

4.6 Campos de vetores gradientes

Nesta seção vamos ver porque campos vetoriais de força independentes do caminho são também chamados **conservativos**. Pois, resulta: quando uma partícula se move sob a influência de um campo de vetores conservativo, a energia total da partícula é conservada.

Acontece que o campo de força é obtido do *gradiente* da *função potencial*.

4.6.1 O gradiente de Φ

O trabalho realizado por \mathbf{F} durante um deslocamento $d\mathbf{r}$ é $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Este produto escalar vamos escrever como $F_x dx + F_y dy + F_z dz$, pois $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ e $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$.

O trabalho total realizado ao longo da trajetória C do ponto 1 até o ponto 2 é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (1)$$

A integral é uma integral de linha dependente, em geral, da trajetória particular seguida entre dois pontos quaisquer 1 e 2 no 3-espaco. Se, entretanto, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é uma diferencial exata $d\Phi$ de alguma função escalar Φ das coordenadas x-y-z, então

$$W_{1,2} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (2)$$

(Lembre-se de que uma forma diferencial $Pdx + Qdy + Rdz$ é uma diferencial exata nas coordenadas x-y-z, se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad (3)$$

As derivadas parciais podemos denotar por D_x , por exemplo $D_x Q(x,y,z) = \partial Q / \partial x$ (lê-se D sub x de Q, onde sub é abreviatura de subíndice).

Outra notação para $D_x Q$ é $D_1 Q$ = derivada parcial de Q em relação à primeira variável.

Podemos formular a seguinte

Definição:

A expressão diferencial $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ é denominada *exata*, se existir uma função Φ tal que $\partial\Phi/\partial x = P$, $\partial\Phi/\partial y = Q$ e $\partial\Phi/\partial z = R$.

Agora, se Φ existe, a variação diferencial de Φ torna-se

$$d\Phi = \partial\Phi/\partial x \cdot dx + \partial\Phi/\partial y \cdot dy + \partial\Phi/\partial z \cdot dz \quad (4)$$

A comparação com $d\Phi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ nos dá

$$F_x = \partial\Phi/\partial x, F_y = \partial\Phi/\partial y, F_z = \partial\Phi/\partial z \quad (5)$$

Pode-se pensar em $\mathbf{F}(x,y,z) = \partial\Phi/\partial x \mathbf{i} + \partial\Phi/\partial y \mathbf{j} + \partial\Phi/\partial z \mathbf{k}$ como sendo o resultado da aplicação do operador vetorial

$$\nabla(\text{Nabla}) = \text{grad}(\text{gradiente})$$

à função Φ . O operador "nabla" (dito "del" na fala americana porque não é um delta maiúsculo; o operador tem a forma do instrumento musical "nabla" hebraico) escreve-se em coordenadas cartesianas como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\mathbf{k}} \quad (6)$$

Normalmente vou escrever "grad" para designar este operador: $\text{grad} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

Temos, assim, a notação $\text{grad } \Phi = (D_1\Phi, D_2\Phi, D_3\Phi)$ e

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \text{grad } \Phi(x,y,z). \quad (7)$$

Quando as componentes da força podem ser obtidas de um "potencial" Φ , a força é chamada de *conservativa*, e o trabalho realizado por \mathbf{F} entre dois pontos quaisquer é independente da trajetória seguida.

Já foi dito que na física se define Φ com um sinal de menos, ou seja, usa-se

$$\Phi(\mathbf{r}) := -E_p(\mathbf{r}) \quad (8)$$

pois, assim, podemos dar a $\Phi(\mathbf{r})$ uma interpretação física, como mostra o seguinte

Exemplo:

Para uma partícula de massa m perto da superfície da Terra vale

$$\Phi(\mathbf{r}) := -E_p(\mathbf{r}) = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \quad \text{com } \mathbf{g} = (0, 0, -g).$$

Para a força gravitacional obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \text{grad } \Phi(\mathbf{r}) = -\text{grad } E_p(\mathbf{r}) = m \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (g_x x + g_y y + g_z z) \\ &= m(g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k}) = -mg \mathbf{k} \end{aligned}$$

