

## 6.1 Movimento oscilatório

Movimentos oscilatórios encontramos em todas as partes. Em cada fase de nossa vida estamos rodeados de oscilações. O corpo humano não pode estar vivo sem os movimentos harmônicos do coração. Seria catastrófico, se o homem não tivesse descoberto métodos para produzir oscilações sem amortecimento, uma vida moderna com toda a tecnologia seria impossível. A natureza mesma precisava de um tempão para dar as corações uma frequência "natural", sem amortecimento. A acústica toda é um estudo de oscilações, na óptica e na eletrônica encontramos, para onde olhemos, frequências e amplitudes.

O tratamento matemático do movimento oscilatório se baseia nas equações diferenciais. Por isso dedicamos o próximo parágrafo a uma rápida discussão das noções básicas dessa disciplina. As demonstrações dos teoremas podem ser encontradas em qualquer texto de cálculo avançado como, por exemplo, *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. II de Louis Leithold.

Em muitos casos pode-se encontrar, com métodos conhecidos de cálculo, ou seja, por meio do que é chamado de "quadraturas", uma solução da equação diferencial que descreve o movimento oscilatório. Se isso não for possível, existe sempre um método numérico.

O pêndulo simples (exemplo de oscilador harmônico simples) já foi discutido em vários parágrafos, p. ex. em 3.2, 3.92 e 4.7.5. Um sistema de massa-mola é outro exemplo de oscilador harmônico.

Um corpo executa um movimento oscilatório harmônico, quando está vinculado a uma posição de equilíbrio por intermédio de uma força cujo módulo cresce proporcionalmente com o afastamento do corpo dessa posição de repouso.

Desta maneira, um pêndulo que oscila com pequena amplitude executa um movimento harmônico.

O primeiro item, depois de um resumo sobre equações diferenciais, serão as **oscilações livres**.

### 6.1.1 Equações diferenciais, referência breve.

De suma importância para a Física é uma *equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes* como, por exemplo, a equação para vibrações forçadas de um sistema massa-mola

$$a y'' + by' + cy = r(x) \quad (1)$$

A variable independente  $x$  é, em Física, normalmente o tempo  $t$ .

Vamos supor que os valores de  $y$  e de  $dy/dx$  sejam conhecidos em certo ponto do intervalo  $[a,b]$  onde as funções  $y$  e  $r$  são definidas.

O Teorema de existência e unicidade locais para problemas de valor inicial do tipo  $y'' = f(x, y, y')$ ;  $y(x_0) = y_0$ ;  $y'(x_0) = z_0$  mostra que existe somente uma solução da Eq. (1) satisfazendo as duas condições  $y(x_0) = y_0$ ;  $y'(x_0) = z_0$ .

A *solução geral* de (1) é a soma da solução geral da *equação homogênea* (2)

$$a y'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

e de qualquer *solução particular* de (1).

A solução geral da equação homogênea é dada por

$$Y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (3)$$

contanto que  $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$  é diferente de zero no intervalo  $[a,b]$ . A expressão  $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$  é chamada de determinante *wronskiano* das funções  $y_1$  e  $y_2$  e é indicado por  $W(x) = W[y_1, y_2](x)$ .

Tais funções  $y_1$  e  $y_2$  podem ser encontradas facilmente, é só preciso encontrar as duas raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da seguinte equação com  $c \neq 0$ :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (4)$$

Esta equação é chamada de *equação característica* da equação dada.

As raízes desta equação são

$$\lambda_1 = (-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}) / (2a) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = (-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}) / (2a) \quad (5)$$

Conforme  $b^2 - 4ac$  seja positivo, nulo ou negativo teremos, respectivamente, duas raízes reais distintas, uma raiz dupla ou um par de números complexos conjugados.

A solução geral da equação  $ay'' + by' + cy = 0$  é dada por

$$Y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (6)$$

quando  $\lambda_1, \lambda_2$  são distintas e reais.  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias.

Se  $\lambda_1$  for igual a  $\lambda_2$  teremos só uma solução:  $Y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$ .

A solução é  $Y(x) = e^{dx} (C_1 \cos wx + C_2 \sin wx)$  se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são complexos conjugados. As constantes  $d$  e  $w$  são  $d = -b/(2a)$  e  $w = (4ac - b^2)^{1/2}/(2a)$ .

A esta solução geral deve-se acrescentar uma solução particular da equação completa. Existem varios métodos para encontrar tais soluções particulares, por exemplo o *método dos coeficientes a determinar* ou o *método da variação das constantes*.

A teoria das equações diferenciais lineares e de  $n$ -ésima ordem com coeficientes constantes é uma simples extensão do caso  $n = 2$ .

## A equação diferencial $dy/dx = f(x,y)$

As condições suficientes (mas não necessárias) para a existência de uma solução única de uma equação diferencial de primeira ordem são definidas pelo teorema de Picard (1856-1941) :

**Teorema:**

Se para a equação diferencial de primeira ordem

$$dy/dx = f(x,y) \text{ com a condição } y(x_0) = y_0$$

a função  $f(x,y)$  e a derivada parcial  $\partial f/\partial y$  são contínuas numa vizinhança  $R$  do ponto  $(x_0, y_0)$ , então existe uma função única  $y = F(x)$  em certa vizinhança do ponto  $(x_0, y_0)$  que satisfaz a condição inicial  $y(x_0) = y_0$ , ou seja que toma o valor  $y_0$  se  $x = x_0$ .

