

4.7 Energia de um Sistema de Partículas

4.7.1 Energia cinética

A energia de um sistema de n partículas é a soma das energias cinética de todas as partículas

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_k^i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (1)$$

A velocidade \mathbf{v}_i da i -ésima partícula é decomposta na velocidade \mathbf{v}_c de translação do centro de massa CM mais a sua velocidade \mathbf{v}_i' em relação ao CM:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i' \quad (2)$$

Substituindo Eq. (2) em Eq. (1) obtemos

$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i |\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i'|^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i')$, o que dá avaliado

$$E_k = \frac{1}{2} (\sum m_i) v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \mathbf{v}_c \cdot d(\sum m_i \mathbf{r}_i')/dt \quad (3)$$

O último termo é nulo, pois, assim como já vimos na 4.3.3, temos

$$\sum m_i \mathbf{r}_i' = \sum m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c (\sum m_i) = \mathbf{0}$$

Obtemos, com isso, o seguinte teorema de decomposição da energia cinética:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 \quad (4)$$

m é a massa total do sistema.

O primeiro termo do lado direito da equação (4) é a energia cinética de translação do sistema. O segundo termo é a energia cinética do movimento interno do sistema, relativo ao CM, que podemos chamar de energia *interna* do sistema.

A energia cinética média de uma partícula é $E_{k,med} = (\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2)/N$, onde N é o número total de partículas dentro do sistema.

O conceito da energia cinética média é utilizado na termodinâmica para definir a *temperatura* de um sistema de N partículas.

Pudemos, assim, decompor a energia cinética de um sistema de partículas na energia do movimento de translação do sistema como um todo (movimento do centro de massa) e na energia cinética do movimento das partículas relativo ao centro de massa. Este termo é zero para um *sistema rígido*, pois, por definição, o **corpo rígido** é um sistema no qual a distância entre duas quaisquer das suas partículas não se altera e as partículas não podem, por isso, realizar movimentos em relação ao CM. O sistema é indeformável. Claro que o conceito do corpo rígido é uma idealização, uma vez que todos os corpos se deformam. Entre tanto, para fins práticos, muitos corpos podem ser tratados como se fossem rígidos.

No caso do corpo rígido, o único movimento interno possível é o de **rotação**, onde cada partícula se move em círculos em torno do centro de massa.

Para obter a energia cinética de rotação de um corpo rígido temos que substituir a massa pelo momento de inércia e a velocidade v pela velocidade ω :

$$E_k^{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (5)$$

Pois a velocidade de cada partícula é $v_i = \omega r_i$, onde r_i é a distância da partícula i ao eixo de rotação. Então

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \cdot \omega^2, \text{ ou, lembrando a definição do momento de inércia, 4.3.1, } E_k = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

(Se o corpo rígido tem uma distribuição contínua de massa, temos que substituir a somatória em (4) por uma integral e tomar em conta que $d(\mathbf{r}_i^2)/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, conferir 3.5.1:

$$\begin{aligned} E_k^{rot} &= \frac{1}{2} \int dm (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int dm \boldsymbol{\omega} [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{2} \int dm \boldsymbol{\omega} [r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})] \\ &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega} | \{ \int dm [r^2 \mathbf{E} - |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|] \} | \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega} | L \rangle \end{aligned}$$

Essa expressão podemos escrever como

$$E_k^{rot} = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega} | I | \boldsymbol{\omega} \rangle \quad (6)$$

Exemplo 1:

Um corpo rígido (elipsóide) gira ao redor de um eixo fixo que passa pelo ponto A. Enquanto o centro de massa descreve um círculo completo de raio a em torno do A, uma seta s, pintada sobre o corpo, gira uma vez em torno do CM.

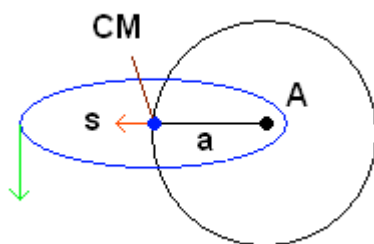


Fig. 4.7-1

Com a rotação em torno do A está associada a energia cinética

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 I_A \quad (7)$$

Utilizando o teorema de Steiner, $I_A = I_C + m a^2$, veremos que esta energia consta de duas partes:

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 I_C + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \quad (8)$$

O primeiro termo representa a energia cinética associada à rotação do corpo em torno do CM. Para entender o segundo termo, podemos imaginar que a massa m do corpo está concentrada no CM. Este "ponto de massa" descreve o círculo de raio a com a velocidade $v = a \omega$, tendo a energia cinética $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$, o que é o segundo termo do lado direito da Eq. (8).

