

5 Movimento devido a forças centrais

Forças centrais apontam sempre para o mesmo ponto do espaço e são da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \mathbf{r}/r \quad (1)$$

Vimos nas seções anteriores, veja 4.6.2, que as forças centrais pertencem à importante classe de forças conservativas. Sabemos que uma força é conservativa quando sua dependência com o vetor-posição \mathbf{r} é tal que o trabalho W pode ser sempre expresso como a diferença entre os valores de uma quantidade $E_p(\mathbf{r})$ (energia potencial) nos pontos inicial e final. Então, se \mathbf{F} é uma força conservativa, temos

$$E_p(\mathbf{r}) - E_p(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

Muitas forças na natureza são centrais:

Exemplo 1

A Terra move-se em torno do Sol sob a influência de uma força central cuja direção passa sempre pelo centro do Sol. Assim, o momento angular da Terra relativo ao Sol é constante. Já vimos que uma consequência disso é o fato que o raio vetor da Terra varre áreas iguais em tempos iguais (lei das áreas ou segundo lei de Kepler, ver 4.2.3)

Exemplo 2

Outro exemplo é o átomo de hidrogênio. O elétron deste átomo move-se sob a ação de uma força central devida à interação eletrostática com o núcleo (próton), com a direção da força sempre dirigida para o núcleo.

Exemplo 3

Historicamente, o problema do espalhamento de partículas alfa (experiência de Rutherford) por núcleos atômicos foi tratado primeiro como um problema clássico de dois corpos, resultando na famosa fórmula de Rutherford.

Quando tratamos de movimento sob a influência de forças centrais, há dois teoremas de conservação:

princípio de conservação do momento angular: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.} \quad (3)$

princípio de conservação da energia: $E = m v^2/2 + E_p(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (4)$

Visto que o movimento está contido num plano, é vantajoso usar as coordenadas polares r e φ :

$$L = m r^2 d\varphi/dt \quad (5)$$

$$E = m ((dr/dt)^2 + r^2 (d\varphi/dt)^2)/2 + E_p(r) \quad (6)$$

Na seção 5.2 usaremos coordenadas cartesianas num tratamento numérico de nosso problema.

5.1 O problema dos dois corpos

Os exemplos mencionados pertencem ao grupo dos problemas de dois corpos, que introduzimos já no parágrafo 4.4.2.

Nos lembramos que se pode reduzir as duas equações do movimento dos dois corpos à forma de um corpo só:

$$\mathbf{F} = \mu d^2\mathbf{r}/dt^2 \quad (7)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ é o vetor posição da massa reduzida $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m_2 / (1 + m_2/m_1)$. Os vetores posição \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 são medidos do centro de massa dos dois corpos que podemos considerar como estando em repouso.

Substituindo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \mathbf{r}/r$ na equação (7), teremos

$$F_r = \mu a_r = \mu(d^2r/dt^2 - r d\varphi/dt) \quad (8)$$

$$F_\varphi = \mu a_\varphi = \mu(r d^2\varphi/dt^2 + 2 dr/dt \cdot d\varphi/dt) = 0 \quad (9)$$

A última equação podemos integrar sem conhecer a força. Multiplicando com r dá

$$\mu(r^2 \cdot d^2\varphi/dt^2 + 2r \cdot dr/dt \cdot d\varphi/dt) = d(\mu r^2 d\varphi/dt)/dt = 0 \quad (10)$$

A constante $\mu r^2 d\varphi/dt$ não é outra coisa que o momento angular L , veja eq. (5).

Substituindo $d\varphi/dt = L/(\mu r^2)$ na eq. (8) nos dá

$$\mu d^2r/dt^2 - L^2/(\mu r^3) = F(r) \quad (11)$$

O problema se simplifica introduzindo uma nova variável, a saber: $u = 1/r$.

