5.2 Movimento devido a forças centrais

5.2.1 Trajetória do planeta Mercúrio

Mercúrio é o planeta mais próximo do Sol e tem um quarto da gravidade terrestre. O seu diâmetro é só de 4 880 quilômetros e ele tem uma distância média do Sol de 58 milhões de quilômetros. A temperatura máxima é de 430 ^oC positivos e a mínima é de 180 ^oC negativos. No Mercúrio, um ano dura 88 dias terrestres.

Em 3 de agosto de 2004, a NASA lançou a sonda *Messenger* (mensageiro) no espaço para decifrar alguns dos segredos que ainda estão conectados com este planeta menos estudado do sistema solar. A Messenger levará sete anos para percorrer quase 8 bilhões de quilômetros. Mercúrio não está tão longe assim, mas Messenger tem, na sua viagem ao Mercúrio, muitas outras tarefas para realizar. A sonda vai sobrevoar a Terra de novo em 2005, depois partirá em direção a Vênus e, só então, rumar para o Mercúrio.

Das muitas enigmas que embrulham o planeta é de mencionar o problema do seu campo magnético. O campo magnético da Terra é gerado pelos movimentos de um oceano de ferro derretido, que envolve o núcleo sólido do planeta. Os instrumentos da Messenger confirmarão se o núcleo de Mercúrio -que ocupa 70% do volume daquele corpo- também está em parte derretido ou se contém apenas uma esfera maciça de ferro imantado.

O nosso interesse no Mercúrio é, obviamente, o estudo da *trajetória* do planeta. Diferente da nossa maneira de abordar este problema, aplicada na seção anterior, vamos agora diretamente resolver -numericamente- as equações diferenciais da segunda lei de Newton, da mesma forma como fizemos no capítulo 2.5, utilizando o programa do parágrafo 2.5.1.

Primeiro temos que falar sobre a redução das variáveis reais a tais sem unidades. Com estas variáveis reduzidas podemos utilizar números pequenos e confortáveis para o cálculo numérico.

A única força que atua sobre o planeta é a força gravitacional. As componentes cartesianas desta força são F_x = mx" = -Cm x/r^3 e F_y = my" =- Cmy/r^3. Para a aceleração obtemos as seguintes equações:

$$x'' = - C\,x / r^3; \quad y'' = -C\,y / r^3 \qquad (1)$$

onde significam $x'' = d^2x/dt^2$, $C := GM$ e $r=(x^2 + y^2)^{1/2}$

O sistema (1) consta de duas equações diferencias acopladas. Veja os comentários em 2.5.1. (Não tomamos em conta as interações com outras planetas!)

Para simplificar a escrita e os cálculos, introduzimos novas unidades para comprimento e tempo, a saber x_0 e t_0, cujos valores devemos ainda fixar.

Escrevemos $x = X \cdot x_0$, $r = R \cdot x_0$ e $t = T \cdot t_0$. As novas variáveis X, R e T não têm unidades.

A velocidade $v = dx/dt$ toma a forma $v = dx/dt = x_0/t_0 \cdot dX/dT$ e a aceleração é agora $a = d^2x/dt^2 = x_0/t_0^2 \cdot d^2X/dT^2$. $V = dX/dT = v\, t_0/x_0$.

A nova forma da equação $x'' = - C\,x / r^3$ será

$$d^2x/dt^2 = x_0/t_0 \cdot d^2X/dT^2 = - C/x_0^2 \cdot X/R^3 \quad \text{ou seja}$$

$$d^2X/dT^2 = - Ct_0^2/x_0^3 \cdot X/R^3 \qquad (2)$$

Só precisamos pôr

$$Ct_0^2/x_0^3 := 1 \qquad (3)$$

para obter a equação do movimento sem constantes

$$d^2X/dT^2 = - X/R^3 \qquad (4)$$

Já que queremos traçar a órbita do Mercúrio, é razoável tomar x_0 igual ao raio da órbita da Terra, que é chamado *unidade astronômica* (A.u.)

