

5.3 Movimento devido a forças centrais

5.3.1 O campo gravitacional de uma camada esférica

Sempre temos considerado a Terra como uma esfera perfeita cuja massa está uniformemente distribuída em todo o volume dela. Para calcular o campo gravitacional que uma esfera produz é prático considerá-la como uma espécie de cebola, construída pela superposição de uma série de finas camadas esféricas. Por isso é razoável de primeiro estudar o potencial produzido por uma massa m uniformemente distribuída sobre uma *superfície esférica*.

Lembramo-nos que o potencial gravitacional num ponto $P(r)$ é a energia potencial de uma massa unitária colocada nesse ponto, ou seja $V(r) = E_p(r)/m' = -Gm/r$. m é a massa que produz o campo gravitacional e m' é a massa que colocamos no ponto P . Se o campo for produzido por n massas, temos que somar algebricamente as potenciais $V_i(r)$ que cada massa produz no ponto P :

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) + \dots + V_n(r) \quad (1)$$

A figura 5.3-1 mostra uma massa M , uniformemente distribuída sobre uma superfície esférica. Para calcular o potencial no ponto $P(r,0)$, dividimos a camada esférica em faixas circulares. Os potenciais produzidos pelas faixas serão somados (integrados) algebricamente. A área de uma faixa é largura por circunferência

$$dA = (a \, d\theta) (2\pi a \, \text{sen}\theta) = 2\pi a^2 \, \text{sen}\theta \, d\theta$$

Visto que a massa por unidade de área é $M/(4\pi a^2)$, a faixa tem a massa

$$\frac{1}{2} \cdot M \, \text{sen}\theta \, d\theta$$

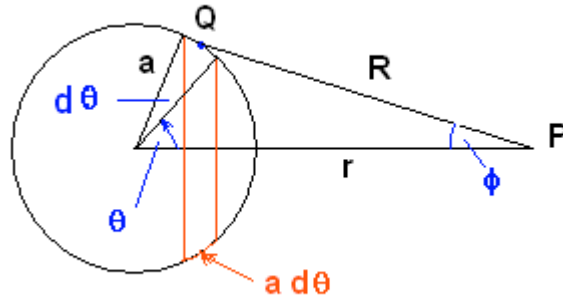


Fig.: 5.3-1

Todos os pontos da faixa têm a mesma distância do ponto $P(r,0)$. Assim, obtemos para o potencial produzido pela faixa circular em P

$$dV = \frac{1}{2} G M \cdot \sin\theta \, d\theta / R \quad (2)$$

R podemos calcular com ajuda da lei dos co-senos $R^2 = a^2 + r^2 - 2 a r \cos\theta$, onde a e r são constantes. Diferenciando esta equação, obtemos $\sin\theta \, d\theta = R dR / (ar)$. Substituindo na equação (2), resulta

$$dV = - G M \cdot dR / (2 a r) \quad (3)$$

A contribuição de todas as faixas para o potencial em $P(r,0)$, será

$$V(r > a) = - \frac{GM}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR = - \frac{GM}{r} \quad (4)$$

$r-a$ e $r+a$ são os limites para R no caso de P estar fora da esfera. Se P é um ponto no interior da esfera, os limites para R serão $a-r$ e $a+r$. Para V obtemos, neste caso, um potencial constante, independente da posição de P , pois resulta

$$V(r < a) = -GM/a \quad (5)$$

Eq.(4) nos diz que uma camada esférica homogênea de raio a e da massa M atrai uma partícula na distância $r > 0$ da mesma forma como uma massa M concentrada na origem.

Este resultado é válido para cada camada no interior de uma *esfera* homogênea. O resultado (5) nos diz que o potencial no interior da *camada* esférica é constante e que o campo gravitacional é nulo, como vamos ver em seguida.

(Lembramo-nos que o campo gravitacional é o *gradiente* do potencial gravitacional com sinal trocado: $\mathbf{G} := \mathbf{F}/m = -\mathbf{grad} V$. O gradiente de V é nulo, se V é constante, pois $G_x = -\partial V/\partial x = 0$ etc. O campo \mathbf{G} é definida como força exercida sobre a massa unitária colocada em P.)

Aplicando a relação

$$\mathbf{grad} V(r) = dV(r)/dr \cdot \mathbf{r}_o, \text{ (veja Eq. (17) em 4.6.2),}$$

nas Eqs. (4) e (5), vemos que o campo gravitacional no exterior da camada esférica ($r > a$) vem dado pela equação

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}/m = -\mathbf{grad} V(r) = -G_o M/r^2 \cdot \mathbf{r}_o \quad (6)$$

Para o interior da camada ($r < a$) resulta $\mathbf{G} = 0$.

(Para evitar confusão com o símbolo \mathbf{G} do campo gravitacional, utilizamos para a constante universal da gravitação o símbolo G_o . Se não há perigo de errar, utilizaremos G .)

O seguinte programa faz um gráfico da Eq. (6) para uma casca esférica fina de raio $a = 2$. g_{ex} e g_{int} são as duas partes da intensidade do campo gravitacional $G(r)$.