(Invertendo os argumentos, obtém-se um simples método para demonstrar a validade do teorema de Steiner, p. ex.: a energia cinética do corpo consta de duas partes, a saber $E_k = \frac{1}{2} \omega^2 I_C + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$. Isto pode ser escrito como $E_k = \frac{1}{2} \omega^2 (I_C + m a^2) := \frac{1}{2} \omega^2 I_A$, de onde segue $I_A = I_C + m a^2$.)

Exemplo 2:

Um sistema consta de 5 partículas.

$m_1 = 12 \text{ kg}$; $\mathbf{v}_1 = 3 \text{ m/s } \mathbf{i} + 6 \text{ m/s } \mathbf{j}$ etc.

(Os dados das restantes partículas encontram-se no seguinte programa.)

Determine a energia cinética do sistema de duas maneiras:

- utilize a equação (1): $E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$
- aplique o teorema (4): $E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$.

Solução:

As partes a e b são indicadas no programa seguinte:

- ```

reset()://Energia cinética de um sistema
u:=J://"Joule", unidade de energia

n:=5:
m[1]:=12:m[2]:=8:m[3]:=6:m[4]:=4:m[5]:=20:

v[1]:=matrix([[3, 6]]):
v[2]:=matrix([[4, -5]]):
v[3]:=matrix([[3, 1]]):
v[4]:=matrix([[-14, -5]]):
v[5]:=matrix([[-12, - 5]]):
//Parte a:

ekin:=0.5*sum(m[i]*(v[i][1]^2+v[i][2]^2),i=1..n)*u;

//Parte b:

massa:=sum(m[i],i=1..n):

vc:=sum(m[i]*v[i],i=1..n)/massa;//vetor da vel. do CM

vrel1:=abs(v[i][1]-vc[1])://vel. relativa
vrel2:=abs(v[i][2]-vc[2]):

Ec:=0.5*massa*linalg::scalarProduct(vc,vc)*u:

Erel:=0.5*sum(m[i]*(vrel1^2+vrel2^2),i=1..n)*u:

Ek:=Ec+Erel

```

**Resultados:**

Parte a: 2596.0 J

$-21/5$  m/s **i**  $-41/25$  m/s **j** (Vetor de velocidade do CM)

Parte b: 2596.0 J

Segue uma pequena variação do programa anterior. Os dados foram explicitamente guardados nas listas "massas" e "vel". O tamanho de uma liste determina-se com a função **nops**, veja também 3.9.3.

```

reset() //energia cinética de um sistema
u:=J://"Joule", unidade de energia
n:=5:

m[1]:=12:m[2]:=8:m[3]:=6:m[4]:=4:m[5]:=20:
massas:=[]://lista das massas
for j from 1 to n do
massas:=append(massas,m[j]):
end_for:
N1:=nops(massas)//soma dos elementos na lista "massas"
massa:=sum(massas[k],k=1..n)//massa total
v[1]:=matrix([[3, 6]]):
v[2]:=matrix([[4, -5]]):
v[3]:=matrix([[3, 1]]):
v[4]:=matrix([[-14, -5]]):
v[5]:=matrix([[-12, - 5]]):

vel:=[]://lista das velocidades
for j from 1 to n do
vel:=append(vel,v[j]):
end_for:

N2:=nops(vel):

ekin:=0.5*sum(massas[i]*(vel[i][1]^2+vel[i][2]^2),
i=1..n)*u;
vc:=sum(massas[i]*vel[i],i=1..n)/massa;
//vetor da vel. do CM

```

```

vrel1:=abs(v[i][1]-vc[1]):
vrel2:=abs(v[i][2]-vc[2]):
Ec:=0.5*massa*linalg::scalarProduct(vc,vc)*u:
Erel:=0.5*sum(m[i]*(vrel1^2+vrel2^2),i=1..n)*u:
Ek:=Ec+Erel