De (11) chegamos, depois de algumas manipulações, à seguinte relação

$$\left(\frac{d^2\mathbf{u}}{d\phi^2} + \mathbf{u}\right)u^2 = -\frac{\mu}{L^2}\mathbf{F}(r) \quad (12)$$

Descartando a energia do movimento do CM, fica para a *energia interna* do sistema

$$E_i = \mu(dr/dt)^2/2 + E_p^{int}(r) := E_{kin} + E_p(r) \quad (14)$$

Chamaremos $E_p(r)$ de *potencial central*, E_{kin} é a energia cinética com respeito ao CM. Utilizando (5) e (6), podemos escrever

$$E_i = \frac{1}{2}\mu v^2 + (L^2/(2\mu r^2) + E_p(r)) := \frac{1}{2}\mu v^2 + E_p^{ef}(r) \quad (15)$$

O termo $E_p^c := L^2/(2\mu r^2)$ é chamado de *energia potencial centrífuga*. E_p^c é muito pequena para grandes distâncias, mas cresce muito rapidamente para pequenas distâncias da origem. E_p^{ef} é a energia potencial *efetiva*:

$$E_p^{ef}(r) := E_p^c + E_p(r) \quad (16)$$

Na literatura usa-se muito os seguintes símbolos

$$E_i = T + V(r) \quad \text{e} \quad V_{ef}(r) = V(r) + L^2/(2\mu r^2)$$

Pela introdução do *potencial efetivo* o princípio da energia toma a mesma forma como no caso unidimensional. Resolvendo (15) para $v = dr/dt$ e integrando, obtemos

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E_i - V_{ef}(r')]}]} = f(r) \quad (17)$$

Esta equação nos dá a distância r como função do tempo t . Temos de introduzir, então, $r(t)$ na relação $d\phi/dt = L/(\mu r^2)$. Por integração obtemos

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{L}{\mu r(t')^2} dt' \quad (18)$$

Com $r(t)$ e $\phi(t)$ determinadas, está resolvido -em princípio- o problema do movimento dos dois corpos. Mas, infelizmente, os passos intermédios são muitas vezes difíceis de realizar e, geralmente, deve-se recorrer a métodos numéricos.

Normalmente, porém, não estamos interessados nas equações $r(t)$ e $\varphi(t)$, ambas como funções do tempo, antes queremos uma expressão que relaciona r com φ , ou seja, o que queremos é a equação da trajetória em coordenadas polares.

Nos próximos parágrafos vamos resolver este problema e encontrar para o movimento no campo gravitacional a equação

$$r = \left(\frac{\mu k}{L^2} + \frac{\alpha}{L} \cos \varphi \right)^{-1}$$

que nos dá para cada valor de φ o valor de r correspondente.

Em muitos casos de interesse físico podemos obter uma descrição do movimento por meio de considerações energéticas usando o potencial efetivo. Por exemplo, do simples fato de que $E_i - V_{ef}$ deve ser maior ou igual a zero, veja eq. (17), podemos deduzir muitas informações sobre as trajetórias possíveis.

5.1.1 Descrição qualitativa do movimento central

Na seguinte ilustração estudamos a energia potencial gravitacional (vermelha) junto com a energia potencial centrífuga (azul) cuja soma representa a energia potencial efetiva (verde).

- `reset() //energias no caso das forças centrais (gravitação)`

```

l:=0.5:k:=10://unidades relativas
Vc:=1/r^2:
V:=-k/r:
Vef:=Vc+V:
E1:=-50://unidades rel.
E2:=-35:
E3:=20:

plotfunc2d(Vc,V,Vef,E1,E2,E3,r=0.01..0.5,YRange=-60..50,
AxisTitles=["r","V"],
Title="Vef",TitlePosition=[0.06,-25],TitleAlignment=Left)