Programa 1:

- `reset()://campo G de uma camada esférica`
- `a:=2:c:=1://c = GoM`
- `gex:=-c/r^2:`
- `gint:= 0:`
- `Gex:=plot::Function2d(gex,Color=RGB::Green, r=a..5):`
- `Gint:=plot::Function2d(gint,Color=RGB::Red, r=0..a):`
- `plot(Gex,Gint,ViewingBoxYRange=-`
- `0.3..0,AxisTitles=["r", "G"])`

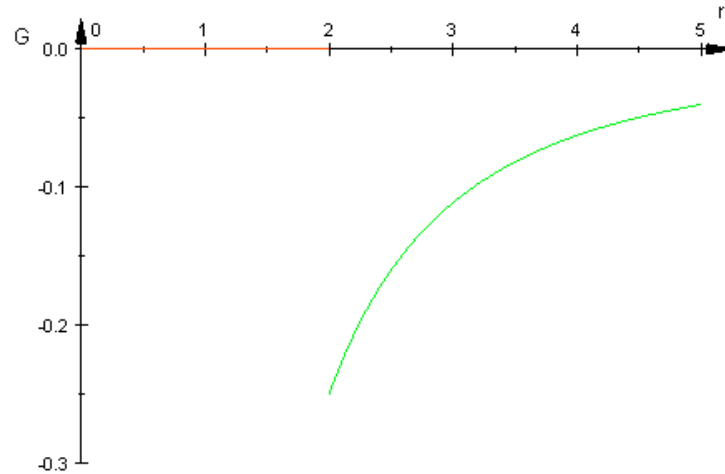


Fig.: 5.3-2

No caso de uma **esfera sólida**, obtemos para o interior da esfera que G é proporcional à distância r do centro (G é uma reta), no exterior da esfera, resulta outra vez que G é inversamente proporcional ao quadrado da distância r do centro.

As figuras 5.3-3 e 5.3-4 mostram a variação de G com r para o caso de uma **esfera sólida** (p.ex. a Terra).

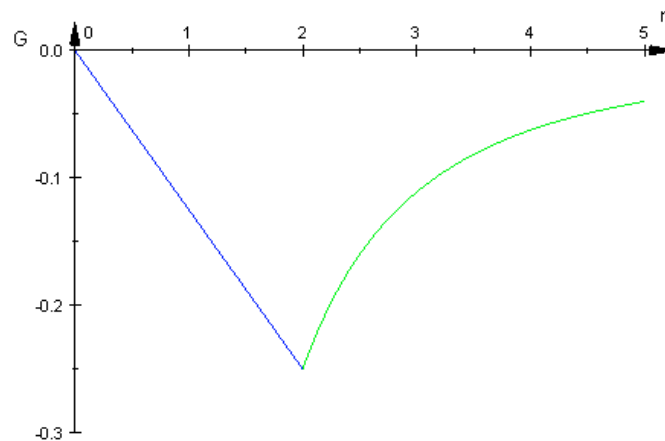


Fig.: 5.3-3

Usamos outra vez o **Programa 1**, mas com as seguintes mudanças:

```
a:=2:c1:=1:c2:=c1/a^3:
gex:=-c1/r^2:
gint:=-c2*r:
```

Aproveitamos da ocasião para conhecer outras maneiras de traçar com MuPAD o gráfico de uma função com descontinuidades ou picos.

No **Programa 2** definimos G como um procedimento, ver. 2.3.3, fazendo uso da estrutura `if .. then .. else`.

No **Programa 3** temos a função `piecewise` (por partes) que, com poucas linhas, faz o gráfico de uma função descontínua ou com picos.

Programa 2:

```
G := proc(r)// G é definida como "procedure"
begin
a:=2:c1:=1:c2:=c1/a^3:
if r>=a then
-c1/r^2
else
-c2*r
end_if:
end_proc:
plot(plot::Function2d(G,ViewingBoxYRange=-0.3..0,
r = 0 ..5 )):
```

Programa 3:

- `a:=2:c1:=1:c2:=c1/a^3://utilizando a função "piecewise"`
`G := piecewise([r < a, -c2*r], [r >= a,-c1/r^2]):`
`plot(plot::Function2d(G,Color=RGB::Green,`
`ViewingBoxYRange=-0.3..0, r = 0 .. 5)):`

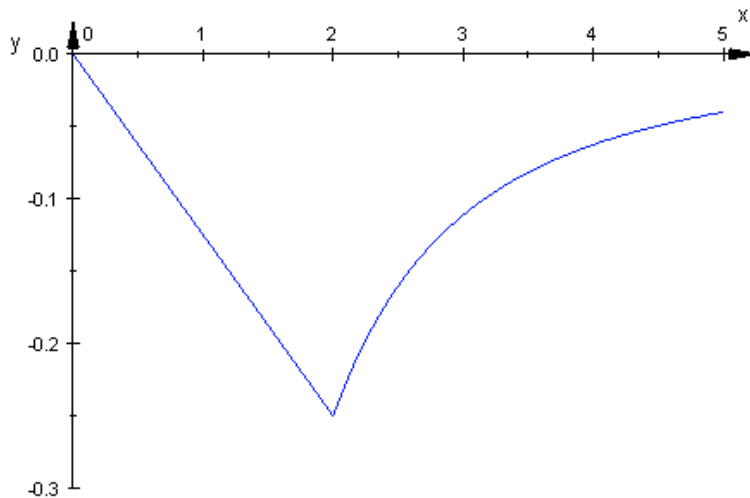


Fig.: 5.3-3

A Figura 5.3-3 foi feita com o **Programa 2**.