$$x_0 = 1{,}496 \cdot 10^{11}\text{m} \qquad (5)$$

Nossa nova unidade do tempo será, então,

$$t_0 = (x_0^3/C)^{1/2} = 5{,}027 \cdot 10^6 \text{ s} \qquad (6)$$

O período do Mercúrio (duração de um ano) é de 88 dias terrestres. Os dados do perihélio são v_0 = 58,9 km/s e r_0 = 46,0 $\cdot 10^6$ km. Suponhamos que o planeta está no perihélio no tempo T = 0. Um intervallo de tempo de $\Delta T = 0.05$ significa um tempo real de $\Delta t = \Delta T \cdot t_0 = 0.05 \cdot t_0 = 0.05 \cdot 5{,}027 \cdot 10^6\text{s}$ = 2.91 dias. Na animação do programa colocamos cada $dt = \Delta T = 0.005 = 0.291$ dias ≈ 7 horas um ponto da trajetória. Uma órbita completa corresponderá a 88 dias.

As *condicões iniciais* são:

$X(0) = x(0)/x_0 = 46 \cdot 10^9$ m/x_0 = 0,3075
$Y(0) = 0$,
$dX(0)/dT = 0$,
$dY(0)/dT = v_0 t_0/x_0 = 58{,}9 \cdot 10^3$ m/s$\cdot t_0/x_0$ = 1,982

Segue aqui o programa com animação. O programa é uma simplificação do nosso programa da seção 2.5.1.

```
• reset()://trajetória de Mercúrio

  DIGITS:=5:

  x0:=0.3075:y0:=0://posição inicial

  vx0:=0:// coordenada-x de v0

  vy0:=1.982://coordenada-y de v0

  r3(t):=(x(t)^2+y(t)^2)^(3/2):

  //Sistema das equações diferencais com valores iniciais

  IVP:={x''(t)=-x(t)/r3(t),y''(t)=-y(t)/r3(t),

  x(0)=x0,x'(0)=vx0,

  y(0)=y0,y'(0)=vy0}:

  fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:

  ivp:=numeric::ode2vectorfield(IVP, fields):

 Y := numeric::odesolve2(ivp):

//tabela de valores reduzidos:
print(Unquoted,"T","X","Y");
for i from 0 to 2 step 0.2 do
print(i,Y(i)[1],Y(i)[2]):
end_for;
```

```
//Animation
dt:=0.005:imax1:=350:
plot(
plot::Point2d(Y(t)[1], Y(t)[2],
Color = RGB::Blue,
VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm
) $ t in [i*dt $ i = 0..imax1],
plot::Line2d([Y(t - dt)[1], Y(t - dt)[2]],
[Y(t)[1], Y(t)[2]], Color = RGB::Red,
VisibleAfter = t)
$ t in [i*dt $ i = 1..imax1])
```

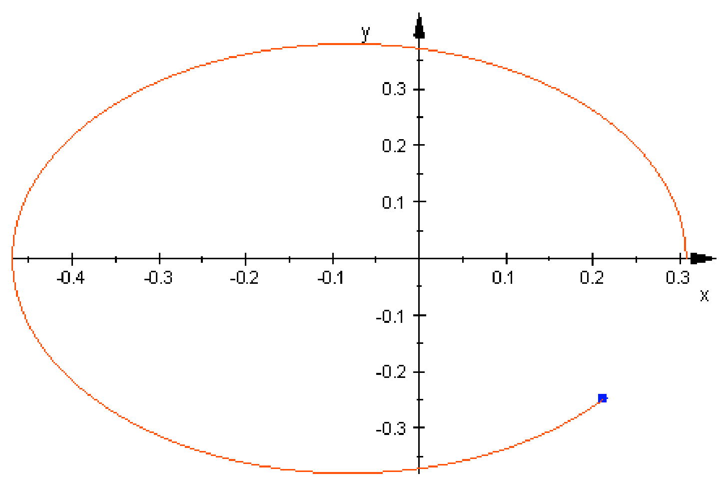

Fig.: 5.2-1

5.2.2 Espalhamento de partículas Alfa

Com nosso programa do parágrafo anterior é fácil mostrar uma trajetória repulsiva, por exemplo, a trajetória de uma partícula alfa desviada pelo núcleo de um átomo de ouro. Mais tarde vamos estudar a teoria deste problema pormenorizado, agora queremos somente mostrar uma típica trajetória hiperbólica de repulção.