```

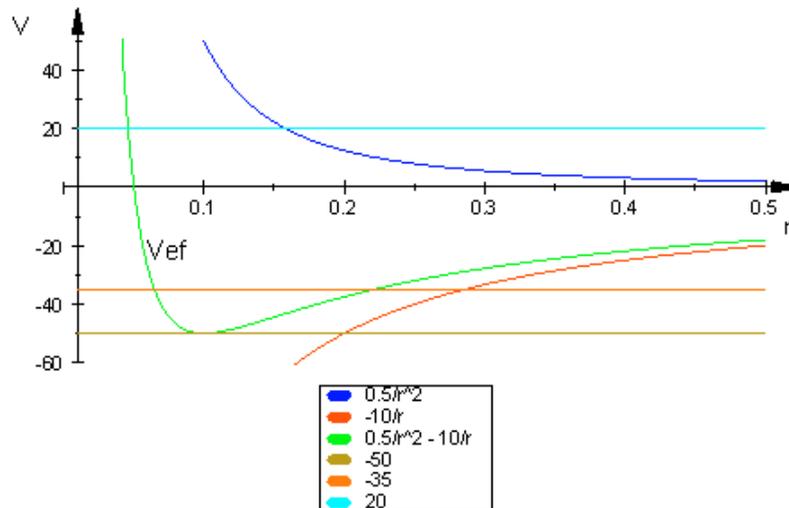


Fig.: 5.1-1

As linhas horizontais correspondem a três diferentes energias total E_i . A forma de V_{ef} e o valor de E_i determinam se o movimento é limitado ou aberto.

Se a energia total E_i for de 20 unidades (E_3), indicada pela reta horizontal superior, a órbita não será limitada e o "corpo" de massa μ vem do infinito até o ponto da interseção $A = (0,0458|20)$ entre E_i e V_{ef} ($r_{min} = 0,0458$) e regressa depois para o infinito.

Da Eq. (15) temos $\frac{1}{2} \mu v_r^2 = E_i - V_{ef}$. No ponto da interseção temos $\frac{1}{2} \mu v_r^2 = 0$, ou seja $v_r = dr/dt = 0$, o que significa que o ponto da interseção é um ponto de reversão do movimento, mas sem parar, pois de $L = \mu r^2 d\phi/dt > 0$ obtemos $d\phi/dt > 0$, e isso tem como consequência que ϕ cresce com o tempo e o vetor posição r gira no sentido anti-horário. Para $L < 0$ resulta que ϕ diminua com o tempo e r gira no sentido do relógio.

A trajetória da "partícula" μ terá a forma da figura 5.1-2. A é o ponto de máxima aproximação.

No caso análogo do movimento linear do oscilador harmônico, ver 4.7.4, a partícula chegou a parar nos pontos de reversão. A "partícula" na figura 5.1-2 não para, pois tem $d\phi/dt = \omega \neq 0$.

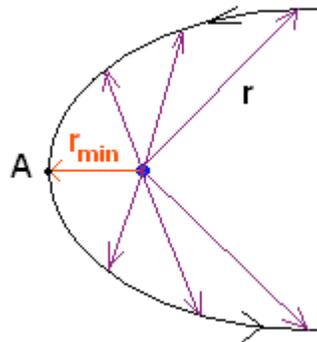


Fig.: 5.1-2

A reta da energia $E_3 = -50$ unidades é tangente à curva de $V_{ef} = L^2/(2\mu r^2) - k/r$ ($= 0.5/r^2 - 10/r$, nas unidades relativas), ou seja, há apenas um ponto de interseção. O raio deste mínimo da curva de V_{ef} é $r_0 = L^2/(k\mu)$, já que $dV_{ef}/dr = k/r^2 - L^2/r^3 := 0$ no ponto do mínimo. O valor do mínimo é

$$V_{\min} = -k^2\mu/L^2 + L^2k^2\mu^2/(2\mu L^4) = -k^2\mu/(2L^2).$$

Usando os valores relativos do programa, obtemos $V_{\min} = -50$. A "partícula" descreve, neste caso, uma trajetória circular de raio $r_0 = L^2/(k\mu)$ ($= 0.1$, já que $L^2/(2\mu) = 0.5$ e $k = 10$).

Se o potencial $V(r) = k/r$ for repulsivo ($k > 0$), então $V_{ef} = L^2/(2\mu r^2) + k/r$ e E_i serão sempre > 0 e a órbita será aberta (hipérbole).