As condições impostas à  $f(x,y)$  são apenas condições suficientes, não são necessárias, e é possível que exista uma solução única a pesar das duas condições não se verificarem.

**Exemplo 1:**

Considere a equação diferencial  $dy/dx = -x/y$ . A função  $f(x,y) = -x/y$  e a sua derivada parcial  $\partial f/\partial y = x/y^2$  são contínuas, exceto para  $y = 0$  (eixo-x), onde elas não são definidas e, por tanto, são descontínuas. Isso significa que o teorema não é aplicável quando  $y = 0$ .

A pesar disso, podemos demonstrar que em cada ponto do eixo-x existem duas soluções. Pois, se reescrevermos a equação na forma  $y dy = -x dx$  e integrarmos ambos os lados desta relação, obteremos  $y^2/2 = -x^2/2 + C$  ou

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

onde  $r^2 = 2c$  arbitrário. Trata-se da equação de um círculo com centro na origem. Esta solução implícita conduz a duas soluções explícitas e diferenciáveis (semicírculos):

$$y_1 = (r^2 - x^2)^{1/2} \quad \text{ou} \quad y_2 = -(r^2 - x^2)^{1/2}$$

Vemos, então, que por cada ponto  $(x_0, 0)$  passam *duas* soluções (semicírculos).

**Exemplo 2:**

O teorema de Picard nada permite de concluir no ponto  $(0,0)$  para a equação  $dy/dx = y/x$ . Mas a equação tem a solução  $y = c x$  que descreve uma família de linhas retas pela origem. E não somente *uma* reta passa pela origem, *todas* as retas passam por  $(0,0)$ .

**Campos de direções**

Perguntamos agora: como pode-se visualizar uma equação diferencial e suas soluções? Começemos com uma equação simples

$$dy/dx = y \quad (7)$$

Esta equação está nos dizendo que:

qualquer solução desta equação diferencial tem a propriedade que, em cada ponto do plano, a inclinação de seu gráfico é igual à sua coordenada- $y$ .

Isto significa que se a solução passa pelo ponto  $(0,1)$ , sua inclinação aí é  $dy/dx = y = 1$ ; se passa por um ponto com  $(x,4)$ , sua inclinação é 4.

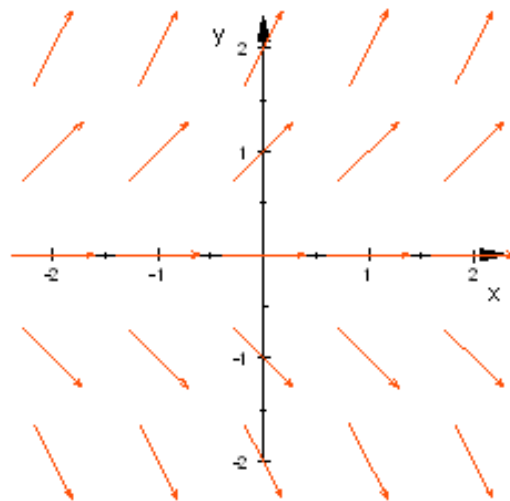


Fig.: 6.1-1

Na figura 6.1-1 uma pequena seta é traçada nos pontos  $(-2,-2)$ ,  $(-1,-2)$ ,  $(0,-2)$  ...  $(2,2)$  mostrando a inclinação  $-2$  da curva solução. Como  $dy/dx = y$ , a inclinação no ponto  $(-1,1)$  é  $1$  (o que é a coordenada- $y$ ), assim traçamos no ponto  $(-1,1)$  uma seta com inclinação  $1$ . Se traçarmos muitas setas assim, teremos um *campo de inclinações* ou *direções* para a equação  $dy/dx$ . As inclinações podemos anotar numa tabela:

Inclinações nos pontos  $(x,y)$ .

$y' = y$					
	$y = -2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$x = -2$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$-1$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$0$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$1$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$2$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$

O campo de direção da figura 6.1-1 foi criado pelo MuPAD com a função `plot::VectorField2d`:

- `f:= (x,y)-> y:`  
`V:=plot::VectorField2d([1,f(x,y)],x=-2..2,y=-2..2,`  
`Mesh = [5,5],Color=RGB::Red),`  
`ArrowLength=Fixed, Scaling=Constrained:`  
`plot(V)`

Se quisermos mais setas, temos de usar outro Mesh, por exemplo  $[10,10]$ .

Vemos que acima do eixo- $x$ , as inclinações são positivas (porque  $y$  é positivo) e as inclinações aumentam quando nos movemos para cima (pois  $y$  cresce). Abaixo do eixo- $x$ , as inclinações são negativas e ficam cada vez mais negativas quando nos movemos para baixo. Observe que ao longo de qualquer reta horizontal, as inclinações são constantes, pois  $y$  é constante.

