2}}{8} - \frac{5}{2} \right) \cdot e^{-(20 \cdot \sqrt{2} + 30) \cdot t}$$

- `plot(plot::Function2d(eq,t=0..2))`

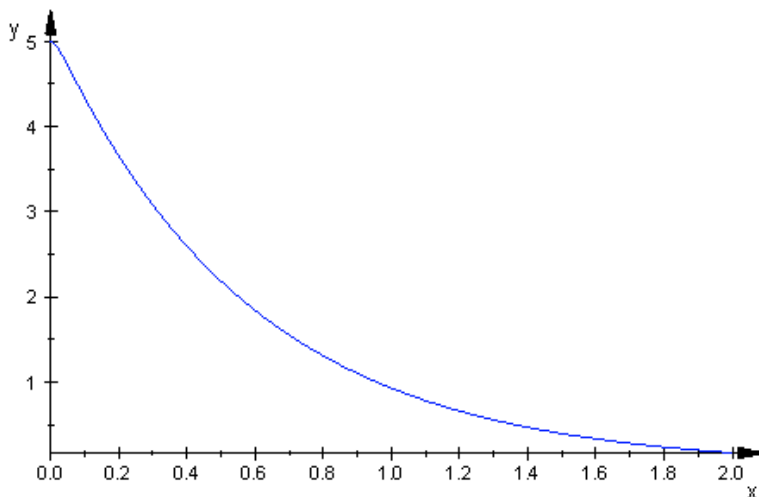


Fig.: 6.2-1

6.2.2 Oscilador subamortecido: $\gamma^2 < \omega_0^2$

É conveniente adotar uma nova variável ω' para representar $(\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$. Assim obtemos

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t + i\omega' t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega' t} \quad (7)$$

$$= e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t})$$

$$= e^{-\gamma t} (A \cos \omega' t + B \sin \omega' t)$$

$$= C e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi) \quad (8)$$

A equação (8) representa uma função harmônica exponencialmente decrescente. Podemos considerar a Eq. (8) como uma função co-seno cuja amplitude, que é $A(t) = C e^{-\gamma t}$, diminui gradualmente com o tempo. A amplitude possui o valor C em $t = 0$, mas $x(0) = C \cos(\varphi)$. Se em $t = 0$ o ângulo φ também for 0, temos $x(0) = x_0 = C$. Dentro do *tempo de relaxação* $\tau = 1/\gamma$ a função $A(t) = C e^{-\gamma t}$ reduz-se pelo fator $1/e$.

A frequência

$$\omega' = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} = (k/m - (b/(2m))^2)^{1/2} \quad (9)$$

é menor do que ω_0 e é chamada de frequência natural amortecida. O período amortecido é dado por $T' = 2\pi/\omega'$. (Se não houver amortecimento, a constante b será zero e $\omega' = \omega_0$.)

As constantes A , B determinamos outra vez por meio das condições iniciais. Usando $x(0) = x_0$ resulta $A = x_0$. B depende de $x(0)$ mas também de $v(0) = v_0$. Resulta

$$B = v_0/\omega' + \gamma x_0/\omega' \quad (9)$$

Para as constantes C e φ obteremos

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega'}\right)^2} \quad (10)$$

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{x_0 \omega'}\right) \quad (11)$$

Exemplo:

Desenhar a função deslocamento $x(t)$ para o oscilador subamortecido com a equação $m x''(t) + b x'(t) + k x(t) = 0$ e com os valores iniciais $x(0) = 1.5$, $x'(0) = -3$. Os valores de m , b , k são $m = 1$, $b = 2$ e $k = 64$.

Por meio de MuPAD calculamos os resultados que nos interessam:

```

• reset()://Oscilador subamortecido
m:=1:b:=2:k:=64:x0:=3/2:v0:=-3:

g:=b/(2*m)//γ
w0:=sqrt(k/m)//
w1:=sqrt(k/m-(b/(2*m))^2)//ω'
C:=sqrt(x0^2+(v0+g*x0)/w1)^2:
//corr:=cos(arctan(g/w1))://fator de correção para A(t)
fi:=float(-arctan((v0+g*x0)/(x0*w1))):
pvi := ode({x'(t) + b*x'(t)+k*x(t) = 0,
x(0) = 3/2, x'(0) = -3}, x(t)):
solve(%):
eq:=op(%,1):
p:=plot::Function2d(eq,Color=RGB::Red,t=-0.2..2):
am1:=C*exp(-g*t)//amplitude de tempo variável
am2:=-C*exp(-g*t):
Am1:=plot::Function2d(am1,LineStyle=Dashed,t=-0.2..2):
Am2:=plot::Function2d(am2,LineStyle=Dashed,t=-0.2..2):
plot(p,Am1,Am2,AxesTitles=["t","x(t)"])