Exemplo:

Segue aqui mais um exemplo para um gráfico com a estrutura de control **if ..** mostrando uma função composta. Repare também à instrução **elif** (= else if)

```

• V:=proc(r)
  begin
    if r <0 then r^2
    elif r>0 and r <2 then 2*r
    else r+3
    end_if
  end_proc:

  plot(plot::Function2d(V,r=-2..5))

```

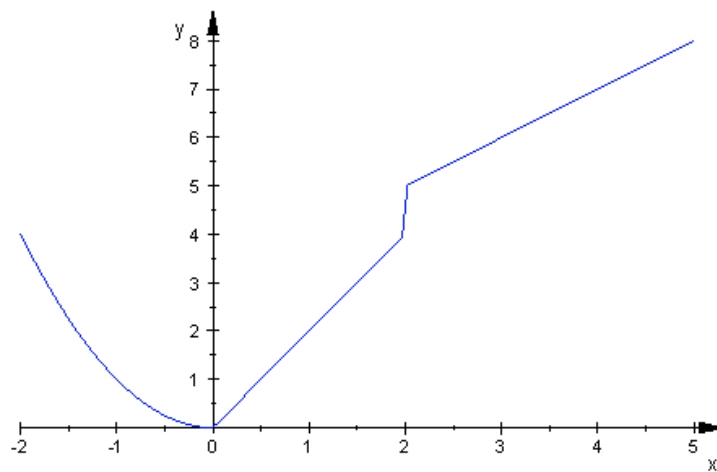


Fig.: 5.3-4

5.3.2 O campo gravitacional de uma esfera sólida

Há várias maneiras para deduzir a equação para o potencial de uma esfera sólida. O método mais simples é o uso do raciocínio, sem mexer muito com fórmulas: A esfera é construída de um sem-número de cascas finas. Cada casca produz num ponto exterior P um campo dado pela Eq. (6). As massas das cascas adicionam-se para dar, novamente, o resultado (6). Portanto, uma esfera sólida homogênea produz num ponto *exterior* um potencial e um campo gravitacional idênticos aos de uma partícula de mesma massa, colocada no centro da esfera.

Para um ponto *no interior* da esfera podemos descartar as cascas que têm P como ponto interior, pois eles produzem um campo zero segundo Eq. (6). Seja M' a massa das cascas para as quais P é um ponto exterior. Segundo Eq. (6) temos para o campo G em P

$$\mathbf{G} = -G_0 M' / r^2 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (7)$$

Já que a esfera é homogênea, obtemos para a massa M' contida na esfera de raio r

$$M' = Mr^3/a^3$$

Substituindo esse resultado na equação (7), obtemos para o campo num ponto interior da esfera a expressão que já usamos nos programas anteriores, a saber

$$\mathbf{G} = -G_0M r/a^3 \cdot \mathbf{r}_o, \quad (r < a) \quad (8)$$

Enquanto o potencial num ponto exterior ($r > a$) da esfera de raio a segue sendo dado pela Eq. (4), temos para um ponto com $r < a$ a expressão

$$V(r) = G_0M (r^2 - 3a^2)/(2a^3), \quad (r < a) \quad (9)$$

Por meio de $\mathbf{G} = -\mathbf{grad} V(r) = -dV(r)/dr \cdot \mathbf{r}_o$ obtemos Eq. (8).

Muito interessante é o caso de uma *esfera oca* com raio interior a_1 e raio exterior a_2 . O cálculo direto pede a resolução de uma integral tripla. Este cálculo pode-se encontrar nos livros sobre Teoria de Potential. (Uma representação especialmente lúcida é dada em *Einfuehrung in die hoehere Mathematik*, Vol. III, S. 428 de Mangoldt-Knopp.)

O cálculo confirma os resultados já obtidos: Uma esfera sólida homogênea oca produz num ponto *exterior* um potencial e um campo gravitacional idênticos aos de uma partícula de mesma massa, colocada no centro da esfera oca.

O potencial no *interior* da esfera oca, $0 < r < a_1$, é constante.

5.3.3 Trajetória circular e sua estabilidade

Neste parágrafo vamos estudar, para o caso das órbitas circulares, um exemplo de um *cálculo de perturbação*.

Órbitas circulares podem existir em qualquer campo central, mas resulta que estas trajetórias não são necessariamente estáveis. Uma trajetória é circular com raio $r = r_0$ se em cada instante vale, para $r = r_0$, $dr/dt = 0$. Isso é somente possível se $\partial V_{ef}/\partial r = 0$.

Mas, a órbita circular será somente estável se o gráfico de V_{ef} tiver um mínimo no $r=r_0$.

Consideremos, como exemplo, a seguinte força central atrativa

$$F(r) = -k/r^n, \quad k > 0 \quad (10)$$

O potencial efetivo é

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (11)$$

As condições para um mínimo, ou seja, para uma órbita circular estável, são

$\partial V_{\text{ef}}/\partial r = 0$ e $\partial^2 V_{\text{ef}}/\partial^2 r > 0$. Da primeira condição resulta $r_0^{n-3} = \mu k/L^2$ e da segunda $-nk/r_0^{n+1} + 3L^2/(\mu r_0^4) > 0$. Multiplicando a última relação por r_0^4 e utilizando a equação $r_0^{n-3} = \mu k/L^2$, obtemos

$$(3-n) L^2/\mu > 0 \quad (12)$$

Este resultado nos diz que somente há órbitas circulares para $n < 3$. Se tivéssemos usado a equação (10) na forma $F(r) = -kr^s$, teríamos obtido $s > -3$ como condição de estabilidade. Isso incluiria, então, a força gravitacional com r^{-2} e também a força elástica com $s = 1$. Já sabemos que o movimento de um elétron num campo central proporcional a r^{-1} pode ser circular e estável, veja 5.2.3. Depois da discussão da curva de V_{ef} no parágrafo 5.1.1, sabemos que uma pequena perturbação do objeto na sua órbita circular somente pode resultar em pequenos movimentos oscilatórios em torno à trajetória circular.

Será muito instrutivo de analisar mais a fundo este movimento de pequena perturbação. Tecnicamente encontramos-nos perante de um exemplo dum *cálculo de perturbação*.