```

### Resultados:

```

2596.0 J
-21/5 m/s i -41/25 m/s j
2596.0 J

```

## 4.7.2 Energia potencial

A energia potencial de um sistema de  $n$  partículas podemos definir como

$$E_p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = E_p(\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0) - \int \sum \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \quad (9)$$

veja 4.5.2. A integral vai de  $(\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0)$  até  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ , a soma é sobre todas as  $n$  partículas.  $(\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0)$  e  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  são os estados inicial e final do sistema. As forças podem ser externas e internas. Vamos supor que não existem ligaduras, ou seja, suponhamos que o sistema é um sistema *isolado*, sem forças externas. Se as forças internas são forças centrais, o que se dá muitas vezes na natureza, por exemplo com as forças gravitacionais e as interações eletromagnéticas, podemos deduzi-las de um potencial, ou seja, a força que a partícula  $k$  exerce sobre a partícula  $i$  vem dada pela seguinte fórmula

$$\vec{F}_{ik} = -\nabla_i E_{ik}^p \quad (10)$$

A terceira lei de Newton pede que a energia potencial  $E_{ik}^p$  dependa somente da distância  $r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  entre as partículas  $i$  e  $k$ .

O potencial mesmo podemos obter avaliando a integral

$$E_{ik}^p(\mathbf{r}_{ik}) = E_{ik}^p(\mathbf{r}_0) - \int_{r_0}^{r_{ik}} \mathbf{F}_{ik} d\mathbf{r}_{ik} \quad (11)$$

Para a *energia potencial interna* do sistema obtém-se

$$E_p^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n E_{ik}^p(\mathbf{r}_{ik}) \quad (12)$$

Na soma devemos excluir termos com  $i = k$ . Já que  $E_{ik}^p = E_{ki}^p$ , é preciso dividir por 2 para evitar que a energia potencial associada a cada par de partículas fosse contada duas vezes. Para o cálculo é mais favorável escrever a soma (12) na seguinte forma

$$E_p^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{k=1}^n E_{ik}^p(\mathbf{r}_{ik}) \quad (13)$$

### Exemplo:

Consideremos um sistema isolado de 4 partículas que interagem gravitacionalmente. Determine a energia potencial interna do sistema.

### Solução:

A energia potencial ligando as partículas  $i$  e  $k$  é dada por  $E_{ik}^p = -G m_i m_k / r_{ik}$ .

Para formar o sistema, colocamos primeiro as partículas 1 e 2 em suas posições, a energia potencial será  $E_{12}^p = -G m_1 m_2 / r_{12}$ . Se agora trouxermos a partícula 3 na sua posição, a energia total se tornará

$$E^{\text{int}}_p = E^p_{12} + E^p_{13} + E^p_{23} = -G m_1 m_2 / r_{12} - G m_1 m_3 / r_{13} - G m_2 m_3 / r_{23}$$

Observe, que não devemos incluir termos com índices iguais, como  $r_{11}$ ,  $r_{22}$  ou  $r_{33}$ .

Finalmente, temos que trazer a partícula 4 à sua posição. Esta operação vai contribuir 3 termos adicionais. Obtemos assim

$$E^{\text{int}}_p = -G(m_1 m_2 / r_{12} + m_1 m_3 / r_{13} + m_1 m_4 / r_{14} + m_2 m_3 / r_{23} + m_2 m_4 / r_{24} + m_3 m_4 / r_{34})$$

No caso de um sistema de *dos corpos* temos somente um termo:  $E^p_{12} = -G m_1 m_2 / r_{12}$  na expressão da energia potencial. A energia *total* de um sistema isolado de dois corpos é dada pela expressão

$$E = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 - G m_1 m_2 / r \quad (14)$$

onde  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ;  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ .  $\mu$  é a massa reduzida, ver 4.2.1.

Para calcular a soma dupla (13) com MuPAD, podemos fazer uma lista para as massas e outra para os raios. A soma mesma calculamos com a função `_plus`, como mostra o seguinte programa

```

• reset():
 //Energia potencial de um sistema, soma dupla
 massas := [m1, m2, m3, m4]:
 n := nops(massas) // número de elementos na lista massas
 raios := [[0, r12, r13, r14], [r12, 0, r23, r24], [r13, r23, 0, r34],
 [r14, r24, r34, 0]]:
 epot := _plus(_plus(massas[i]*massas[k]/raios[i][k]
 $ i=1..k-1) $ k=1..n);

```

O resultado do cálculo será

$$m_1 m_2 / r_{12} + m_1 m_3 / r_{13} + m_1 m_4 / r_{14} + m_2 m_3 / r_{23} + m_2 m_4 / r_{24} + m_3 m_4 / r_{34}$$

Observe que os limites da segunda soma devem ser dados primeiramente.