```

Os resultados são:

- $\omega_0 = 8$
- $\omega' \approx 7,932$
- $C = 4\sqrt{7/7} \approx 1,511$
- $\varphi \approx 1,253$ rad.
- $x(t) = e^{-t} (3/2 \cdot \cos(3\sqrt{7} \cdot t) - \sqrt{7/14} \cdot \text{sen}(3\sqrt{7} \cdot t))$
ou $x(t) = C e^{-t} \cos(3\sqrt{7} \cdot t + \varphi)$
- amplitude = $\pm C e^{-t}$

A amplitude deveria ser $C \cdot \exp(-g \cdot t) \cdot \cos(\arctan(g/w1))$ como mostrou A. Soares de Castro, Am.J.Phys, Vol. 54, No.8, August 1986, p. 741, mas este fator de correção faz normalmente pouca diferença.

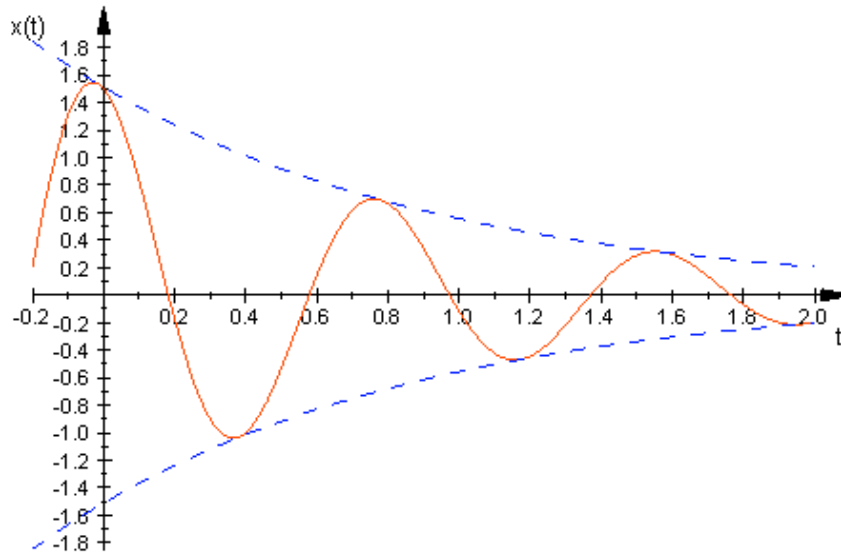


Fig.: 6.2-2

O gráfico mostra a variação no tempo da coordenada de posição e da amplitude do oscilador. Do gráfico pode-se extrair os valores característicos do movimento subamortecido como, p. ex., o tempo $T' = 2\pi/\omega' = 0,792\text{s}$ e a razão $x_n/x_{n+1} = 2,207$ entre duas amplitudes. Também foram traçadas as duas curvas das funções $A(t) = \pm C e^{-\gamma t}$.

A razão entre duas amplitudes sucessivas (no mesmo lado do eixo-t) x_n e x_{n+1} é constante, pois temos

$$x_n = C e^{-\gamma t_n} \cos(\omega' t_n + \varphi) \text{ e } x_{n+1} = C e^{-\gamma(t_n + T')} \cos(\omega' t_n + \varphi + 2\pi) = C e^{-\gamma(t_n + T')} \cos(\omega' t_n + \varphi),$$

de onde segue $x_n/x_{n+1} = e^{\gamma T'} = e^{\pi b/(\omega' m)} = \text{constante}$.