No teorema da conservação da energia mecânica (4.5.2, Eq. (9)) temos a integral

$$W' = - \int_a^b \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} \quad (9)$$

que significa o trabalho realizado *contra* o campo de força. $W = -W'$ é o trabalho do campo. Utilizando $\mathbf{F} = \text{grad } \Phi = -\text{grad } E_p$, obtemos

$$E_p(\mathbf{r}) - E_p(\mathbf{r}_0) = W' = \int \text{grad } E_p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \text{onde a integral vai de } \mathbf{r}_0 \text{ até } \mathbf{r}.$$

Ou seja, o trabalho realizado (num deslocamento quase-estático do ponto \mathbf{r}_0 até o ponto \mathbf{r}) contra o campo é igual à diferença da energia potencial nos pontos final e inicial.

Se definirmos $E_p(\mathbf{r}_0) := 0$, podemos dizer:

$$E_p(\mathbf{r}) = \text{trabalho realizado contra o campo para transportar uma partícula de } \mathbf{r}_0 \text{ até } \mathbf{r}.$$

Se \mathbf{F} for um campo conservativo, então a energia mecânica ficaria constante, ou seja

$$dE/dt = 0 \quad \text{com } E = mv^2/2 + E_p(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Vamos demonstrar este teorema importante:

Da Eq. (10) resulta $dE/dt = d[mv^2/2 + E_p(\mathbf{r})]/dt = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} + \text{grad } E_p)$, pois

$$dE_p/dt = \frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot dx/dt + \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot dy/dt + \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot dz/dt = \text{grad } E_p \cdot \mathbf{v}$$

Obtemos, assim, $dE/dt = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} + \text{grad } E_p) = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} - \mathbf{F}) = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} - m\mathbf{a}) = 0$.

Este resultado explica, finalmente, o uso do termo "conservativo" para uma força cuja integral de linha é independente do caminho.

Mas, como podemos saber, se uma força é ou não é gradiente de uma função potencial?

Existe um teste muito simples para decidir se um campo vetorial é independente do caminho.

Para este teste temos que definir um novo campo vetorial, o campo "rotacional" do campo dado \mathbf{F} . Este novo campo se define assim:

$$\text{rot } \mathbf{F} = (\partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z) \mathbf{i} + (\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x) \mathbf{j} + (\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y) \mathbf{k} \quad (11)$$

-se estas derivadas parciais existirem...

O critério do rotacional para campos vetoriais no 3-espaço reza assim:

$$\text{A integral de linha } \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ é independente do caminho se } \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

(Os matemáticos tomam conta de todas as precauções que permitem formular este critério nesta forma lacônica.)

Para simplificar a decoração de (11), usamos a seguinte regra mnemônica em forma de determinante

$$\text{rot } \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ D_x & D_y & D_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} := \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \quad (13)$$

A forma explícita é

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= (D_y F_z - D_z F_y) \mathbf{i} + (D_z F_x - D_x F_z) \mathbf{j} + (D_x F_y - D_y F_x) \mathbf{k} \quad (14) \\ &= (\partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z) \mathbf{i} + (\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x) \mathbf{j} + (\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Para uma função no 2-espaço, a condição $\text{rot } \mathbf{F}(x,y) = \mathbf{0}$ significa $\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y = 0$, pois os outros termos são neste caso zero.

Existe outro campo obtido do campo \mathbf{F} por meio de derivações parciais. Trata-se do campo escalar denominado *divergente* ou *divergência* de \mathbf{F} e denotado por " $\text{div } \mathbf{F}$ ". A divergência vem definida por

$$\text{div } \mathbf{F} = \partial F_x / \partial x + \partial F_y / \partial y + \partial F_z / \partial z \quad (15)$$

Utilizaremos alguns **exemplos** para mostrar a aplicação da regra mnemônica.