Parta de qualquer ponto do plano e mova-se de modo que as setas de inclinação sejam tangentes ao seu caminho; você traçará, assim, uma das curvas solução. As curvas que você traçar deverão ter a forma de curvas exponenciais, pois cada curva da família de exponenciais  $y = Ce^x$  é uma solução de nossa equação diferencial.

(Uma solução da equação diferencial  $y' = y$  é uma função que é sua própria derivada. A função  $y = e^x$  tem esta propriedade, portanto  $y = e^x$  é uma solução. Na verdade, qualquer múltiplo de  $e^x$  também tem a propriedade. A família de funções  $y = Ce^x$  é a solução geral da equação diferencial  $y' = y$ .)

A solução geral da equação  $y' = ky$  é  $y = Ce^{kx}$  para qualquer constante  $C$ . Para  $k > 0$  será representado crescimento exponencial e decaimento exponencial para  $k < 0$ .)

Veja o gráfico de  $y = 0.5 e^x$  passando pelo ponto  $(0, 0.5)$  na seguinte figura 6.1-2:

- `f := (x,y) -> y:`

```
sol := (x,y) -> 0.5*exp(x) //solução analítica
s := plot::Function2d(sol, Color=RGB::Blue, x=-2..1.5) :
V := plot::VectorField2d([1, f(x,y)], x=-2..2, y=-2..2,
Mesh = [10,10], Color=RGB::Red), ArrowLength=Fixed,
Scaling=Constrained:
plot(V,s)
```

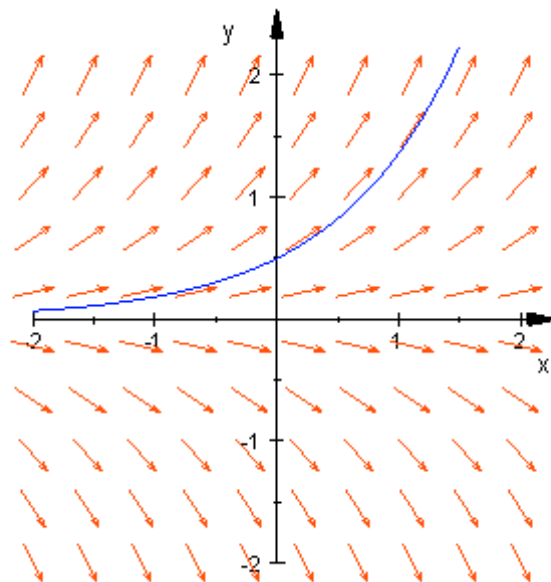


Fig.: 6.1-2

Geometricamente, resolver uma equação diferencial significa achar uma família de curvas solução.

No seguinte **exemplo** queremos resolver, geometricamente, a equação diferencial

$$y' = y - x.$$

Podemos facilmente construir a tabela das inclinações (p. ex. no ponto (2,0) temos a inclinação  $y' = 0 - 2 = -2$ ). Mas é mais fácil pedir MuPAD que faça o trabalho. A solução analítica é  $y = C e^x + x + 1$ . Representamos os casos com  $C = 0$ ,  $C = -1$ ,  $C = -2$

```

•
f:= (x,y)-> y-x:
C1:=(x,y)->0*exp(x)+x+1://solução analítica
C2:=(x,y)->-exp(x)+x+1://solução analítica
C3:=(x,y)->-2*exp(x)+x+1://solução analítica
c1:=plot::Function2d(C1,Color=RGB::Blue,x=-3..2):
c2:=plot::Function2d(C2,Color=RGB::Black,x=-3..2):
c3:=plot::Function2d(C3,Color=RGB::Green,x=-3..2):
V:=plot::VectorField2d([1,f(x,y)],x=-3..3,y=-3..3,
Mesh = [10,10],Color=RGB::Red), ArrowLength=Fixed,
ViewingBoxYRange =-3..3,Scaling=Constrained:
plot(V,c1,c2,c3)

```

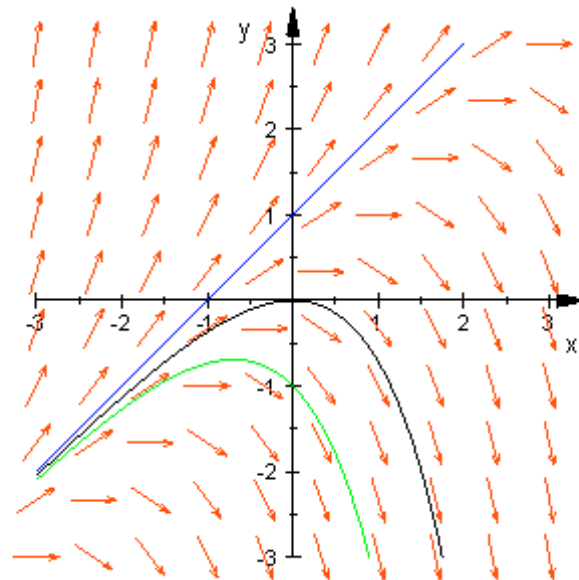


Fig.: 6.1-3



Nos exemplos anteriores vimos equações diferenciais com soluções analíticas, mas o próximo **exemplo** mostra uma equação diferencial (tipo Riccati) que não tem solução analítica elementar.

$$y' = x^2 + y^2$$

Neste exemplo podemos ver que setas da mesma inclinação ficam sobre círculos (curvas que unem segmentos de igual inclinação chamam-se de **isoclinas**). Para  $y' = 1$  temos  $1 = x^2 + y^2$  que é a equação dum círculo de raio 1 com centro na origem. Esta curva é a isoclina para  $y' = 1$ . As retas tangentes em todos os pontos desse círculo tem a inclinação 1. Todas as isoclinas de nossa equação são círculos centrados na origem.