O *decremento logarítmico* δ é definido como

$$\delta = \ln(x_n/x_{n+1}) = \gamma T' = \pi b/(\omega' m) \quad (12)$$

A medição de δ é muitas vezes usada para determinar experimentalmente o valor do coeficiente de amortecimento viscoso b que as vezes não é bem conhecido. O sistema subamortecido é excitado por condições iniciais e gera-se (por meio de sensores e transdutores eletromecânicos, acoplados a um graficador x-y,) um gráfico do

deslocamento x contra o tempo t . Para determinar b usa-se a Eq. (12), que se pode resolver para b obtendo

$$b = \frac{\delta \cdot 2\sqrt{km}}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad (13)$$

Para uma pequena taxa de amortecimento temos $\delta \ll 1$ e Eq. (13) se reduz a

$$b \approx \delta(km)^{1/2}/\pi. \quad (14)$$

Se x_n e x_{n+1} possuem valores tão próximos que não há como distingui-los experimentalmente, o procedimento anterior pode ser modificado usando-se duas amplitudes que estejam separadas de n ciclos.

6.2.3 Oscilador criticamente amortecido: $\gamma = \omega_0$

As raízes λ_1 e λ_2 são números reais negativos iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0$).

A fim de resolver a equação do movimento, partimos do fato de que a equação do movimento possui a solução particular

$$x_1(t) = e^{-bt/(2m)} = e^{-\gamma t} \quad (1)$$

Para encontrar uma segunda solução, multiplicamos x_1 pela nova variável z :

$$x(t) := x_1(t) \cdot z(t) \quad (2)$$

Tenho em mente de determinar z de tal maneira que Eq. (2) será uma nova solução, linearmente independente. A esse fim formamos primeiro a primeira e a segunda derivada da Eq. (2):

$$x'(t) = x_1' z + x_1 z' \quad \text{e} \quad x''(t) = x_1'' z + 2 x_1' z' + x_1 z''$$

Em seguida, substituímos estas expressões na equação do movimento, resulta:

$$z(x_1'' + 2\gamma x_1' + \omega_0^2 x_1) + z'(2x_1' + 2\gamma x_1) + z'' x_1 = 0 \quad (3)$$

Sendo x_1 uma solução da equação do movimento, temos $(x_1'' + 2\gamma x_1' + \omega_0^2 x_1) = 0$. Substituindo em $(2x_1' + 2\gamma x_1)$, a derivada da Eq. (1) resulta também zero. Assim, resta da Eq. (3) somente $z''(t) = 0$. Esta equação tem como solução particular $z = t$.

Temos, então, uma segunda solução da equação do movimento:

$$x_2(t) = x_1(t)z(t) = t e^{-\gamma t} \quad (4)$$

A solução da equação diferencial para o caso especial de raízes iguais será

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t} \quad (5)$$

Com as condições iniciais $x(0) = x_0$; $v(0) = v_0$ resulta $C_1 = x_0$ e $C_2 = v_0 + \gamma x_0$.

Novamente, o movimento decai com x aproximando-se de zero e o movimento é não-periódico. Depois de certo tempo, o decaimento da função exponencial vai ser mais forte do que o crescimento da função linear e, por consequência, $x(t)$ vai aproximar-se de zero com tempos grandes. Da seguinte figura podemos ver que um sistema criticamente amortecido se aproximará do equilíbrio mais rapidamente do que um sistema superamortecido.

```

• reset():
  m:=1:x0:=30:k:=9:v0:=0:
  //criticamente amortecido
  Eq:=m*x''(t)+b*x'(t)+k*x(t) = 0:
  subs(Eq,b=6):
  ode({%,x(0)=x0,x'(0)=0},x(t)):
  f1:=op(solve(%)):

//super amortecido

  subs(Eq,b=15):
  ode({%,x(0)=x0,x'(0)=0},x(t)):
  f2:=op(solve(%)):
  info1:=plot::Text2d("superamortecido",[1.5,18]):
  info2:=plot::Text2d("crit.amortecido",[1.4,8]):
  plotfunc2d(f1,f2,info1,info2,XRange=0..4,YRange=-5..30):