Pode ocorrer que as forças externas que agem sobre o sistema também são conservativas. Em tal caso podemos determinar uma função potencial para a força externa que atua sobre a partícula  $m_i$ . A energia total do sistema será

$$E = E_k + E_p^{\text{int}} + E_p^{\text{ext}}$$

Um exemplo é um átomo de hidrogênio colocado num campo externo. Este átomo é composto de um elétron e um próton. Sua energia própria consta da soma das energias cinéticas do elétron e do próton e da energia potencial interna devida à interação elétrica dos dois. Se o átomo está isolado, a soma dessas duas energias permanece constante.

Mas se o átomo está num campo externo, por exemplo num campo magnético, sua energia total deve incluir ainda a energia potencial devida ao campo magnético externo. É essa energia total que fica constante.

### 4.7.3 Curvas de energia potencial

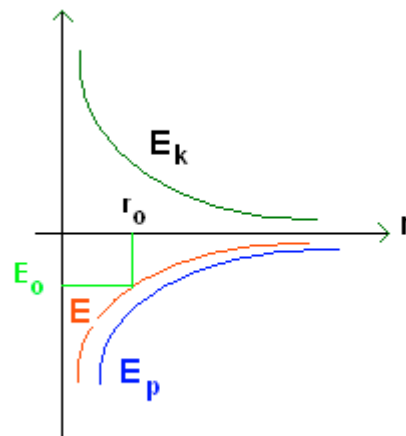


Fig.: 4.7-2

Podemos aprender muito ao respeito do movimento de uma partícula a partir de um gráfico de sua energia potencial. Já nas seções 4.6 estudamos alguns dessas curvas. Na figura 4.7-2 vemos as variações da energia cinética  $E_k$ , da energia potencial  $E_p$  e da energia total  $E$  com o raio  $r$  para um satélite numa órbita circular.

Para qualquer valor de  $r$ , os valores de  $E_p$  e  $E$  são negativos, o valor de  $E_k$  é positivo. Quando  $r$  se aproxima do "infinito", todas as três curvas de energia se aproximam de um valor nulo. (Não existe uma distância "infinito". O que queremos dizer é que as energias tendem a zero cada vez mais à medida que  $r$  cresce.) Um satélite com energia total  $E_0 < 0$  ficará numa órbita circular de raio  $r_0$ .

A figura seguinte mostra a energia potencial  $E_p(r)$  para dois átomos ligados numa molécula diatômica como  $H_2$  ou  $HCl$ ,  $r_0$  é a posição de equilíbrio.

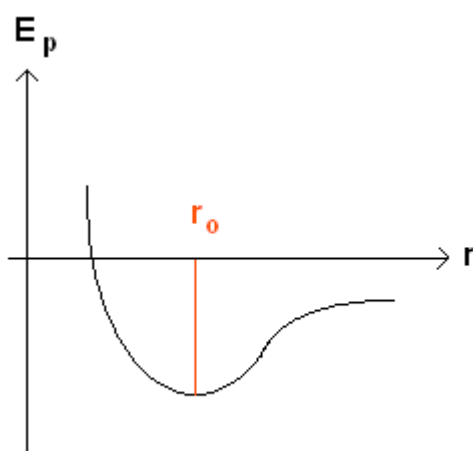


Fig.: 4.7-3

Para distâncias menores do que  $r_0$ , a força intermolecular é repulsiva ( $E_p(r)$  é uma função decrescente e  $F = -\partial E_p/\partial r > 0$ ). Para distâncias maiores do que  $r_0$  a força intermolecular é atrativa ( $F = -\partial E_p/\partial r < 0$ ). No ponto de equilíbrio, a inclinação de  $E_p(r)$  é nula (e a força é zero). A parte da curva ao redor do ponto de equilíbrio chama-se de "poço de potencial". Um sistema complexo pode ter varios poços de potencial. Para oscilações na proximidade do ponto de equilíbrio podemos substituir a curva de potencial por uma parábola, ou seja, trata-se a interação como se fosse produzida por uma mola elástica, veja 4.7.4.