Escrevamos a força na forma $F(r) = -\mu g(r)$ e substituamo-la na equação radial (11) da seção 5.1. Dividindo por μ obtemos

$$d^2r/dt^2 - L^2/(\mu^2 r^3) = -g(r) \quad (13)$$

Se a partícula se mover, ao começo, ao longo de uma trajetória circular com $r = r_0$, então uma pequena perturbação $x(t)$ vai modificar o raio em

$$r = r_0 + x(t) \quad (14)$$

Visto que $r'' = x''$, obtemos para a função de perturbação a seguinte equação diferencial

$$x'' - L^2/[\mu^2 r_0^3 (1+x/r_0)^3] = -g(r_0 + x) \quad (15)$$

Suponhamos que a perturbação é muito pequena, ou seja $x/r_0 \ll 1$, e usamos a aproximação

$$(1 + x/r_0)^{-3} \approx 1 - 3x/r_0 \quad (16)$$

Suponhamos, também, que $g(r) = g(r_0 + x)$ se deixa representar por uma série de Taylor na vizinhança de ponto $r = r_0$

$$g(r_0+x) = g(r_0) + x g'(r_0) + \dots \quad (17)$$

Com estas duas aproximações teremos

$$x'' - L^2(1-3x/r_0)/(\mu^2 r_0^3) = -(g(r_0) + x g'(r_0)) \quad (18)$$

Tomando em conta Eq. (13) e $r'' = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} x'' - g(r_0)(1-3x/r_0) &= -(g(r_0) + x g'(r_0)) \quad \text{ou} \\ x'' + (3g(r_0)/r_0 + g'(r_0))x &= 0 \quad (19) \end{aligned}$$

Por meio da definição

$$\omega_0^2 := 3g(r_0)/r_0 + g'(r_0) \quad (20)$$

obtemos a equação diferencial do oscilador harmônico, veja 3.6.3, 4.7.4,

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \quad (21)$$

A solução de (21) é

$$x(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} \quad (22)$$

Quando $\omega_0^2 < 0$, ou seja, quando ω_0 é imaginário, o segundo termo na Eq. (22) crescerá sem limites e a partícula se afastará cada vez mais da trajetória circular. Por isso, a partícula ficará perto da trajetória circular somente quando $\omega_0^2 > 0$.

Então deve ser

$$3g(r_0)/r_0 + g'(r_0) > 0 \quad (23)$$

O período das pequenas oscilações, ou seja da função $x = x(t)$, em torno do círculo com $r = r_0$, vem dado pela seguinte relação

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g(r_0)}{r_0} + g'(r_0)}} \quad (24)$$

No tempo $T/2$ o raio r varia de um valor mínimo (apside) até o próximo valor máximo. Sendo as variações de r só pequenas, podemos considerar a variação temporal do ângulo polar como sendo constante, ou seja

$$d\phi/dt \approx L/(\mu r_0^2) = (g(r_0)/r_0)^{1/2} = \Delta\phi/\Delta t \quad (25)$$

Para $\Delta t = T/2$ temos para a mudança do ângulo polar

$$\Delta\phi = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{g(r_0)}{r_0}} = \pi \left(3 + r_0 \frac{g'(r_0)}{g(r_0)}\right)^{-1/2} \quad (26)$$

Da Eq. (26), junto com $F(r) = -\mu g(r)$ e $F(r) = -k/r^n$, obtemos $g'(r)/g(r) = -n/r$ e com isso

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{\sqrt{3-n}} \quad (27)$$

Os pontos extremos de r chamam-se *apsides* (periapse, apoapse) e $\Delta\phi$ é o ângulo entre dois apses (= ângulo entre as posições r_{\min} e r_{\max}), e é notável que $\Delta\phi$ não depende do raio r_0 .

No caso de uma elipse de Kepler temos $n = 2$, e, conseqüentemente, $\Delta\phi = \pi$. Para um elétron circulando no campo de um fio carregado (ou também para um elétron num capacitor cilíndrico, cujas linhas de força também são radiais), temos $n = 1$ e $\Delta\phi = \pi/(2)^{1/2} \approx 127,3^\circ$.

Deste resultado se faz uso nos laboratórios da física atômica para produzir feixes monoenergéticos de elétrons que são usados, por exemplo, para determinar as estruturas energéticas de moléculas. Na seguinte figura vemos claramente como elétrons, que não diferem muito em energia, são concentrados depois de haver-se movido por 127° num campo radial central. O programa do fio carregado (5.2.3) foi simplesmente copiado três vezes. Tenho acrescentado todo este programa, pois, mais adiante, precisaremos dele para ilustrar o movimento de três planetas.

```

• reset() //elétrons monoenergéticos
x0:=0:y0:=1://posição inicial
vx0:=1:// coordenada-x de v0
vy0:=0:
r2(t):=x(t)^2+y(t)^2:
//Sistema das equações diferenciais com valores iniciais

IVP1:={x'(t)=-x(t)/r2(t),y'(t)=-y(t)/r2(t),
x(0)=x0,x'(0)=vx0,y(0)=y0,y'(0)=vy0}:

fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp1:=numeric::ode2vectorfield(IVP1, fields):
Y1 := numeric::odesolve2(ivp1):

IVP2:={x'(t)=-x(t)/r2(t),y'(t)=-y(t)/r2(t),
x(0)=x0,x'(0)=vx0,y(0)=y0,y'(0)=0.05}:

fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp2:=numeric::ode2vectorfield(IVP2, fields):
Y2 := numeric::odesolve2(ivp2):

IVP3:={x'(t)=-x(t)/r2(t),y'(t)=-y(t)/r2(t),
x(0)=x0,x'(0)=vx0,y(0)=y0,y'(0)=-0.05}:

fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp3:=numeric::ode2vectorfield(IVP3, fields):
Y3 := numeric::odesolve2(ivp3):

//Animation

dt:=0.1:imax1:=50:

plot(
plot::Point2d(Y1(t)[1], Y1(t)[2],
Color = RGB::Blue,VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm) $ t in [i*dt $ i = 0..imax1],

plot::Point2d(Y2(t)[1], Y2(t)[2],
Color = RGB::Red,VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm) $ t in [i*dt $ i = 0..imax1],