Consideremos, agora, o caso de dois pontos de interseção, B e C (caso de $E_2 = -35$). O raio da órbita varia neste caso entre os valores r_{\min} (B) e r_{\max} (C). A órbita terá a forma de uma roseta, como na figura 5.1-3 (polarplot, animado). O movimento é limitado.

- **reset()://órbita para força central com 2 pontos de interseção**

```
l:=1.434:
r:=1/(1.04+0.4*cos(l*a)-0.0133*cos(2*l*a)+
0.0013*cos(3*l*a)):
ros:=plot::Polar([r,a],a=0..tmax,tmax=0..5.3*PI)//animação
circ1:=plot::Circle2d(0.7,[0,0],Color=RGB::Red,t=0..2*PI):
circ2:=plot::Circle2d(1.6,[0,0],Color=RGB::Green,t=0..2*PI):
plot(ros,circ1,circ2)
```

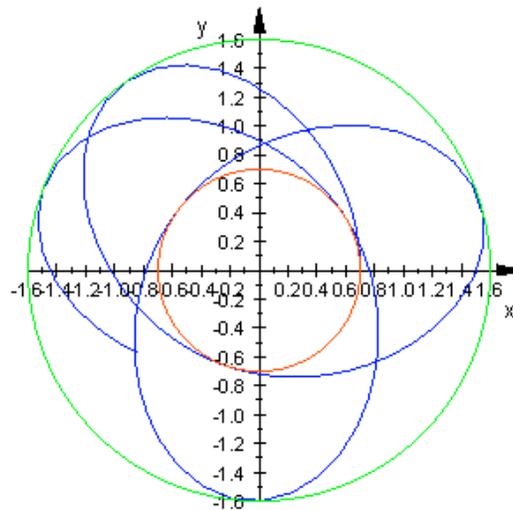


Fig.: 5.1-3

No próximo parágrafo faremos uma análise completa do movimento planetário.

5.1.3 O movimento planetário

Neste parágrafo vamos deduzir as trajetórias possíveis no caso da atração gravitacional. Queremos determinar a função $r = r(\varphi)$ como discutido em 5.1.

Primeiro eliminamos dt das relações $d\varphi/dt = L/(\mu r^2)$ e $dr/dt = (2(E_i - V_{ef})/\mu)^{1/2}$ e formamos

$$\varphi = \int \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu E_i - 2\mu V - \frac{L^2}{r^2}}} dr + \text{const.} \quad (19)$$

Temos $V(r) = -k/r$ com $k = G mM$

Introduzindo a constante α^2 e a nova variável β , transformamos Eq. (19) numa relação integrável:

$$\alpha^2 := 2\mu E_i + \mu^2 V^2 r^2 / L^2 = 2\mu E_i + (\mu k / L)^2 \quad (20)$$

$$\beta := -\mu V r / L - L / r = \mu k / L - L / r \quad (21)$$

Obtemos, assim,

$$\alpha^2 - \beta^2 = 2\mu E_i - 2\mu V - L^2 / r^2 \quad (22)$$

Com $d\beta/dr = L/r^2$ podemos transformar a Eq. (19) na seguinte integral

$$\varphi = \int d\beta / (\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} + \text{const.} \quad (23)$$

A solução é $\varphi = \arcsen(\beta/\alpha) - C$, de onde obtemos

$$\beta = \alpha \text{sen}(\varphi + C) = \mu k / L - L / r \quad (24)$$

Quando resolvemos este resultado para $1/r$, temos

$$1/r = \mu k / L^2 - A \text{sen}(\varphi + C) \quad (25)$$

onde significa

$$A = \alpha / L = + (2\mu E_i / L^2 + (\mu k / L^2)^2)^{1/2} \quad (26)$$

Resolvendo para r , obtemos

$$r = \frac{1}{\frac{\mu k}{L^2} - \frac{\alpha}{L} \text{sen}(\varphi + C)} \quad (27)$$