As isoclinas oferecem outro método simples para construir o campo de direções.

Na seguinte figura vemos três isoclinas no campo de direções de nossa equação diferencial e a parábola com  $y = x^3$ .

- ```

f:= (x,y)-> x^2+y^2:
C1:=(x,y)->x^2+y^2-1://isoclina para y' =1
C2:=(x,y)->x^2+y^2-4://isoclina para y' =4
C3:=(x,y)->x^2+y^2-9://isoclina para y' =9
C:= (x,y)->x^3://gráfico de test

c1:=plot::Implicit2d(C1,Color=RGB::Black,x=-3..3, y=-3..3):
c2:=plot::Implicit2d(C2,Color=RGB::Black,x=-3..3,y=-3..3):
c3:=plot::Implicit2d(C3,Color=RGB::Black,x=-3..3,y=-3..3):
c:=plot::Function2d(C,Color=RGB::Blue,x=-3..3,y=-3..3):

V:=plot::VectorField2d([1,f(x,y)],x=-3..3,y=-3..3,
Mesh = [8,8],Color=RGB::Red), ArrowLength=Fixed,
ViewingBoxYRange =-3..3,Scaling=Constrained:

plot(V,c1,c2,c3,c)

```

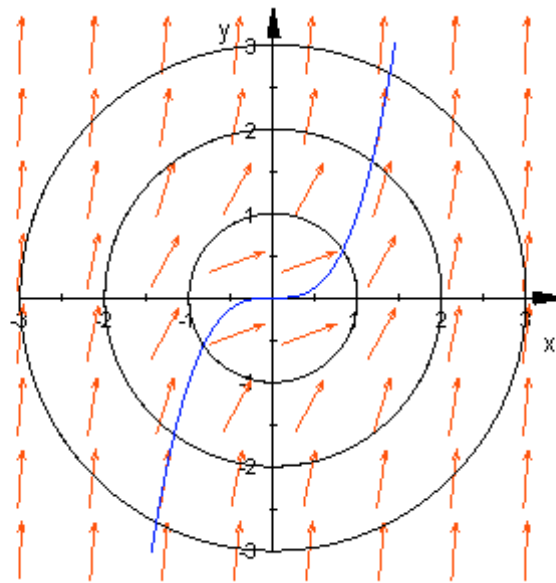


Fig.: 6.1-4

O campo de direções dá a impressão como se a parábola com  $y = x^3$  se ajustasse às setas do campo. Mas  $y = x^3$  não satisfaz a equação diferencial já que  $y' = 3x^2 \neq x^2 + y^2$ .

O matemático alemão H.A. Schwarz (1843-1921) desenvolveu um método numérico para casos como o presente.

Este método é a chamada **aproximação sucessiva** e funciona com a seguinte fórmula de recorrência:

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(z, y_n(z)) dz \quad (8)$$

$y(a) = b$  é a condição inicial, p. ex.  $y(0) = 0$ , ou seja  $b=0$ , o que significa que a curva solução deve passar pela origem. Como solução inicial escolhemos  $y_0(x) = b = 0$ . Temos  $f(x,y) = x^2 + y^2$ , mas escrevemos  $z$  em vez de  $x$ .

Primeira aproximação:

$$y_1(x) = \int_0^x (z^2 + y_0^2(z)) dz = \int_0^x z^2 dz = \frac{1}{3} x^3 \quad (9)$$

Segunda aproximação:

Agora substituímos em (9)  $y_0$  por  $x^3/3$  para obter  $y_2(x) = x^3/3 + x^7/63$

Já a terceira aproximação contém 4 termos e vamos terminar aqui o processo. Temos, então, a seguinte solução aproximada da equação  $y' = x^2 + y^2$  cujo gráfico passa pela origem:

$$y(x) \approx x^3/3 + x^7/63 + 2x^{11}/2079 + x^{15}/59535 \quad (10)$$

Representamos esta solução na seguinte figura 6.1-5.

(Normalmente buscamos, porém, uma solução numérica em forma de uma tabela.)