```

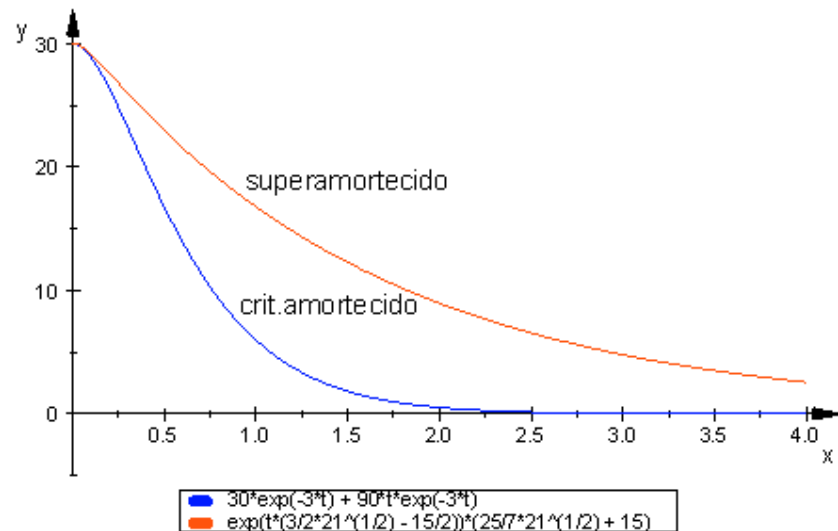



Fig.: 6.2-3

Condições: $m = 1\text{kg}$, $k = 9\text{ N/m}$, $x_0 = 30\text{mm}$, $v_0 = 0$;

$b = 15\text{ N}\cdot\text{s/m}$ para o caso superamortecido; $b = 6\text{ N}\cdot\text{s/m}$ para criticamente amortecido.

O caso "criticamente amortecido" é importante, p. ex., para o amortecimento de instrumentos de medição (e de portas!) que depois de ser excitados têm que regressar o mais rápido possível no estado inicial -e isso sem oscilar!

Antes de entrar em considerações sobre a energia dum oscilador, estudamos por última vez o caso *subamortecido* com diferentes graus de amortecimento. Observe como MuPAD nos permite representar uma **família** de curvas.

- `reset()` :
`//oscilador subamortecido com diferentes amortecimentos`
`m:=1:x0:=5:K:=100:`
`valores_de_R:=[2,10,60]:`
`ivp := ode({m*x''(t)+R*x'(t)+K*x(t) = 0,`
`x(0)=x0,x'(0)=0}, x(t)):`
`f:=op(solve(ivp)):`
`plotfunc2d(subs(f,R=valores_de_R[i])`
`$ i=1..3,XRange=0..2,YRange=-5..5):`

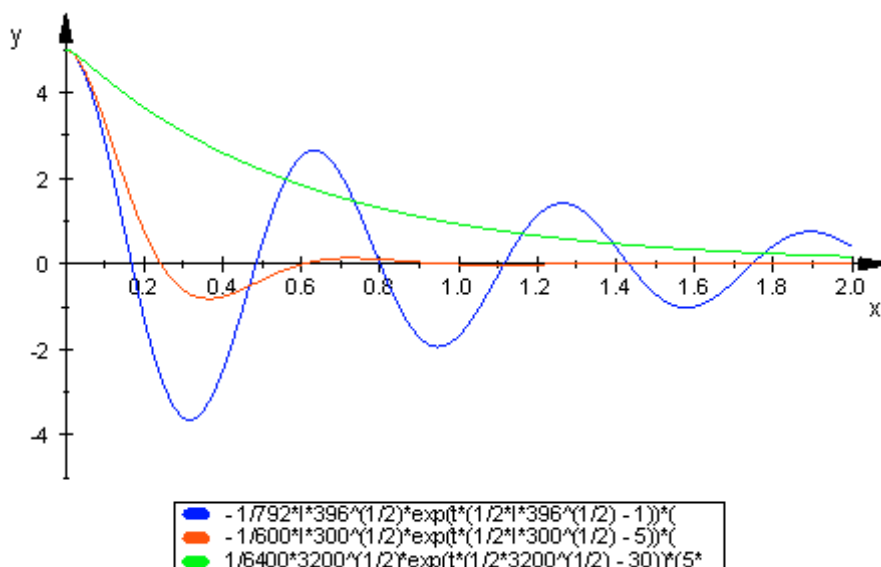


Fig.: 6.2-4

6.2.4 Energia de um Oscilador

Consideremos a energia mecânica total de um oscilador harmônico (sistema massa-mola)

$$E = mv^2/2 + m\omega_0^2 x^2/2, \quad (1)$$

onde $\omega_0^2 = k/m$, veja. 4.7.3/4. Podemos facilmente demonstrar que E não se muda com o tempo:

$$dE/dt = d(mv^2/2 + m\omega_0^2 x^2/2)/dt = x'm(x'' + \omega_0^2 x) = x'm \cdot 0 = 0.$$