Na literatura científica foram publicados muitos modelos de curvas potenciais. Trata-se sempre de expressões aproximadas como, por exemplo, a (12-6)-fórmula do cientista inglês J. Lennard-Jones:

$$E_p(r) = -E_{p,0}[2(r_0/r)^6 - (r_0/r)^{12}] \quad (15)$$

As constantes  $E_{p,0}$  e  $r_0$  têm, para a molécula de  $O_2$ , os valores experimentais de  $E_{p,0} = 8,196 \cdot 10^{-9} \text{ J} = 5,12 \text{ eV}$  e  $r_0 = 1,207 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,1207 \text{ nm}$ .  $r$  = distância entre os núcleos dos dois átomos.

- `reset()://Potencial de Lennard-Jones para O2`  
`Ep0:=5.12: r0:= 0.1207:`  
`Ep:=Ep0*( (r0/r)^12-2*(r0/r)^6):`  
`plotfunc2d(Ep,r=0.1..0.15,AxisTitles=["r/nm", "Ep/eV"],`  
`YRange=-6..5,GridVisible=TRUE)`

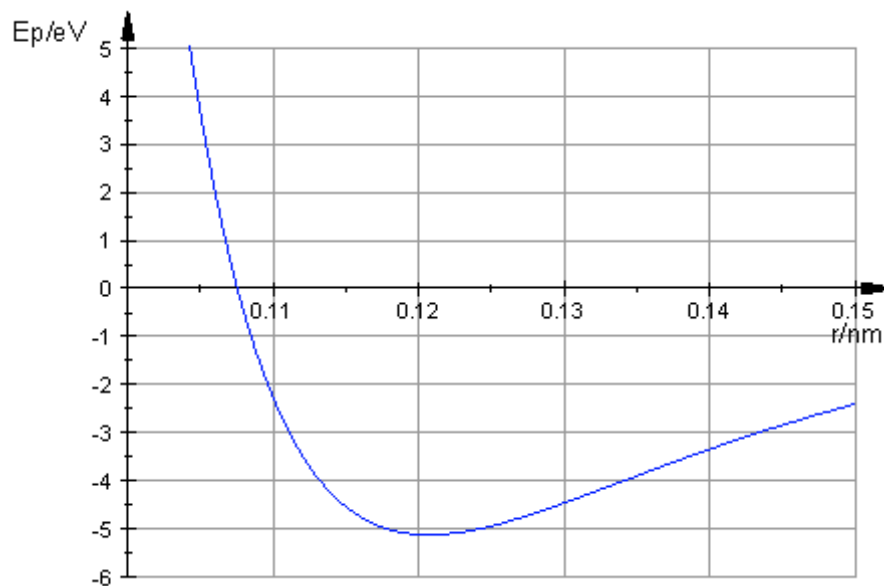


Fig.:4.7-4

Na posição do equilíbrio,  $r_0 = 0.1207$  nm, temos  $E_p = -E_{p,0} = -5.12$  eV para a energia potencial no ponto de equilíbrio. Essa energia é a energia de dissociação da molécula.

#### 4.7.4 O espaço de fases

Consideremos outra vez um oscilador harmônico, p. ex. uma massa  $m$  que oscile horizontalmente numa extremidade de uma mola. A mola exercerá a força  $F = -k x$  sobre a massa  $m$  quando esta se encontrar a uma distância  $x$  da posição de equilíbrio, sendo  $k$  a constante de força da mola.

A curva da energia potencial é uma parábola, dada pela relação  $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$ , pois  $F(x) = -dE_p(x)/dx = -k x$ .

Os pontos limites das oscilações,  $-x_0$  e  $+x_0$ , são definidos pela energia total

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

A velocidade máxima ocorre no momento em que  $m$  passa por  $x = 0$ .  $-x_0$  e  $x_0$  são pontos de reversão. Nestes pontos a partícula inverte o sentido do seu movimento e  $E_k = 0$ . Nos pontos de reversão temos  $E = E_k + E_p = 0 + \frac{1}{2} k x_0^2$ , ou seja  $x_0 = \pm\sqrt{(2E/k)}$ . No ponto  $x = 0$  temos  $E = \frac{1}{2} m v_0^2$ , ou seja  $v_0 = \pm\sqrt{(2E/m)}$ .