A constante C definimos de tal forma que o raio vetor é mínimo para $\varphi=0$. Mas r é mínimo quando $\text{sen}(\varphi+C) = -1$. Isso é o caso para $\varphi+C = 3\pi/2$ e $\varphi = 0$. Isso significa $C = 3\pi/2$. Visto que $\text{sen}(\varphi+3\pi/2) = -\cos\varphi$, obtemos para a equação das trajetórias

$$r = \frac{1}{\frac{\mu k}{L^2} + \frac{\alpha}{L} \cos\varphi} \quad (28)$$

Comparando esse resultado com a conhecida equação das seções cônicas, a saber com

$$r = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi} \quad (29)$$

vemos que as trajetórias possíveis são *seções cônicas*.

(Recordamos que uma seção cônica é formada pelo lugar geométrico de um ponto que se move mantendo constante a razão ε entre sua distância a um ponto, foco, e sua distância a uma linha, diretriz).

As substituições são

- a. $p = L^2/(\mu k)$ (*semi-parâmetro* = valor de r para $\varphi = 90^\circ$)
- b. $\varepsilon = \alpha L/(\mu k) = [1 + 2L^2 E_i/(\mu k^2)]^{1/2}$
(*excentricidade numérica*, $\varepsilon = r/s$; s = distância de um ponto P da *diretriz*. $s = f - r \cos \varphi$, onde f = distância do foco F da diretriz.)

Dependendo do valor de ε , temos três espécies de cônicas. Para ε maior que um temos uma *hipérbole*, para $\varepsilon = 1$ uma *parábola*, para $0 < \varepsilon < 1$ uma *elipse* e para $\varepsilon = 0$ a elipse se torna um *círculo*.

Para uma força *atrativa* temos k e p positivos. Se $E_i < 0$, resulta $\varepsilon < 1$ e a trajetória será uma elipse. Se E_i for positiva, temos $\varepsilon > 1$ e a trajetória será uma hipérbole, por exemplo a trajetória de um *cometa*.

Também obtemos uma hipérbole, quando a força é *repulsiva* ($k < 0$) e $E_i > 0$. Este caso observamos no espalhamento de uma partícula α por uma força de repulsão inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Órbitas elípticas ($k > 0$, $E_i < 0$)

Na seguinte figura vemos o significado geométrico das variáveis a usar:

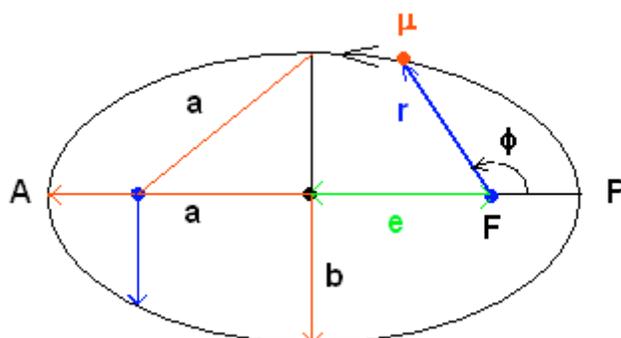


Fig.: 5.1-4

O semi-eixo maior a , o semi-eixo menor b , a excentricidade linear e e o semi-parâmetro p são as características mais importantes de uma elipse. $\epsilon = e/a$ é a excentricidade numérica. A excentricidade linear e é a distância do foco F do centro.

São importantes as seguintes relações:

$$a^2 = e^2 + b^2 = b^2/(1 - \epsilon^2) \quad e \quad p = b^2/a = a(1 - \epsilon^2)$$

Sendo $p = L^2/(\mu k)$ e $\epsilon = [1 + 2L^2E_i/(\mu k^2)]^{1/2}$, obtemos também

$$a = p/(1 - \epsilon^2) = L^2/[\mu k(1 - \epsilon^2)] = -k/(2E_i) = k/(2|E_i|) \quad (30)$$

$$b = (ap)^{1/2} = L/(2\mu|E_i|)^{1/2} \quad (31)$$

Vemos, assim, que o semi-eixo maior a somente depende da energia total E_i e não do momento angular L . O semi-parâmetro p depende só do momento angular.