Igualmente fácil é a demonstração de que E é proporcional ao quadrado da amplitude e da frequência, pois, utilizando $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$, resulta primeiro

$$E_k = m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)/2 \quad e \quad E_p = m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)/2 \quad (2)$$

e com isso

$$E = E_k + E_p = m A^2 \omega_0^2 / 2 = kA^2 / 2 \quad (3)$$

Das equações (2) vê-se que as energias potencial e cinética são funções oscilatórias de mesma amplitude $kA^2/2$ com defasagem de $\pi/2$ uma em relação à outra. Quando a energia potencial é máxima, a energia cinética é mínima, e vice-versa. Na figura 6.2-5 vemos a evolução temporal das energias potencial e cinética do oscilador em função do tempo para o caso em que $\varphi = 0$.

- `reset()://Energias potencial e cinética`
`m:=2:A:=5: k:=45:`
`w0 := sqrt(k/m):`
`Ek:= m*A^2*w0^2*(sin(w0*t))^2/2:`
`ek:=plot::Function2d(Ek,Color=RGB::Blue,t=0..2):`
`Ep:=m*A^2*w0^2*(cos(w0*t))^2/2:`
`ep:=plot::Function2d(Ep,Color=RGB::Red,t=0..2):`
`info1:=plot::Text2d("Ek",[1.95,100]):`
`info2:=plot::Text2d("Ep",[2,500]):`
`plot(ek,ep,info1,info2,AxisTitles=["t","Energia"])`

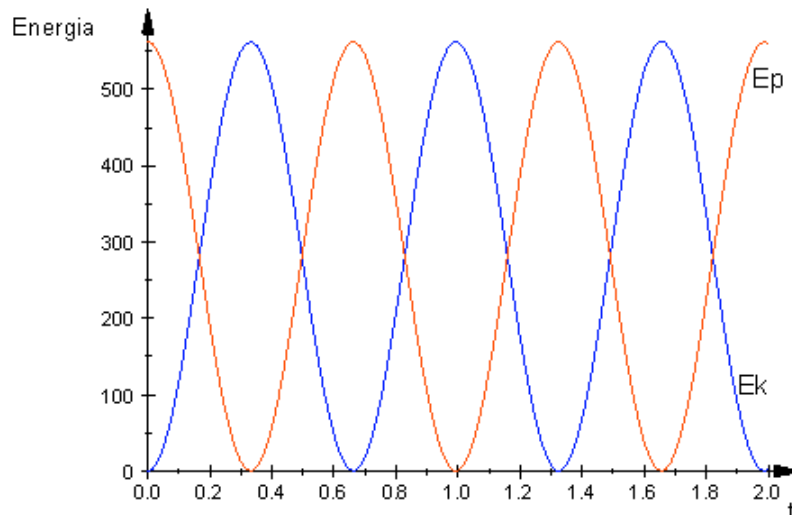


Fig.: 6.2-5

A energia fica oscilando entre as formas potencial e cinética. Há pontos, onde a energia é puramente potencial ou puramente cinética. Um sistema oscilatório normalmente contém um elemento de flexibilidade (ou rigidez) para armazenar a energia potencial do oscilador e um elemento de inércia para armazenar a energia cinética.

Até agora deduzimos e resolvemos as equações do movimento aplicando a segunda lei de Newton. Com este enfoque conseguimos levar em conta as ações de todas as forças agindo sobre o corpo, incluindo forças de amortecimento por atrito.

Há, porém, muitos problemas nos quais o efeito do amortecimento é pequeno e pode ser desprezado, de forma que a energia total do sistema é praticamente conservada.

Para tais sistemas, podemos aplicar o princípio de conservação de energia o que pode simplificar muito a análise de um problema, pois será possível determinar a equação do movimento e a frequência de um oscilador sem necessidade de analisar as forças que atuam sobre o corpo. Assim podemos ler a equação $dE/dt = d(mv^2/2 + m\omega_0^2 x^2/2)/dt$ de outra maneira: Como $E = E_k + E_p$ é constante para um sistema conservativo, sua derivada em relação ao tempo é nula e conseqüentemente $mv^2/2 + m\omega_0^2 x^2/2$ deve ser zero:

$$mv^2/2 + m\omega_0^2 x^2/2 = 0,$$

o que é a equação do movimento.