As constantes têm, neste exemplo, os seguintes valores:

C = 5,6 m^3/s^2, r_0 = $14\cdot10^{-15}$m = 14 F (1F = 1 *Fermi* é usado na física nuclear e tem o valor de $1\cdot10^{-15}$ m), v_0 = $2\cdot10^7$ m/s (velocidade da partícula), t_0 = $7\cdot10^{-22}$ s. O valor de y_0 é o parâmetro de impacto b. Na figura usamos y_0 = b = 0,4 F.

```
• reset()://espalhamento alfa
  DIGITS:=5:b:=0.4://parâmetro de impacto
  x0:=-5://posição inicial
  vx0:=1:// coordenada-x de v0
  vy0:=0:
  r3(t):=(x(t)^2+y(t)^2)^(3/2):
  //Sistema das equações diferencais com valores iniciais
  IVP:={x''(t)=x(t)/r3(t),y''(t)=y(t)/r3(t),
  x(0)=x0,x'(0)=vx0,
  y(0)=b,y'(0)=vy0}:
  fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
  ivp:=numeric::ode2vectorfield(IVP, fields):
  Y := numeric::odesolve2(ivp):
```

```
//Animation
dt:=0.05:imax:=200:
plot(plot::Point2d(Y(t)[1], Y(t)[2],
Color = RGB::Blue,VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm)
$ t in [i*dt $ i = 0..imax],
plot::Point2d(0,0,Color = RGB::Green,
PointSize = 3*unit::mm),
plot::Line2d([Y(t - dt)[1], Y(t - dt)[2]],
[Y(t)[1], Y(t)[2]], Color = RGB::Red,
VisibleAfter = t) $ t in [i*dt $ i = 1..imax],
ViewingBox=[-5..1,0..5],Scaling=Constrained)
```

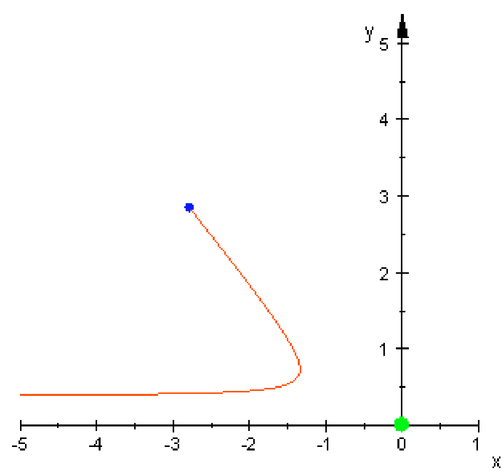

Fig.: 5.2-2

5.2.3 Movimento num campo r^{-1}

Até agora consideramos campos centrais inversamente proporcionais ao quadrado da distância, e a natureza vigia estritamente sobre a preservação do expoente 2. As digressões de este valor são menores de $2 \cdot 10^{-16}$. Mas, nos laboratórios, podemos realizar casos com expoentes bem diferentes de 2, por exemplo o expoente 1 num filtro eletrostático para as velocidades de partículas carregadas, como elétrons.

Neste parágrafo utilizamos, outra vez, o programa do planeta Mercúrio, mas, esta vez, para o caso de uma força inversamente proporcional à distância, $F(r) = k/r$.

Injeta-se um elétron perpendicularmente num campo elétrico que se forma em torno de um fio reto infinito e carregado uniformemente com q Coulomb por metro, C/m. O elétron vai descrever trajetórias em torno do fio. Um caso especial será uma órbita circular.

Por simetria, as linhas de força são radiais e, se q for positiva, dirigidas para fora do fio, compare com o parágrafo 4.5.3. Pela aplicação da lei de Gauss podemos facilmente mostrar que

$$E(r) = q/(2\pi\varepsilon_0) \cdot r^{-1} \quad (7)$$

A constante ε_0 é denominada *permissividade elétrica do vácuo*. No SI de unidades seu valor é $8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2}$.
Para a força que atua sobre o elétron obtemos

$$F(r) = -\ qe/(2\pi\varepsilon_0) \cdot r^{-1} \qquad (8)$$

As duas componentes cartesianas da aceleração são

$$x'' = -\ C\ x\ r^{-2} \quad \text{e} \quad y'' = -\ C\ y\ r^{-2} \qquad (9)$$

onde $C = q\ e\ /(2\pi\varepsilon_0\ m_e)$ e $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