O semi-eixo menor b depende tanto do L como do E_i .

O valor mínimo de r ocorre para $\varphi = 0$, e da Eq.(29) deduzimos que

$$r_{\min} = p/(1+\epsilon) = a(1 - \epsilon^2)/(1 + \epsilon) = a(1 - \epsilon) = a - e$$

Para $\varphi = \pi$ resulta o valor máximo de r :

$$r_{\max} = a(1+ \epsilon) = a + e$$

O ponto P é chamado de *perigeu* (peri do grego *perí* = movimento em torno; *gê* = Terra). O perigeu é a distância de máxima aproximação do centro de força. A é o *apoгеu*, distância de máxima afastamento do centro de força.

No caso de estar o Sol (*hélios*) num dos focos, chama-se P de *periélio* e A de *apoélio*.

Quando integramos o teorema das áreas $dA = L/(2\mu) \cdot dt$ (válido para todas as forças centrais), ver. 4.2.3, sobre o período T de uma órbita completa, teremos $A = \pi ab = LT/(2\mu)$, ou $T = 2\pi\mu ab/L$. ($dA = L/(2\mu) \cdot dt$ expressa a *segunda lei de Kepler* que afirma, ver 4.2.3, que áreas iguais são varridas em tempos iguais.)

Este resultado sobre o período podemos transformar em

$$T^2 = \frac{\pi^2 k^2 \mu^2}{-2\mu E_i^3} \quad (32)$$

Tomando em conta que $E_i = -k/2a$, ver Eq. (30), obtemos a *terceira lei de Kepler*, veja 4.2.3:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2 \mu} \quad (33)$$

Em palavras: Para todas as trajetórias elípticas, o cubo do semi-eixo maior é proporcional ao quadrado do período. $C := k/(4\pi^2 \mu)$ é uma constante de proporcionalidade.

Além de órbitas elípticas há, no caso de atração, órbitas hiperbólicas e órbitas parabólicas (para $E_i = 0$).

Aproximadamente 10% de todos os cometas têm órbitas hiperbólicas e 43%, mais ou menos, têm órbitas parabólicas. As órbitas hiperbólicas, no caso de uma força central repulsiva, vamos estudar separadamente.

O caso de um satélite artificial terrestre podemos considerar como movimento de um corpo só ($\mu \approx m =$ massa do satélite), já que a razão entre a massa do satélite e a da Terra é muito pequena e se pode considerar a massa da Terra como estando fixa no espaço.

A força sobre uma massa m na superfície da Terra é $F = GmM/R^2$. Essa força é o que foi definido pela equação $F_g = mg$ como *peso* do corpo, onde g é a aceleração da gravidade. Portanto, $mg = GmM/R^2$. Cancelando m , temos $g = GM/R^2$ e $M = gR^2/G$.

O valor de g ao nível do mar tomamos como $9,81 \text{ m/s}^2$ e o raio R da Terra é aproximadamente 6370 km . Observe que a relação $M = gR^2/G$ nos permite calcular a massa da Terra usando valores experimentais para g , R e G .

Resulta: $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Para a 3ª lei de Kepler obtemos com estas relações uma forma mais simples:

$$a^3/T^2 = GM/(4\pi^2) = gR^2/(4\pi^2) \text{ e o período será } T = 2\pi a^{3/2}/(R \cdot g^{1/2}).$$

A lei da energia é, neste caso, $\frac{1}{2}mv^2 - mgR^2/r = E$. Com $E = -k/(2a) = -gR^2m/(2a)$ obtemos a seguinte equação para a velocidade

$$v^2 = 2gR^2(1/r - 1/(2a)) \quad (34).$$

A introdução das expressões de r_{\min} e r_{\max} correspondentes ao perigeu e ao apogeu, nos dará as velocidades respectivas nestas duas posições para a órbita elíptica:

$$\begin{aligned} v_p &= R(g' r_{\max}/r_{\min})^{1/2} \\ v_A &= R(g' r_{\min}/r_{\max})^{1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

onde $g' = g/a$.