Cada vez que a massa atinge uma posição extrema à direita ( $x_0$ ) ou à esquerda ( $-x_0$ ), sua velocidade é nula. Observe os detalhes na seguinte ilustração.

- `reset()://oscilador harmônico`  
`k:=10:x0:=4:`  
`e:=k*x0^2/2://energia total`  
`Ep:=k*x^2/2:`  
`Ek:=e-Ep:`  
`F:=-diff(Ep,x)//força da mola sobre m`  
`plotfunc2d(e,Ep,Ek,F,`  
`x=-5..5,AxisTitles=["x","Energia"],GridVisible=TRUE)`

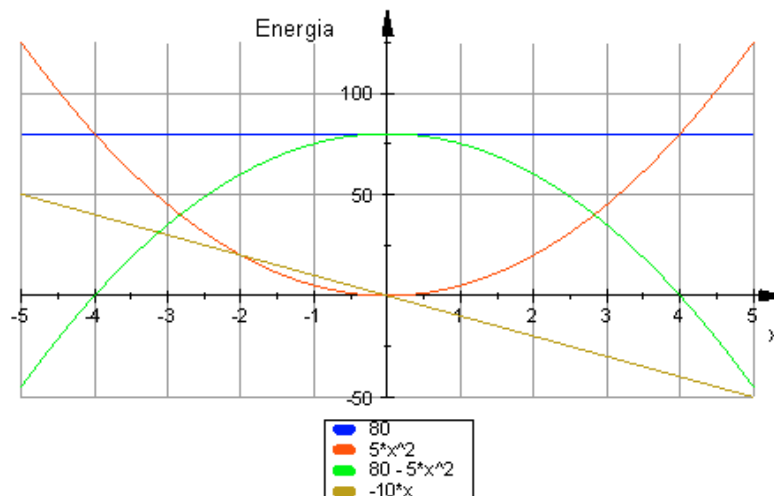


Fig.:4.7-5

A força  $F(x) = -dE_p/dr$  ( $\mathbf{F} := -\text{diff}(E_p, \mathbf{x})$ ) está representada pela reta  $F(x) = -10x$ , que passa pela origem. A parte positiva de  $F$  à esquerda de  $x = 0$  significa repulsão, a parte negativa à direita de  $x = 0$  indica atração. O movimento ocorre entre os limites  $-4$  e  $4$  (pontas onde  $E_k = 0$  e  $E = E_p$ ).

Numa posição  $x$  qualquer entre  $-x_0$  e  $x_0$  a partícula tem a velocidade  $v = v_0 (1 - (x/x_0)^2)^{1/2}$  ou também

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = 1 \quad (16)$$

Com este resultado podemos traçar uma curva que traduz a relação entre as duas variáveis independentes  $x$  e  $v$  (o oscilador tem dois graus de liberdade).

- `reset()://oscilador harmônico`  
`k:=10:x0:=4:m:=80:`  
`v0:=k*x0^2/m:`  
`ellipse:=(x/x0)^2+(y/v0)^2-1:`  
`plot(plot::Implicit2d(ellipse, x = -4..4,`  
`y = -2..2),AxesTitles=["x", "v"])`

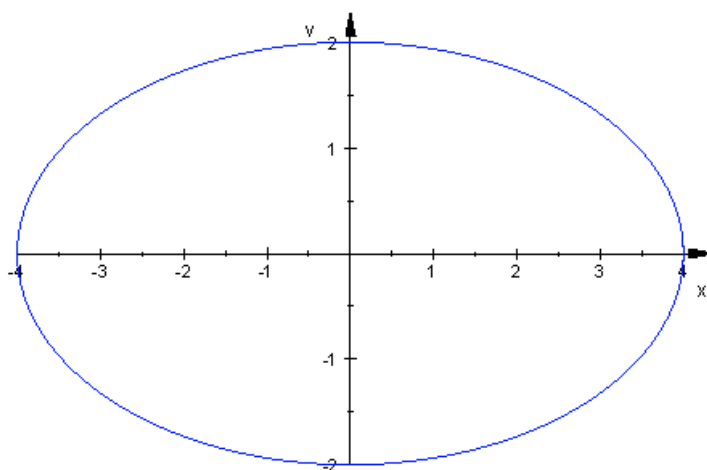


Fig.:4.7-6

Eq. (16) descreve a velocidade em função da posição do oscilador. A curva correspondente é uma elipse (elipse de fases).