```

```

plot::Point2d(Y3(t)[1], Y3(t)[2],
Color = RGB::Green,VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm) $ t in [i*dt $ i = 0..imax1],

plot::Line2d([Y1(t - dt)[1], Y1(t - dt)[2]],
[Y1(t)[1], Y1(t)[2]], Color = RGB::Blue,VisibleAfter = t)
$ t in [i*dt $ i = 1..imax1],

plot::Line2d([Y2(t - dt)[1], Y2(t - dt)[2]],
[Y2(t)[1], Y2(t)[2]], Color = RGB::Red,VisibleAfter = t)
$ t in [i*dt $ i = 1..imax1],

plot::Line2d([Y3(t - dt)[1], Y3(t - dt)[2]],
[Y3(t)[1], Y3(t)[2]], Color = RGB::Green,VisibleAfter = t)
$ t in [i*dt $ i = 1..imax1],

plot::Line2d([0,0],[0.79,-0.6],Color = RGB::Black),
plot::Line2d([0,0],[-0.95,-0.29],Color = RGB::Black),

Scaling=Constrained):

```

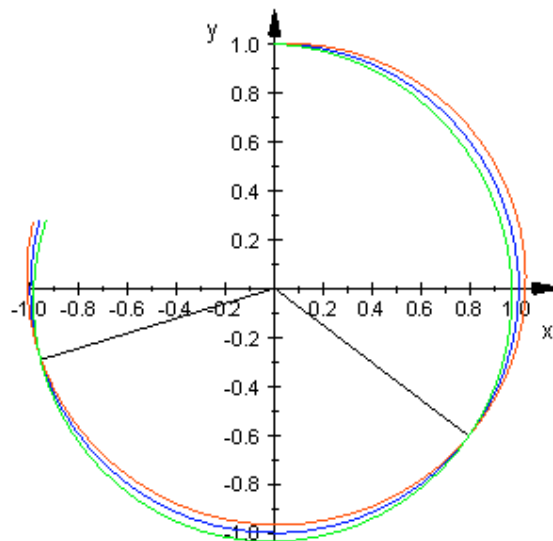


Fig.: 5.3-5

Elétrons que penetram num capacitor cilíndrico com uma variação de energia de $\Delta E = E - E(r_0)$ vão primeiro divergir, mas, depois de 127° , vão se cruzar num foco. Daí é possível extrair tais elétrons que têm energias numa faixa de $\pm \Delta E$. Mas o capacitor cilíndrico não só funciona como filtro de energia, mas também tem a propriedade de unir tais elétrons que entram o capacitor com uma pequena divergência angular. Esses elétrons vão oscilar em torno do raio $r = r_0$.

No intervalo $T/2$ o ângulo ϕ varre o intervalo $\Delta\phi$. Para um período completo, precisa-se um intervalo angular de $2\Delta\phi$. Se este intervalo ou um múltiplo inteiro dele caber exatamente em 2π a trajetória perturbada será fechada.

Visto que o número i das oscilações completas cabendo em 2π deve ser um número natural, obtemos com $i = 2\pi/(2\Delta\phi) = (3-n)^{1/2}$ a condição para que a trajetória seja fechada. Isso sucederá para $n = 2; -1; -6; -13$ etc.

Os casos $n = 2$ e $n = -1$ referem-se às órbitas dos planetas e ao oscilador harmônico, respectivamente.

Pelo fato de que para um elétron num campo de um fio carregado ou dentro de um capacitor cilíndrico carregado $n = 1$, tem a consequência de que suas órbitas não podem ser fechadas.

Os nossos cálculos perturbativos poderíamos, também, aplicar ao planeta Mercúrio que sofre, como todos os planetas, perturbações de sua órbita devido à sua interação com outros planetas. Um tal cálculo dá que o periélio do Mercúrio avança 531 segundos de arco por século. Mas o avanço observado é de 574 " de arco por século. A teoria da relatividade geral de Einstein explica essa diferença de 43" de arco por século. É isso uma das muitas provas da exatidão dessa teoria.

Na próxima seção vamos estudar as perturbações das órbitas planetárias devido à presença de outros planetas. Para calcular o movimento de três corpos temos que tomar em consideração as forças que eles exercem um sobre o outro. Já na seção 4 consideramos sistemas construídos de um grande número de partículas. Mas essas partículas não podiam realizar movimentos independentes, pois estavam ligadas uma à outra por hastes finas e rígidas. Na seção "Problema de n Corpos" todos os corpos serão livres.

Outro exemplo de um cálculo perturbativo estudaremos no capítulo 6 no caso de um oscilador anarmônico.

5.3.4 Espalhamento de partículas alfa (II) (Espalhamento Rutherford)

No parágrafo 5.2.2 demonstramos a trajetória hiperbólica de uma partícula positivamente carregada e repulsada por um centro positivo (núcleo pesado). Naquele parágrafo anunciamos também a parte teórica desta experiência. Nosso tema de hoje será, precisamente, o espalhamento de partículas num campo Coulombiano com $k < 0$ e $E_i > 0$.

Para familiarizar-nos com um exemplo importante, falaremos do famoso experimento de *Rutherford* (investigue no internet sobre dados biográficos deste grande físico!) que teve como meta a medição do raio nuclear.

A base teórica é a interação Coulombiana entre um núcleo atômico, carregado, no caso do ouro, com a carga $+Ze$, onde $Z = 79$, e uma partícula alfa (= núcleo do átomo de hélio) com carga $+2e$. (Na realidade, usou-se nesta experiência um feixe de partículas alfa, com uma energia de 7,38 MeV ($1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ J), emitidas por uma fonte de algumas miligramas de Ra (rádio).