Com essas considerações tratamos o problema dos dois corpos como se toda a massa da Terra fosse concentrada no seu centro. Já que M é muito maior que m , temos $\mu \approx m$, e M coincide praticamente com o centro de massa.

Exemplo:

Um satélite artificial é lançado de um ponto B no equador por seu foguete portador e inserido numa órbita elíptica com uma altitude de perigeu de 2000 km. Se a altitude de apogeu deve ser 4000 km, calcule

- a velocidade do perigeu necessária v_p e a velocidade de apogeu correspondente v_A
- a velocidade no ponto C, onde a altitude do satélite é 2500 km e
- o período T para uma órbita completa

Solução:

As velocidades são dadas pelas Eqs. (35), onde

$$r_{\min} = 6370 \text{ km} + 2000 \text{ km} = 8370 \text{ km},$$

$$r_{\max} = 6370 \text{ km} + 4000 \text{ km} = 10\,370 \text{ km}; \quad a = (r_{\min} + r_{\max})/2 = 9370 \text{ km}$$

$$g/a = 9,81 \text{ m/s}^2 / 9370 \cdot 10^3 \text{ m} = 1,047 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}; \quad (g/a)^{1/2} = 1,023 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$v_P = 7253 \text{ m/s} = 26\,110 \text{ km/h}$$

$$v_A = 5854 \text{ m/s} = 21\,076 \text{ km/h}$$

Substituindo $r = 6370 \text{ km} + 2500 \text{ km} = 8\,870 \text{ km}$ na Eq. (34) dá

$$v_C = 6875 \text{ m/s} = 24\,750 \text{ km/h}$$

O período da órbita é dado pela Eq. $T = 2\pi a^{3/2} / (R \cdot g^{1/2})$. Usando os valores numéricos, temos

$$T = 9032 \text{ s} = 150 \text{ min} = 2,5 \text{ h}$$

Órbitas hiperbólicas com forças atrativas (órbitas de cometas, $k > 0$, $E_i > 0$)

Todas as órbitas ligadas (elípticas e circulares) têm uma energia total negativa quando damos o valor zero para a energia potencial correspondente a uma separação infinita.

Com $E > 0$ a partícula poderá ir até o infinito.

Uma hipérbole tem dois ramos e, sob uma força atrativa inversamente proporcional à

distância, é descrito somente o ramo que envolve o centro de atração (o ramo direito na figura 5.1-5. (A seta marca a posição do cometa chegando de cima. O centro da Terra é o foco direito. O ângulo φ , 60 graus na figura, mede-se em sentido anti-horário. Ver, também, as figuras 5.1-2, 5.1-4 e 5.1-6)

- `reset() //hipérbole`

```

a:=2.55:
eps:=1.32://eps*a = 3.366
x:=r*cos(fi):y:=r*sin(fi)//coordenadas polares
r:=a*(eps^2-1)/(1-eps*cos(fi)):
orb:=plot::Polar([r,fi],fi=0..2*PI)//hipérbole
fi2:=PI/3://60 graus
r2:=a*(eps^2-1)/(1-eps*cos(fi2)):
x2:=r2*cos(fi2):y2:=r2*sin(fi2):
f1:=0.8526*t+2.87://assíntota
f2:=-0.8526*t-2.87:
asymp1:= plot::Function2d(f1,Color=RGB::Green, t=-10..4):
asymp2:= plot::Function2d(f2,Color=RGB::Green, t=-10..4):

seta:=plot::Arrow2d([0,0],[x2,y2],Color=RGB::Red):

plot(orb,seta,asymp1,asymp2,ViewingBoxYRange = -5..5,
ViewingBoxXRange=-10..4)

```

Escrevamos a equação (29) agora na forma

$$r = a(\varepsilon^2 - 1)/(1 - \varepsilon \cos \varphi) \quad (36)$$

Os valores para a e ε estão no programa. Da Eq. (36) vemos que a distância radial r torna-se infinita quando $\varepsilon \cos \varphi$ tende a um. O ângulo polar φ tende, então, ao ângulo α da assíntota. Para este ângulo temos da eq. (36)

$$\cos \alpha = 1/\varepsilon \quad (37)$$

Na figura 5.1-5 temos $\alpha = 40,75^\circ$, já que o valor de ε é 1.32.