Cada ponto  $P(x,v)$  da elipse é um ponto figurativo do movimento. A elipse é a "trajetória" desse ponto figurativo e fornece muito claramente a "fase" do movimento a cada instante.

A vantagem de uma tal representação do sistema real ( $m + \text{mola}$ ), é também evidenciar a menor perturbação que pode ocorrer no movimento da massa.

O espaço matemático em que a curva é traçada chama-se *espaço de fases*.

A área da elipse de fases é dada por  $A = \pi x_0 v_0$ , ou seja pela expressão  $A = E \cdot T/m$ , onde  $T$  é o período da oscilação, veja o seguinte parágrafo. Essa expressão se reduz a  $A = E \cdot T$ , se traçarmos o momento linear  $p = m v$  junto com a coordenada  $x$ . Neste caso, obtemos em vez da Eq. (16) a seguinte equação para a elipse de fases:

$$\frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{p^2}{2mE} = 1 \quad (17)$$

As elipses de fases crescem com a energia total do oscilador. Já que  $E$  pode tomar -em certo domínio- qualquer valor, o plano- $p-x$  pode ser coberto em forma contínua de elipses de fases. Isso não é válido para uma molécula diatômica como  $\text{HCl}$ ,  $\text{O}_2$  etc., já que para sistemas quânticos não existem energias continuamente distribuídas, a energia é quantizada (discreta). Para um oscilador quântico temos só os seguintes valores discretos de energia disponíveis:

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) h f, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (18)$$

$h = 6,636 \cdot 10^{-34}$  Js é a constante de PLANCK,  $f$  é a frequência do oscilador.

Substituindo (18) em  $A = ET$ , veremos que somente existem elipses com as áreas

$$A(E_n) = \frac{1}{2} h, \quad h, \quad \frac{3}{2} h, \quad \text{etc.} \quad (19)$$

A menor elipse possível no plano- $x-p$  tem a área  $A(E_0) = h/2 = 3,313 \cdot 10^{-34}$  Js.

### 4.7.5 Com lápis e papel

Somente inspecionando um curva de energia potencial podemos dar-nos conta de que o sistema efetuará oscilações ao redor do ponto de equilíbrio. O que não podemos deduzir sem calculos adicionais é o período  $T$  das oscilações. Mas, utilizando as informações dadas em 4.7.4, conservação de energia, podemos escrever

$$v = dx/dt = [2(E-E_p(x))/m]^{1/2}, \text{ de onde obtemos}$$

$$\frac{T}{2} = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}}$$

Efetuando a integração, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (20)$$

(Fazendo o cálculo, chegamos a  $\int dx/(x_0^2-x^2)^{1/2} = [\text{sen}^{-1}(x/x_0)] = \text{sen}^{-1}(1) - \text{sen}^{-1}(-1)=\pi$ ).

Observe que  $T$  é independente da amplitude  $x_0$ , o que significa que  $T$  não depende da energia total. Embora possamos ver da curva de energia potencial que o movimento será periódico, não podemos deduzir que o movimento será exatamente senoidal (ou cossenoidal). Mas outra vez podemos efetuar uma integração da relação  $v = dx/dt = [2(E-E_p(x))/m]^{1/2}$  e confirmar que  $x$  é da forma  $x = A \cos(\omega t+c)$ . Suponhamos que a partícula começa o seu movimento no instante  $t = t_0$  em  $x = x_0$ .

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{x_0^2 - x'^2}} = \text{sen}^{-1} \frac{x}{x_0} - \text{sen}^{-1}(1) = \text{sen}^{-1} \frac{x}{x_0} - \frac{\pi}{2}$$

Isso é  $\text{sen}^{-1}(x/x_0) = (t-t_0)(k/m)^{1/2} + \pi/2$ . Podemos utilizar uma função cossenoidal, já que a única diferença com respeito à função senoidal está numa diferença de  $\pi/2$  na fase inicial. Entyó temos

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) \quad (21)$$

Escolhendo  $t_0 = 0$  e  $(k/m)^{1/2} = 2\pi/T := \omega$ , obtemos, finalmente,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (22)$$

O movimento oscilatório será estudado amplamente no capítulo 6. Compare também os resultados sobre o movimento oscilatório de um pêndulo que obtivemos em 3.2 juntamente com varias animações do movimento.