Na lei de força $F(r) = -k/r^2$ temos no caso da força Coulombiana

$$k = - 2Ze^2/(4\pi\epsilon_0) = - 3.644 \cdot 10^{-26} \text{ Nm}^2.$$

A seguinte figura 5.3-6 mostra um esquema do experimento.

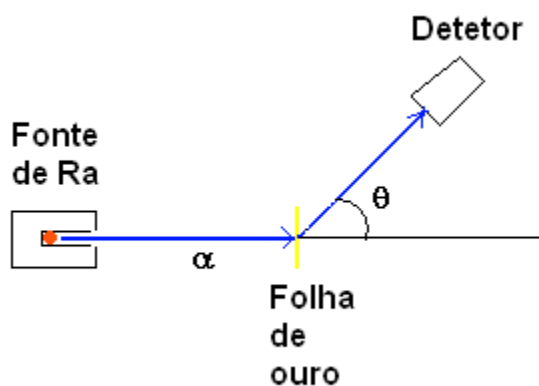


Fig.: 5.3-6

As "alfas" incidiram sobre uma fina folha de ouro (a espessura foi de aproximadamente 400 átomos) e foram desviadas pelos núcleos dos átomos de ouro. Um detetor (uma fina tela com sulfato de zinco montada num microscópio) "contava" as partículas que foram espalhadas a um ângulo θ da direção de incidência. Rutherford, junto com seus colaboradores *Geiger* (inventou mais tarde o contador de Geiger) e *Marsden*, esperava poder confirmar o "modelo de pudim de passas" do seu ex chefe J.J. Thomson. Mas os resultados das suas observações não concordaram com as esperanças.

Thomson (prêmio Nobel de Física em 1906) sugeriu um modelo que descrevia o átomo como um volume de carga positiva com elétrons (as passas!) embutidos, ao modo das sementes numa melancia (ou como as passas num pudim de passas). Os resultados experimentais foram assombrosos. Observou-se que a maior parte das partículas alfa passava através da folha de ouro como se estivesse percorrendo o vácuo. Além disso, um pequeno número das partículas apresentou desvios θ muito grandes. Algumas partículas eram mesmo refletidas, ou seja, sofreram desvios com ângulos de quase π .

Estes grandes desvios não se esperou com base no modelo de Thomson. Para poder explicar as observações, Rutherford postulou que a carga positiva do átomo fica concentrada num núcleo cujo raio é cerca de 10^4 vezes menor que o do átomo e ele imaginou que os elétrons eram partículas que se deslocavam em órbitas em torno do núcleo positivamente carregado, da mesma maneira que os planetas orbitam em torno do Sol (modelo planetário).

Cabe, agora, repetir os cálculos de Rutherford que conduzem a uma fórmula que permitirá, por exemplo, calcular o número de partículas espalhadas ao ângulo θ .

Consideraremos outra vez a figura 5.2.2 onde uma partícula alfa saiu de uma fonte Ra e está acercando-se a um núcleo pesado de ouro.

Na sua distância quase "infinita" do núcleo a partícula tem somente energia cinética

$$E_i = E_k = \mu v_o^2/2 \quad (1)$$

v_o é a velocidade que tem a "alfa" quando fica ainda longe do centro.

O módulo do momento é $P = \mu v_o$. A distância do eixo de incidência é o parâmetro do impacto $b = L/P$, que aqui tem o valor $b = L/(\mu v_o)$.

No parágrafo 5.1.3 vimos (conf. Eq. (37)) que o co-seno do ângulo da assíntota é dado por $1/\epsilon$. Introduzindo o valor de ϵ segundo à Eq. (30) de 5.1.3 obtemos

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu b v_0^2}{k} \right)^2} \quad (2)$$

o que podemos transformar em

$$\tan \alpha = \frac{\mu b v_0^2}{|k|} = \cot \frac{\theta}{2} \quad (3)$$

Esta relação vira-se especialmente simples quando introduzimos r_{\min} , a distância mínima entre o núcleo e a partícula alfa. Pois, com a lei de conservação da energia

$$\mu v_0^2/2 = \mu v_{\min}^2/2 + |k|/r_{\min} = |k|/r_{\min}$$

obtemos $r_{\min} = |k|/E_k = 2 Ze^2/(4\pi\epsilon_0 \cdot 0.5\mu v_0^2)$. Substituindo isso na Eq. (3), teremos para o parâmetro de impacto a simples expressão

$$b = \frac{r_{\min}}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (4)$$

Mais adiante precisaremos da derivada de b :

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{r_{\min}}{4} \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \quad (5)$$

Colocando os valores numéricos, obtemos para partículas alfa de 7,38MeV uma velocidade inicial de $v_0 = 1,96 \cdot 10^7$ m/s e para ouro $r_{\min} = 2,9 \cdot 10^{-14}$ m.