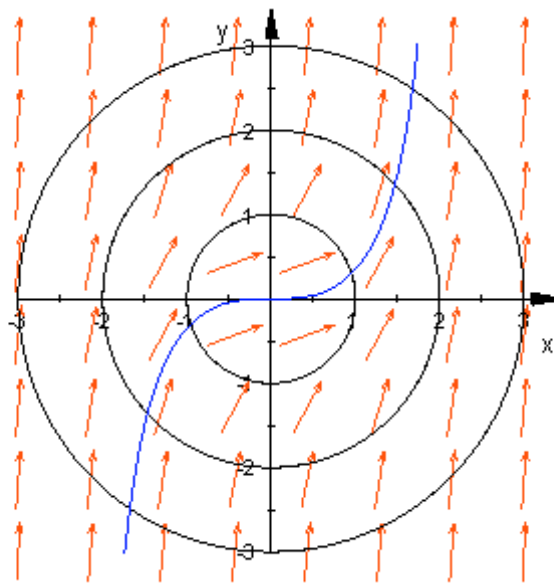


Fig.: 6.1-5

## 6.1.2 Oscilações livres não-amortecidas

Desde o ponto de vista físico, podemos classificar as oscilações segundo a maneira da sua produção: oscilações livres, forçadas ou acopladas. Cada uma dessas categorias é subdividida nas categorias de movimento amortecido e não-amortecido.

Primeiramente consideramos oscilações livres e não-amortecidas. Depois tomaremos em conta o atrito que faz que as oscilações são gradualmente atenuadas. Todas as oscilações livres são, em realidade, amortecidas. A amplitude da oscilação diminui com o tempo, geralmente segundo uma lei exponencial. Buscamos para cada caso a *equação do movimento* (equação diferencial). Desta equação obtêm-se todas as informações de interesse, como a frequência e o período do movimento, ou o próprio movimento como uma função do tempo.

Começamos considerando a vibração horizontal do sistema massa-mola da Fig. 6.1-6. As forças de amortecimento são pequenas o bastante para serem desprezadas.

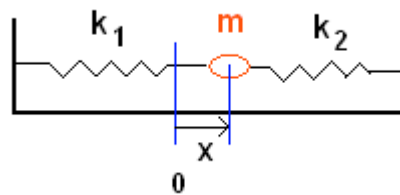


Fig.:6.1-6

Um corpo da massa  $m$  (2kg) é mantido em sua posição de repouso por meio de duas molas  $k_1$  e  $k_2$  ( $k$  = constante da mola;  $k_1 = 50$  N/m,  $k_2 = 150$  N/m). Ao ser afastado dessa posição de equilíbrio a uma distância  $x$  aparecerá nele uma força  $F$  tendendo a levá-lo à posição original. Ambas as molas têm, quando estão indeformadas, o mesmo comprimento  $l_0$  (15 cm).

A massa é solta do repouso no tempo  $t = 0$  de uma posição  $x = 5$  cm à direita da posição de equilíbrio. A distância entre as paredes é  $l = 3 l_0$ . A superfície é perfeitamente lisa.

Na posição do equilíbrio temos segundo Newton:

$$mg + \mathbf{N} + \mathbf{T}_{01} + \mathbf{T}_{02} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$\mathbf{N}$  = força da mesa sobre o corpo,  $\mathbf{T}_{01}$  e  $\mathbf{T}_{02}$  = forças das molas sobre  $m$ . Para as coordenadas- $x$  temos  $-T_{01} + T_{02} = 0$ , ou

$$-k_1(l_1 - l_0) + k_2(l_2 - l_0) = 0 \quad (2)$$

Os comprimentos das molas no equilíbrio são  $l_1$  e  $l_2$ . Com  $l_1 + l_2 = 3 l_0$  obtemos da Eq. (2)

$$l_1 = l_0 (1 + k_2/(k_1 + k_2)) \quad (3a)$$

$$l_2 = l_0 (1 + k_1/(k_1 + k_2)) \quad (3b)$$

Substituindo os valores dados, obtemos  $l_1 = 26,25$  cm e  $l_2 = 18,75$  cm.

Agora deslocamos a massa  $m$  de uma distância  $x$  a partir da posição neutra a direita (no sentido positivo do eixo- $x$ ) e a soltamos. A segunda lei de Newton reza, agora,

$$mg + \mathbf{N} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = m\mathbf{a} \quad (4)$$

em coordenadas- $x$ :

$$-k_1(l_1 + x - l_0) + k_2(l_2 - x - l_0) = mx''(t) \quad (5)$$

tomando em conta a Eq. (2), obtemos a seguinte equação linear de segunda ordem como equação do movimento

$$x''(t) + (k_1 + k_2) x/m := x''(t) + \omega_0^2 x = 0 \quad (6)$$

Eq. (6) é uma equação diferencial com coeficientes constantes. Neste caso precisamos só de duas soluções quaisquer da equação (6). Por solução da equação (6) entendemos uma função que satisfaça a equação. Assim, por exemplo, a função  $x(t) = e^{\lambda t}$  é uma solução se  $\lambda$  satisfaz a seguinte *equação característica*, veja 6.1.1, Eq. (4):

$$m\lambda^2 + k = 0, \quad (7)$$

onde  $m$  é a massa e  $k := k_1 + k_2$ .