(Compare as eq. (9) com $x'' = -\ C\ x / r^3$; $y'' = -C\ y / r^3$ (1) !)

e = carga elementar: $1{,}602177 \cdot 10^{-19}$ C
m_e = massa do elétron: $9{,}10939 \cdot 10^{-31}$ kg
e/m_e = razão carga/massa para o elétron: $1{,}7588 \cdot 10^{11}$ C/kg

Para que o elétron se mova sobre uma *órbita circular*, deve ser $F(r) = -mv^2/r$.
De esta relação resulta a seguinte equação para a velocidade v

$$v = \sqrt{\frac{qe}{2\pi\varepsilon_0 m_e}} = \sqrt{C} \qquad (10)$$

Ou seja, elétrons que se movem ao longo de uma trajetória circular têm a mesma velocidade, independente do raio. Vou mostrar dois programas para representar as trajetórias do elétron.

No **primeiro programa** vamos usar variáveis reduzidas, no **segundo** colocamos as variáveis com as unidades normais de *s*, *m* e *m/s*.

No primeiro programa escolhemos como novas unidades $x_0 = 10^{-2}$ m e $t_0 = 10^{-6}$ s. Uma unidade natural para a velocidade seria $v_0 = 10^4$ m/s. Esta escolha tem como conseqüência que $C= 10^8$ m^2 s^{-2}, ver Eq. (10). Para que C tenha este valor, temos que tomar $q = 3{,}163\cdot 10^{-14}$ C/m. Utilizando estes valores, obtemos $\mathbf{Ct_0^2/x_0^2 = 1}$.

Assim significa, no primeiro programa, y0 = 5 um comprimento de $5\cdot 10^{-2}$ m = 5 cm.
A velocidade vx0 = 1 significa uma velocidade real de 10^4 m/s.
O intervalo dt = 0.05 é, na realidade, igual a $5\cdot 10^{-8}$ s.

No **Programa 2** introduzimos y0 = 0.05 m, vx0 = 1E4 m/s e dt = 5E-8 s.

Devido a um intervalo de só dt = $5\cdot 10^{-8}$s, é impossível ver a animação, somente podemos ver o gráfico final (devemos utilizar o comando **Animation** e pressionar **End**).

Programa 1:

```
• reset()://fio carregado com variáveis reduzidas
  DIGITS:=10:
  x0:=0:
  y0:=5://5cm
  vx0:=1://10000m/s
  vy0:=0:
  r2(t):=x(t)^2+y(t)^2:
  //Sistema das equações diferencais
  IVP:={x''(t)=-x(t)/r2(t),y''(t)=-y(t)/r2(t),
  x(0)=x0,x'(0)=vx0,
  y(0)=y0,y'(0)=vy0}:
  fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
  ivp:=numeric::ode2vectorfield(IVP, fields):
  Y := numeric::odesolve2(ivp):
```

```
//Animation
dt:=0.05://5·10-8 s
imax:=1000:
plot(
plot::Point2d(Y(t)[1], Y(t)[2], Color = RGB::Blue,
VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm) $ t in [i*dt $ i = 0..imax],

plot::Point2d(0,0, Color = RGB::Green,
PointSize = 3*unit::mm),plot::Line2d([Y(t - dt)[1],
Y(t - dt)[2]],[Y(t)[1], Y(t)[2]], Color = RGB::Red,
VisibleAfter = t) $ t in [i*dt $ i = 1..imax],
Scaling=Constrained)
```

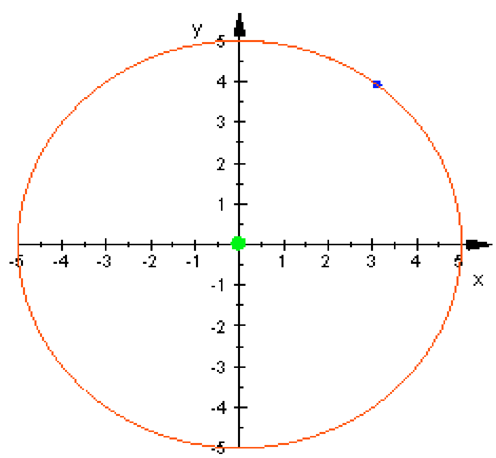

Fig.: 5.2-3

Vemos a trajetória circular para v = 10^4 m/s. Você poderá utilizar outros raios, ou seja, outros valores para y0, p.ex. y0 =1, para ver que sempre obterá um círculo como trajetória.