1. Consideremos o campo $\mathbf{F}(x,y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$.

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= (\partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z) \mathbf{i} + (\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x) \mathbf{j} + (\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y) \mathbf{k} \\ &= (\partial 0 / \partial y - \partial x / \partial z) \mathbf{i} + (\partial (-y) / \partial z - \partial 0 / \partial x) \mathbf{j} + (\partial x / \partial x - \partial (-y) / \partial y) \mathbf{k} \\ &= 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + (1 - (-1)) \mathbf{k} = 2 \mathbf{k} \end{aligned}$$

2. Outro exemplo com o campo radial $\mathbf{F}(x,y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$:

$$\text{rot } \mathbf{F} = (\partial 0 / \partial y - \partial y / \partial z) \mathbf{i} + (\partial x / \partial z - \partial 0 / \partial x) \mathbf{j} + (\partial y / \partial x - \partial x / \partial y) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

3. Seja, agora, $\mathbf{F}(x,y,z) = e^z \mathbf{i} + 2xy^2z \mathbf{j} + (x^2z + y) \mathbf{k}$. Então

$$\text{rot } \mathbf{F} = (x^2z - 2xy^2) \mathbf{i} + (e^z - 2xz) \mathbf{j} + (2y^2z - 0) \mathbf{k}$$

MuPAD faz o seguinte cálculo

$$\bullet \mathbf{u} := ([e^z, 2*x*y^2*z, x^2*z+y]) :$$

$$\mathbf{v} := ([x, y, z]) :$$

$$\text{linalg}::\text{curl}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) :$$

$$\begin{pmatrix} -2 \cdot x \cdot y^2 + 1 \\ e^z \cdot \ln(e) - 2 \cdot x \cdot z \\ 2 \cdot y^2 \cdot z \end{pmatrix}$$

4. Seja $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

Mostrar que

$$\text{grad } f = - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = - \mathbf{r}/r^3$$

Solução:

$$\text{grad } f = \partial f / \partial x \mathbf{i} + \partial f / \partial y \mathbf{j} + \partial f / \partial z \mathbf{k},$$

$$\partial f / \partial x = -1/2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -x / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}; \text{ as outras derivadas dão resultados parecidos,}$$

O MuPAD produz o mesmo vetor como o cálculo manual

$$\mathbf{u} := (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} :$$

$$\mathbf{v} := ([x, y, z]) :$$

$$\text{linalg}::\text{grad}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Se $\Phi(x,y,z) = GM/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = GM \cdot f(x,y,z)$, então

$$\text{grad } \Phi = -GM/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

Comparando esta equação com a lei de gravitação de Newton (veja 4.5.3, Eq. (11)), observamos que

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \text{grad } \Phi(x,y,z)$$

Portanto, \mathbf{F} é conservativo e Φ é uma função potencial de \mathbf{F} .

5. Voltemos nossa atenção à função $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$ da seção anterior (4.5.5) que foi encontrada como não sendo conservativa, pois o trabalho dependia do caminho. Vamos, agora, mostrar que ela não pode haver nenhuma função potencial.

Suponhamos que \mathbf{F} tenha uma função potencial Φ , de modo que $\mathbf{F} = \text{grad } \Phi$. Isto significa que existe uma função Φ tal que $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = \partial\Phi/\partial x \mathbf{i} + \partial\Phi/\partial y \mathbf{j}$, ou seja $\partial\Phi/\partial x = y^2$ e $\partial\Phi/\partial y = x^2$.

Integrando a expressão para $\partial\Phi/\partial x$, vemos que se deve ter $\Phi(x,y) = xy^2 + C(y)$, onde $C(y)$ é função de y .

Diferenciando a expressão para $\Phi(x,y)$ com relação a y e usando o fato de que $\partial\Phi/\partial y = x^2$, vem $\partial\Phi/\partial y = 2xy + C'(y) = x^2$.

Assim devemos ter $C'(y) = x^2 - 2xy$.

Mas esta expressão para $C'(y)$ é impossível porque $C'(y)$ é função só de y .

Este argumento mostra que não há função potencial para \mathbf{F} .

Conhecemos, porém, um método mais simples para provar que \mathbf{F} não possui função potencial: somente devemos mostrar que $\partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \neq 0$, ver Eq. (14).

Como $\partial F_y/\partial x = 2x$ e $\partial F_x/\partial y = 2y$, temos, neste caso, $\partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \neq 0$, de modo que \mathbf{F} não pode ser um campo gradiente.

6. Com o método aplicado no anterior exemplo podemos, também, achar uma função potencial, se \mathbf{F} for um campo conservativo.