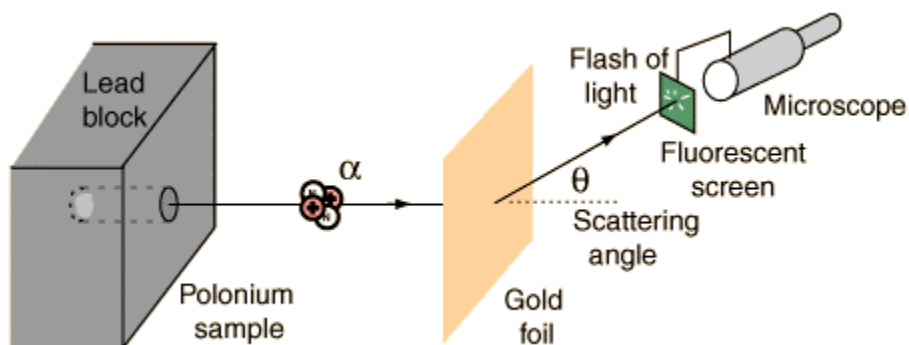
Falta-nos, agora, uma "interface" que conecta as equações (3) e (4) com as grandezas que se podem medir no laboratório (ângulo de espalhamento, número de partículas, ângulo sólido), pois ninguém pode medir b , -ao fim e ao cabo, temos que livrar-nos outra vez de b . Não podemos, na realidade, fazer uma experiência com uma partícula α e um núcleo só, sempre temos um feixe de área transversal A que impinge sobre uma folha de espessura t . Temos nt centros de espalhamento, com n = número de núcleos por unidade de volume. Suponhamos que a distância entre os núcleos seja tal que uma partícula desviada não vai sofrer outro espalhamento por um segundo núcleo. O número de centros de espalhamento para nosso feixe é, então, nAt . Cada partícula que se acerca ao alvo com um parâmetro de impacto entre 0 e b será desviada, pelo menos, no ângulo θ .

A área $\sigma = \pi b^2$ chama-se seção de choque e os $n \cdot A \cdot t$ centros de espalhamento tem a seção de choque total de $n \cdot A \cdot t \cdot \sigma$.

A fração de partículas alfa, que são espalhadas por mais de θ , é

$$f = n \cdot A \cdot t \cdot \sigma / A = n \cdot t \cdot \sigma = N / N_0 \quad (6)$$

N = número de partículas espalhadas, N_0 = número de partículas incidentes durante o tempo da medição. Traçemos, agora, em torno de cada centro de espalhamento um anel com os raios b e $b+db$. Todas as partículas alfa que incidem paralelamente por este anel vão sair da região de espalhamento num ângulo sólido entre θ e $\theta + d\theta$. Para encontrar o número das partículas desviadas no ângulo sólido $d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta$, derivamos $f=N/N_0$ com respeito a N e dividimos o resultado pelo ângulo sólido $d\Omega$.



Esta figura 5.3-8 é do excelente site "Hyperphysics", onde você pode encontrar muito material sobre "Rutherford scattering".

Obteremos a seguinte expressão

$$df/d\Omega = dN/(N_0 \, d\Omega) = - n \, t \, \pi \, r_{\min}^2 \cotg(\theta/2) d\theta / (8\pi \sin\theta d\theta \cdot \sin^2(\theta/2))$$

O sinal negativo toma em conta que f decresce quando θ aumenta.

Fazendo uso da identidade $\sin\theta = 2 \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ obtemos

$$|df/d\Omega| = n \, t \, r_{\min}^2 / 16 \cdot 1/\sin^4(\theta/2) := K/\sin^4(\theta/2) \quad (7)$$

Dentro de uma série de medições, a constante K permanecerá constante.

A placa do detetor (uma tela fina com sulfato de zinco) tem a distância R da folha de ouro. As partículas desviadas no ângulo sólido vão cair sobre a tela num anel com área $dA = R^2 \, d\Omega = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$.

Daí resulta, finalmente, a famosa fórmula de Rutherford

$$|dN/dA| = K_1/\text{sen}^4(\theta/2), \quad (8)$$

onde a nova constante é $K_1 = K \cdot N_0/R^2$.

A Eq. (8) dá o número de partículas alfa que caíram sobre a unidade de área da tela fluorescente. Os finos mini-flashes, que foram produzidos pelos impactos das partículas espalhadas sobre a tela fluorescente, foram registrados por Geiger e Marsden. Eles tiveram que determinar se o produto $|dN/dA| \cdot \text{sen}^4(\theta/2)$ ficava constante durante uma série de medições.

Com uma folha de ouro eles encontraram $K_1 = 30$ num intervalo de θ entre 30° e 150° , com uma folha de prata observaram $K_1 = 19$.

No limite das possibilidades experimentais da época, eles tinham confirmado o modelo de Rutherford.

Na literatura, usa-se também outras formas da fórmula (8), por exemplo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E_k} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \quad (9)$$

A razão $d\sigma/d\Omega$ é a *seção de choque diferencial* e representa a probabilidade, por unidade de ângulo sólido, de que uma partícula incidente seja espalhada em um ângulo sólido $d\Omega$.

Com o seguinte programa vamos representar os dados experimentais que Geiger e Marsden publicaram em 1913 (esta publicação pode-se ler em inglês na internet: <http://dbhs.wvusd.k12.ca.us/webdocs/Chem-History/GeigerMarsden-1913/GeigerMarsden-1913.html>). A curva teórica segundo Eq. (9) é incluída.

- **reset()://Rutherford**
//P1:=[30,7800]://este valor não foi usado
P2:=[45,1435]:// 1435 impulsos para 45 graus
P3:=[60,477]:
P4:=[75,211]:
P5:=[105,69.5]:
P6:=[120,51.9]:
P7:=[135,43]:
P8:=[150,33.1]:

```

f:=29/(sin(w*PI/360))^4://Eq. (9)
lista_de_pontos:= [P2,P3,P4,P5,P6,P7,P8]:
Pontos:=plot::Point2d(lista_de_pontos[i],Color=RGB::Red)
$ i=1..7:
Teoria:=plot::Function2d(f,Color=RGB::Green,w=50..160):

plot(Pontos,Teoria,
ViewingBoxXRange =0..160,ViewingBoxYRange =0..500)