No caso de uma equação diferencial da forma  $ax'' + bx' + cx = 0$  a equação característica tem a forma  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . As soluções dependem do sinal da discriminante  $D = b^2 - 4ac$ . Se ele for positivo, existiriam duas soluções, se o sinal for

negativo, como em nosso caso, a solução geral tem a forma

$$x(t) = e^{-bt/(2a)} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), \quad (8)$$

onde  $\beta = (4ac - b^2)/(2a)$ . Em nosso exemplo temos  $a = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = \omega_0^2$ . A solução geral da Eq. (6) pode agora ser escrita como

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (9)$$

A soma de dois harmônicos pode ser substituída por uma única função trigonométrica que envolve um ângulo de fase. Assim, a Eq. (9) pode ser escrita como

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (10)$$

Os valores das constantes A, B e C dependem das condições iniciais, ou seja, são determinadas a partir do conhecimento do deslocamento inicial  $x_0$  e da velocidade inicial da massa  $x'(0)$ . Se trabalharmos, por exemplo, com a forma da solução da Eq.(9) e calcularmos  $x$  e  $x'$  no tempo  $t = 0$ , obtemos  $x_0 = A$  e  $x'(0) = B \omega_0$ .

A substituição desses valores de A e B na Eq. (9) resulta em  $x(t) = 5\text{cm} \cdot \cos(10 \text{ s}^{-1} t)$ , já que temos  $x_0 = 5 \text{ cm}$ ;  $\omega_0 = ((k_1 + k_2)/m)^{1/2} = 10 \text{ s}^{-1}$ .

As constantes C e  $\varphi$  da Eq. (10) podem ser determinadas de um modo semelhante. O cálculo da Eq. (10) e da sua primeira derivada em relação ao tempo em  $t = 0$  fornecem

$$x_0 = C \cos\varphi \quad \text{e} \quad x'(0) = -C\omega_0 \sin\varphi.$$

A solução para C e  $\varphi$  resulta em  $C^2 = A^2 + B^2$  e  $\varphi = \arctg(-B/A)$

(Escrevendo a solução na forma  $x(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$ , resultaria em  $C^2 = A^2 + B^2$  e  $\varphi = \arctg(A/B)$ .)

$\omega_0$  é chamada de *freqüência circular natural* e tem a unidade radianos por segundo. O número de ciclos completos por unidade de tempo é a *freqüência natural*  $f_0 = \omega_0/2\pi$  e é expressa em hertz segundo o físico alemão Heinrich Hertz (1857-1894). 1 hertz (Hz) = 1 ciclo por segundo.

O tempo necessário para um ciclo completo do movimento é o período do movimento e é dado por  $T = 1/f = 2\pi/\omega$ . Em nosso caso temos para a duração de uma vibração completa  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 0,63 \text{ Hz}$

Com a função **ode** (ordinary differential equation) podemos facilmente resolver a equação (6) usando MuPAD:

- **eq:=ode(x''(t)=-w^2\*x(t),x(t)):**
- **solve(eq)**

$$\{C2 \cdot (\cos(t \cdot w) - i \cdot \sin(t \cdot w)) + C3 \cdot (\cos(t \cdot w) + i \cdot \sin(t \cdot w))\}$$

Podemos reescrever este resultado -usando C1 e C2 em vez de C2 e C3-:

$$x = \{(C1 + C2) \cos(\omega t) + i(C2 - C1) \sin(\omega t)\} \quad (11)$$

Escrevendo  $A := C1 + C2$  e  $B := i(C2 - C1)$ , obtemos o resultado que já conhecemos

$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  que também pode ser escrita como  $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$ .

A constante B deve ser zero, para que (11) satisfaz as condições iniciais:  $x(0) = x_0$  e  $x'(0) = 0$ . A solução para nosso caso especial é, então  $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ . O mesmo resultado obtemos, dando **ode** também as condições iniciais:

$$\mathbf{xt := ode(\{x''(t) + w^2*x(t) = 0, \\ x(0) = x0, x'(0) = 0\}, x(t))}$$

$$\text{ode}\left(\left\{w^2 \cdot x(t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t), x'(0) = 0, x(0) = x0\right\}, x(t)\right)$$

**solve(xt)**

$$\{x0 \cdot \cos(t \cdot w)\}$$

O movimento pode ser representado graficamente, como já vimos em seção 4.1 resolvendo a equação do movimento de um foguete. Aqui são vários métodos:

- `reset() :`  
`w:=10;x0:=5:`  
`ivp := ode({x''(t) + w^2*x(t) = 0,`  
`x(0) = x0, x'(0) = 0}, x(t)):`  
`solve(ivp) :`  
`eq:=op(%); //solução exata`  
`plot(plot::Function2d(eq,t=0..2))`

5 cos(10 t)