A interseção das assíntotas (verdes) tem a distância $e = \varepsilon \cdot a$ ($= 3.366$) dos focos, visto que $2e$ é a distância entre os focos.

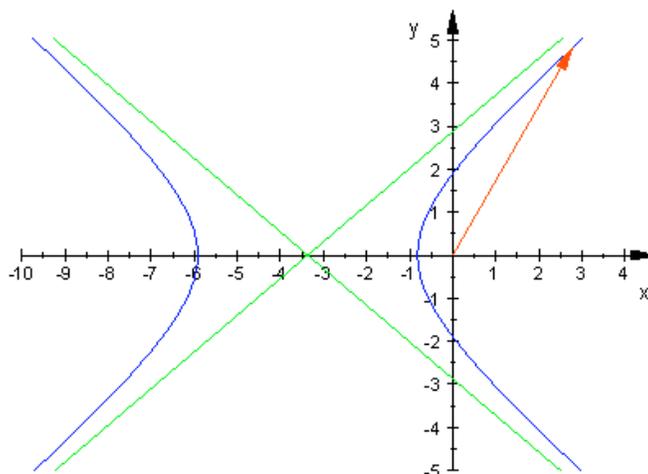


Fig.: 5.1-5

O ramo da esquerda corresponde a uma força repulsiva $F = -k/r^2$ com $k < 0$. Neste caso a energias potencial e total são positivas, de modo que não há órbitas ligadas. θ é o ângulo entre a assíntota da incidência e a da saída (fala-se do ângulo do espalhamento).

Das figuras 5.1-5,6 vê-se que $\theta + 2\alpha = \pi$, ou seja, $\theta = \pi - 2\alpha$ ($= 98.5^\circ$ na figura 5.1-5).

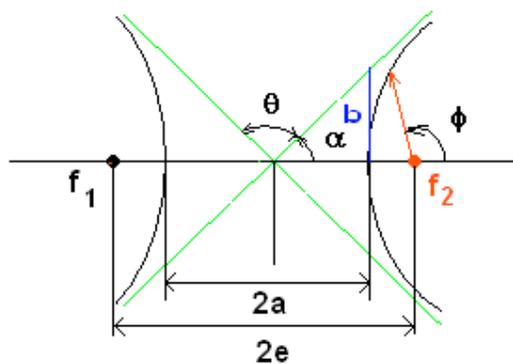


Fig.: 5.1-6

Para Kepler, o Sol estava fixo no espaço. Hoje sabe-se que o Sol coincide, praticamente, com o centro de massa do sistema Sol-planeta. O Sol move-se muito mais lentamente do que qualquer planeta. Isso justifica tomá-lo como centro de referência, pois praticamente ele é um referencial inercial.

Um observador hipotético na superfície do Sol M considera ele como estando em repouso e pode medir a distância radial r do planeta m e a sua velocidade angular $\omega = d\phi/dt$. A trajetória que este observador nota chamamos de trajetória aparente do planeta, e é a equação (28)

$$r = \frac{1}{\frac{\mu k}{L^2} + \frac{\alpha}{L} \cos \phi}$$

que descreve essa órbita aparente. Eq. (28) contém como caso especial a primeira lei de Kepler:

Os planetas descrevem órbitas elípticas, com o Sol num dos focos.

Mas Eq. (28) contém além de elipses também trajetórias abertas como parábolas e hipérbolas.

As *órbitas reais* obtém-se da Eq. (28) junto com a definição da massa reduzida:

$$r_1 = \frac{m}{m+M} \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

$$r_2 = \frac{M}{m+M} \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

r_1 refere-se ao Sol, r_2 a um planeta. O Sol e o planeta descrevem elipses semelhantes, ambos com o foco no CM.