Em muitas situações, estamos somente interessados nos *valores médios* no tempo das energias potencial e cinética. Estes valores calculamos como média em um ciclo, ou seja como

$$\langle E_k \rangle := \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} E_k dt \quad (4)$$

Uma vez que $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \langle \sin^2 \varphi \rangle$ e $1 = \langle \cos^2 \varphi \rangle + \langle \sin^2 \varphi \rangle$ conclui-se que $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \langle \sin^2 \varphi \rangle = 1/2$. Temos assim

$$\langle E_k \rangle = mA^2 \omega_0^2 \langle \sin^2(\omega_0 t) \rangle / 2 = m A^2 \omega_0^2 / 4 = E/2 \quad (5)$$

Para $\langle E_p \rangle$ obtemos o mesmo valor: $\langle E_p \rangle = E/2$.

Mas, se temos que tomar conta das perdas devido ao atrito, a situação torna-se desagradável. Para estas forças não há potencial e a energia mecânica total não é conservada. Apesar disso podemos deduzir uma expressão para a perda da energia por unidade de tempo.

Multipliquemos a equação do movimento por v e tomemos em conta $vdv/dt = d(v^2/2)/dt$ e $xv = d(x^2/2)/dt$:

$$mv'v + bxv = -bv^2$$

$$\text{ou } d[mv^2/2 + kx^2/2]/dt = dE/dt = -bv^2 = -4\gamma E_k \quad (6)$$

É isso a expressão para a taxa da perda de energia. Observe, que esta taxa é proporcional ao quadrado da velocidade. Para uma pequena taxa de amortecimento, $\gamma \ll \omega_0$, podemos escrever aproximadamente

$$d\langle E \rangle / dt = \langle dE/dt \rangle = -4\gamma \langle E_k \rangle = -2\gamma \langle E \rangle \quad (7)$$

Isso é uma equação diferencial para o valor médio no tempo da energia com a solução

$$\langle E(t) \rangle = E_0 e^{-2\gamma t} \quad (8)$$

Veremos, então, uma diminuição exponencial da energia. No tempo $\tau = 1/(2\gamma)$ a energia média cai pelo fator $1/e$, o que significa que a energia decai dois vezes mais rápido do que a amplitude.

Para ter uma medida para a perda de energia de um sistema oscilatório, foi introduzido o parâmetro Q denominado *fator de mérito* ou *fator de qualidade* do oscilador. Sua definição reza assim:

$$Q := 2\pi \cdot (\text{energia armazenada no instante } t) / (\text{perda da energia no período } T) \quad (9)$$

Isso quer dizer

$$Q := 2\pi \cdot E(t) / (E(t) - E(t+T)) = 2\pi / (1 - e^{-2\gamma T}) \quad (10)$$

No caso de amortecimento muito pequeno, o valor de γ também é muito pequeno e podemos escrever aproximadamente

$$Q = 2\pi / (1 - (1 - 2\gamma T_0)) = \pi / (\gamma T_0) = 2\pi T / T_0 = \omega_0 / (2\gamma) \quad (11)$$

Um oscilador com fator de qualidade $Q = 600$ perde por ciclo 1% da sua energia, pois conforme à definição expressa pela equação (9) temos

$$Q = 2\pi E / \Delta E = 600, \text{ do que se deduz } \Delta E / E = 2\pi / 600 = 0,0105 \approx 1\%.$$

Este valor de Q encontramos com uma corda do violino que oscila durante um segundo. Se você pegar a tampa de uma panela, pode ser que ela vibra com uma frequência de 600Hz. Suponhamos que a intensidade (energia) da vibração cai em 10 s aproximadamente ao terço ($1/e$) da intensidade do princípio durante 10 s. O fator de qualidade da tampa é muito grande, pois $Q = 2\pi \cdot 10 \text{ s} \cdot 600 \text{ s}^{-1} \approx 37700$.

Já que a Terra tem um Q de algumas centenas, observamos que oscilações sísmicas caem só lentamente. Os científicos utilizaram o impacto do módulo lunar do Apollo 12 para determinar o fator Q da lua. Este valor é $Q = 10^4$.