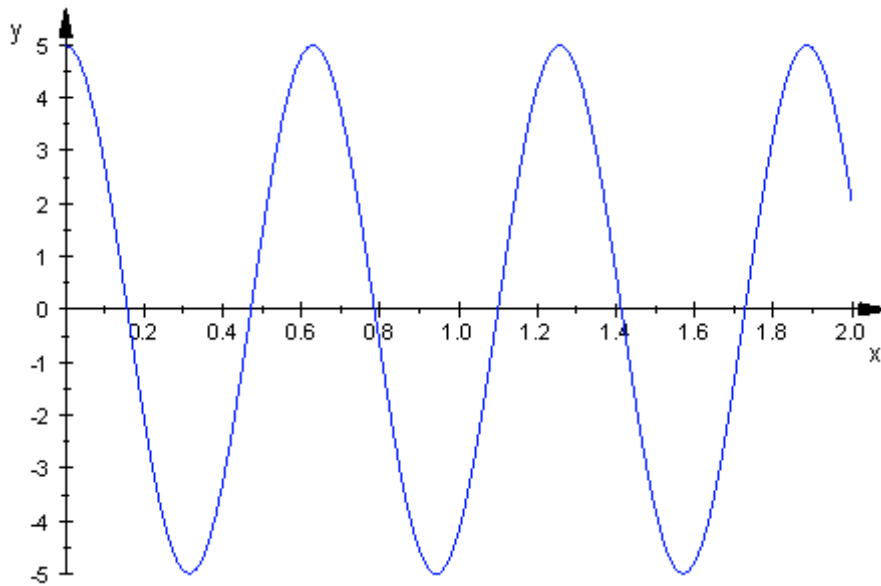


Fig.: 6.1-7

Para extrair valores numéricos, definimos uma função X:

- `X:=x->subs(eq,t=x)://solução de MuPAD`  
`float(X(0)),float(X(0.63)); //dois valores de X`  
`float(subs(eq,t=0.63));`

5.0, 4.999293182

4.999293182



Podemos usar a função X para traçar a solução e também a sua derivada

```
X:=x->subs(eq,t=x)//solução de MuPAD
x:=plot::Function2d(X(t),t=0..2,Color=RGB::Red):
v:=plot::Function2d(X'(t),t=0..2,Color=RGB::Green):
plot(x,v)
```

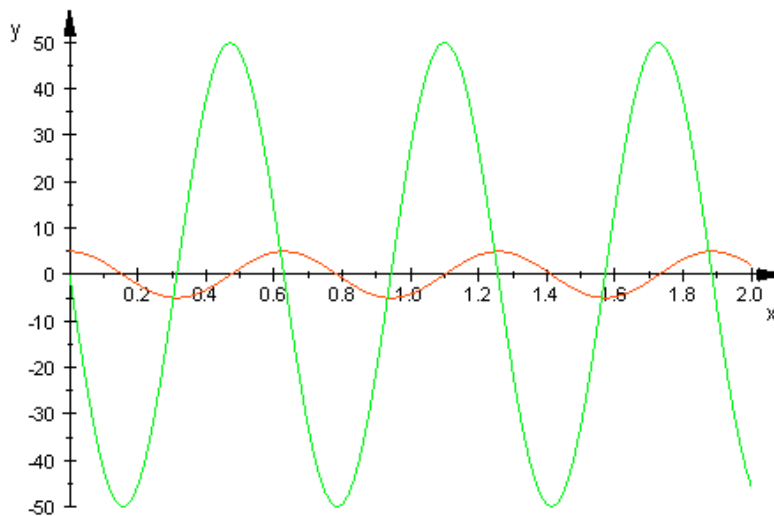


Fig.: 6.1-8

Bém interessante é a seguinte versão, cuja descrição encontra-se por meio de "`plot::Ode2d`"

- `w:=10:`  
`f:=(t,Y)->[Y[2],-w^2*Y[1]]:`  
`Y0:=[5,0]:`  
`G:=(t,Y)->[t,Y[1]]://Gerador do gráfico y->t`  
`p:=plot::Ode2d(f,[i/10 $i=0..20],Y0,`  
`[G,Style=Splines,Color=RGB::Red],`  
`[G,Style=Points,Color=RGB::Blue]):`  
`plot(p)`

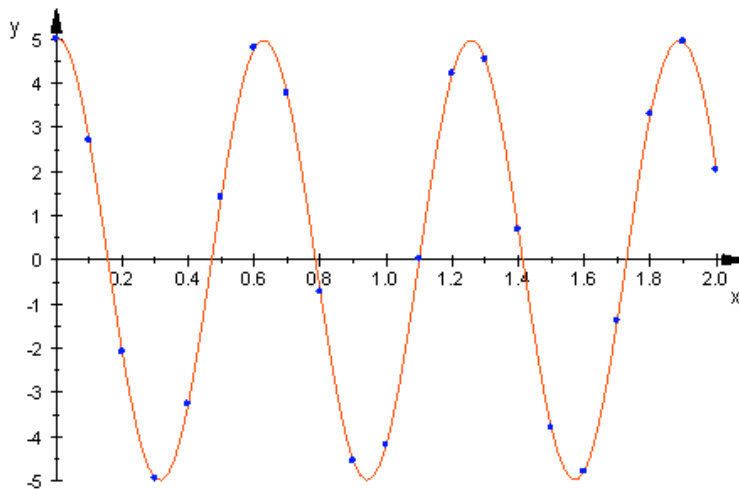


Fig.: 6.1-9

No seguinte programa resolvemos a equação  $m x''(t) + k x(t) = 0$  **numericamente** com o método de Euler, veja o **anexo numérico** seção 2.1 e 3.1. Além disso, utilizamos a função `plot::Group2d` do MuPAD.

```

reset() // com plot::Group2d
Euler:=proc(h,passos)//Oscilador harmônico

begin
  t(0):=0:i:=0:
  k:=105:m:=2:k1:=k/m:
  x(i):=0.25:v(i):=0.8:
  a(i):=-k1*x(i):

  DIGITS:=6:

  //print("t= ",t(i),"x= ",x(i),"v= ",v(i),"a=",a(i)):

  for i from 1 to passos do

  v(i):=v(i-1)+a(i-1)*h://Last-Point-Method:
  x(i):=x(i-1)+v(i)*h:
  a(i):=-k1*x(i):
  t(i):=t(i-1)+h:

```

```

if (i=0)or (modp(i,10)=0)then //veja 3.8.3
  //print("t= ",t(i),"x= ",x(i),"v= ",v(i),"a=",a(i)):
end_if:
end_for:
A:=0.273296: fi:=1.154915:w:=7.245688:
F0:=A*sin(w*n+fi)//solução analítica
plot(plot::Group2d(
//plot::Point2d(i*h,x(i)*10, Color=RGB::Blue)$i=0..passos,
plot::Point2d(i*h,v(i), Color=RGB::Green)$i=0..passos,
plot::Point2d(i*h,a(i)/10, Color=RGB::Red)$i=0..passos),
Header= "Euler-LPM, Verde: v(i) Vermelho:a(i)/10"):
plot(plot::Group2d(
plot::Point2d(i*h,x(i)*10, Color=RGB::Black)$i=0..passos,
plot::Function2d(F0(n)*10,n=0..h*passos, Color=RGB::Red)),
Header= "Preto: x(i)*10(Euler) Vermelho:x(i)*10(teoria)":
end_proc:
Euler(0.01,100)

```

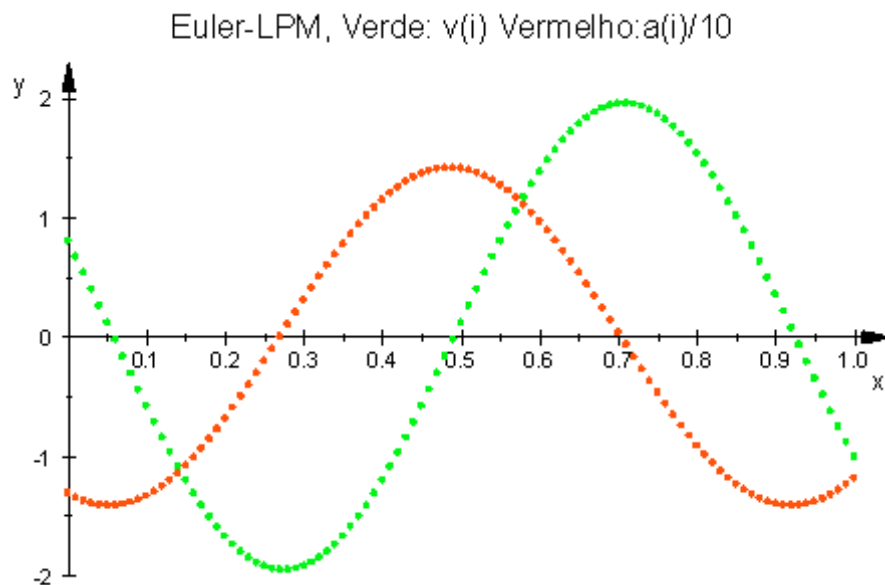


Fig.: 6.1-9

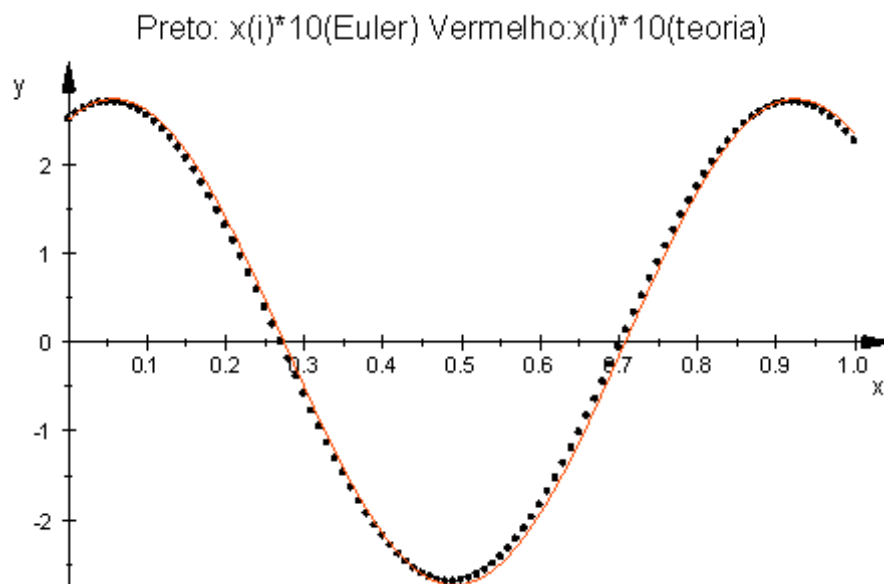


Fig.: 6.1-10

A solução aproximada de Euler pode ser melhorada, reduzindo o tamanho do passo  $h$ .