```

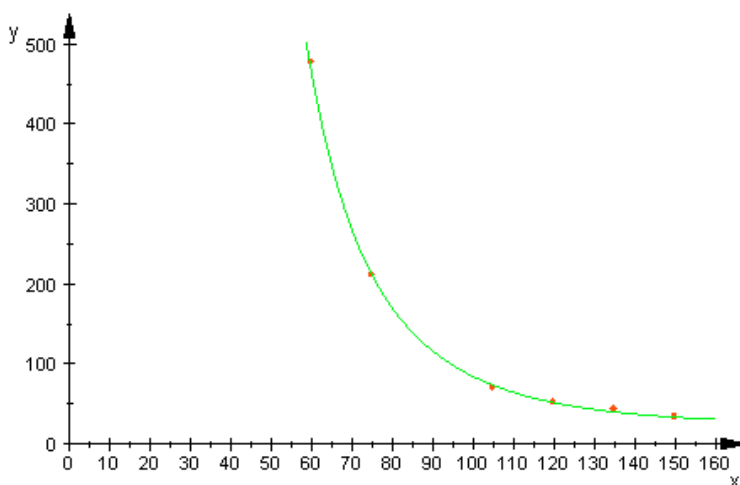


Fig.: 5.3-9

A figura mostra a excelente concordância entre experimento e teoria.

Cabe anotar que os cálculos de Rutherford, que acabamos de reproduzir, se baseiam estritamente na mecânica clássica. Este procedimento é somente admissível para energias muito altas. Para a descrição dos resultados em experimentos com partículas de baixas energias (p. ex. elétrons com menos de 1000 eV), deve-se utilizar cálculos quânticos (fazendo uso da equação de Schroedinger). As curvas de espalhamento mostram, nestes casos, estruturas, que um cálculo clássico não pode reproduzir.

Num experimento moderno de espalhamento entre átomos (núcleos) e partículas (elétrons) não se conta o número de partículas desviadas observando a olho nu os flashes produzidos numa tela fluorescente. Hoje em dia, os projéteis desviados entram num detetor altamente sensível (p.ex. multiplicador de elétrons) através de um pequeno orifício de área dA na distância r do alvo. $d\omega = dA/r^2$ é o elemento do ângulo sólido que recebe as dN partículas espalhadas por segundo na direção θ . ($d\omega$ é só uma parte do elemento $d\Omega$ que foi usado mais em cima.) N_0 é o número de partículas incidentes atravessando a área unitária normal à direção do feixe incidente na unidade de tempo. A razão dN/N_0 é designado por $d\sigma$, ou seja $d\sigma := dN/N_0$.

A razão $d\sigma/d\omega$ depende geralmente do ângulo θ e da energia dos projéteis. O nome da grandeza $d\sigma/d\omega$ é, como em cima no caso de $d\sigma/d\Omega$, *seção de choque diferencial*.

O número das partículas entrando no elemento cônico $d\Omega$ é $N_0 d\Omega \cdot d\sigma/d\omega$ e a seguinte relação importante conecta b e θ com $d\sigma/d\omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = -\frac{b}{\sin\theta} \cdot \frac{db}{d\theta} \quad (10)$$

5.3.5 Com lápis e papel

Uma questão de suma importância é o problema do tempo que um satélite gasta para recorrer parte da sua trajetória ou para completar uma órbita inteira. Temos que voltar ao parágrafo 5.1.3, onde vimos, ao começo, que $dr/dt = (2(E_i - V_{ef})/\mu)^{1/2}$. Vêm agora uma série de transformações que de nenhuma maneira são auto-evidentes. Primeiro chegamos à equação

$$dt = A \cdot (a^2 \varepsilon^2 - (a-r)^2)^{-1/2} \cdot r dr \quad (1)$$

A é uma constante definida como $A := (k/\mu)^{1/2}$.

Para poder integrar a Eq. (1), introduzimos $r dr = rd(a-r)$

$$dt = A \frac{-rd \frac{a-r}{a\varepsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\varepsilon}\right)^2}} \quad (2)$$

Visto que $-r = (a-r)-r$, obtemos

$$dt = A \left[\frac{a\varepsilon \frac{a-r}{a\varepsilon} d \frac{a-r}{a\varepsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\varepsilon}\right)^2}} - \frac{ad \frac{a-r}{a\varepsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\varepsilon}\right)^2}} \right] \quad (3)$$

Parece que não ganhamos nada de útil, mas, com a abreviação

$$z := (a-r)/(a\varepsilon)$$

chegamos a uma expressão que deixa-se integrar

$$dt = a^{3/2} w^{-1/2} \left[-\frac{\varepsilon}{2} \frac{d(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right] \quad (4)$$

com $w := k/\mu$.

Sendo tudo isso óbvio, resta somente integrar a expressão (4) para chegar à

$$t = a^{3/2} w^{-1/2} (-\varepsilon \sqrt{1-z^2} + \arccos z + C) \quad (5)$$

C é uma constante de integração que podemos fazer zero supondo que para $t = 0$ temos $r = a(1-\varepsilon)$ (Pericentro).

Por meio da abreviação $\arccos z = \arccos (a-r)/(a\varepsilon) := h$ chegamos à seguinte expressão simples para o tempo t

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} (h - \sinh) \quad (6)$$

O tempo T para uma órbita elíptica completa será

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \quad (7)$$

-o que não é outra coisa que a terceira lei de Kepler.

O intervalo de tempo que um satélite precisa para chegar do ponto r_1 até o ponto r_2 da sua trajetória será, finalmente,

$$\Delta t = a \sqrt{\frac{a\mu}{k}} [(h_1 - h_2) - \varepsilon(\sinh_1 - \sinh_2)] \quad (8)$$

onde $h_1 = \arccos [(1-r_1/a)/\varepsilon]$ e $h_2 = \arccos [(1-r_2/a)/\varepsilon]$.

Da maneira semelhante, podemos encontrar também equações para órbitas hiperbólicas ou parabólicas.

Normalmente é mais fácil determinar o tempo T do que o eixo maior a da elipse. Uma equação como a (7) servirá aos astrônomos para determinar a distância a .