Se você mudar de velocidade, p. ex, vx0 = 1.2 (= 12 000 m/s), o resultado será uma trajetória em forma de roseta que não se fechará. Veja a seguinte figura:

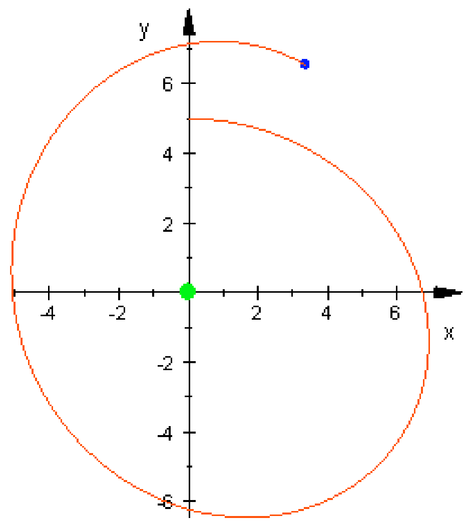

Fig.: 5.2-4

O elétron na figura 5.2-4 teve uma velocidade de 12 000 m/s (red.:1.2). A trajetória não se fecha mais.

Programa 2:

Com a seguinte variação do programa anterior é possível introduzir os variáveis em forma "normal", ou seja, comprimentos em *m*, tempos em *s* e velocidades em m/s. A animação não pode-se ver, somente é possível ver a figura final.

- ```
  reset()://elétron e fio carregado
  DIGITS:=10:
  Q:=3.1648E-14://C/m
  em:=1.7589E11://e/m
  E0:=8.85416E-12:
  C:=Q*em/(2*PI*E0):
  x0:=0:
  y0:=0.05://m
  vx0:=10000://m/s
  vy0:=0:
  ```
  ```

```
r2(t):=x(t)^2+y(t)^2:

//Sistema das equações diferencais com valores iniciais
IVP:={x''(t)=-C*x(t)/r2(t),y''(t)=-C*y(t)/r2(t),

x(0)=x0,x'(0)=vx0,y(0)=y0,y'(0)=vy0}:
fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp:=numeric::ode2vectorfield(IVP, fields):
Y := numeric::odesolve2(ivp): ...


//somente pode-se ver a figura final com "Animation/End"

dt:=5E-8://s
imax:=1000:...
```

O gráfico é um círculo como na figura 5.2-3, só temos nos eixos metros em vez de centímetros, p. ex. 0.05 em vez de 5, etc.

(Utilize também outros valores iniciais, p.ex. v = 10000 m/s, vx0 = 5000 m/s, vy0 = 8660 m/s, x0 = 0.025 m, y0 = 0.0433 m. O raio é 0.05 m. Também com estes dados obtém-se uma trajetória circular.)

A seguinte figura foi traçada com vx0 = 10000 m/s, vy0 = 8000 m/s e dt = 5E-7s. Com estes velocidades resulta uma órbita irregular.

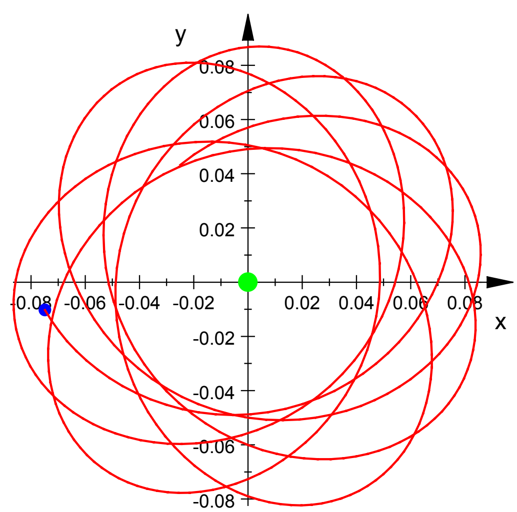

Fig.: 5.2-5