No parágrafo 4.5.5 dissemos que $\mathbf{F}(x,y) = 1/y \mathbf{i} - x/y^2 \mathbf{j}$ é um campo conservativo. Provemos, primeiro, que esta afirmação é certa; depois vamos buscar uma função potencial.

a. \mathbf{F} é conservativo, se $\partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 0$.

Como $\partial F_x/\partial y = -1/y^2$ e $\partial F_y/\partial x = -1/y^2$, segue que \mathbf{F} é um gradiente e é, portanto, um campo vetorial conservativo.

b. Uma função potencial $\Phi(x,y)$ satisfaz a equação $\mathbf{F}(x,y) = \text{grad } \Phi(x,y)$. Procedamos como no exemplo anterior: $\partial \Phi/\partial x = 1/y$ e $\partial \Phi/\partial y = -x/y^2$.

Integrando $\partial \Phi/\partial x$, temos $\Phi(x,y) = x/y + C(y)$, onde $C(y)$ é função de y , independente de x . Derivando $\Phi(x,y)$ em relação a y , e usando $\partial \Phi/\partial y = -x/y^2$, resulta

$$\partial \Phi/\partial y = -x/y^2 + C'(y) = -x/y^2$$

e daí $C'(y) = 0$, ou seja $C(y) = \text{const.}$

A função potencial buscada é $\Phi(x,y) = x/y + \text{const.}$

No seguinte programa temos os passos anteriores incorporados. É só necessário introduzir os termos F_x e F_y , o programa determina logo a função potencial, se existir. Se não existir, obtemos a mensagem "False".

Por **exemplo**:

Dado o campo de vetores $\mathbf{F}(x,y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$.

Verifique que $\Phi(x,y) = (x^2 + y^2)/2 + \text{const.}$ (O programa não mostra a constante.)

- ```

fx(x,y) :=x:
fy(x,y) :=y:
fxy:=diff(fx(x,y),y)://∂Fx/∂y
fyx:=diff(fy(x,y),x):
bool(fxy=fyx);
phi:=int(fx(x,y),x);
phiy:=diff(phi,y):
h1:=fy(x,y)-phiy:
h:=int(h1,y)

```

TRUE

$$\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{y^2}{2}$$

A função potencial existe e tem a forma  $\Phi(x,y) = x^2/2 + y^2/2 + \text{const.}$

Aplique o programa aos seguintes campos:

$$\mathbf{F}(x,y) = (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) / (x^2 + y^2) \quad \rightarrow \quad \Phi(x,y) = \ln(x^2 + y^2)/2 + \text{const.}$$

$$\mathbf{F}(x,y) = 2xy \mathbf{i} + xy \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \text{False, } \mathbf{F} \text{ não pode ser um campo gradiente}$$

$$\mathbf{F}(x,y) = 2x \cos(y) \mathbf{i} - x^2 \sin(y) \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \Phi(x,y) = x^2 \cos(y) + \text{const.}$$

#### 4.6.2 Forças centrais ( $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{r}/r$ )

Cada campo central é conservativo e sua energia potencial  $E_p = E_p(r)$  depende somente do módulo de  $\mathbf{r}$ .

Cada caminho num campo central pode ser aproximado por uma seqüência de deslocamentos alternadamente radiais e angulares (= deslocamentos perpendiculares aos radiais).

Ao longo dos movimentos radiais temos  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F(r) \mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0,r} F(r') dr'$  e ao longo dos movimentos angulares temos  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ , ou seja, o trabalho realizado pelo campo central é nulo nos deslocamentos angulares.

Portanto, a energia potencial depende somente do módulo do vetor-posição  $\mathbf{r}$ . Escolhendo  $E_p(\mathbf{r}_0) = E_p(r_0) = 0$ , podemos calcular a energia potencial por meio de

$$E_p(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (16)$$

Daí segue que todas as forças centrais são conservativas, o que significa que elas podem ser representadas como gradientes.

Podemos demonstrar isso também analiticamente, pois o gradiente de uma função do módulo de  $\mathbf{r}$  é

$$\text{grad } f(r) = df(r)/dr \mathbf{r}^0 \quad (17)$$

Derivando (16) dá  $dE_p(r)/dr = -F(r)$ , e designando  $f(r)$  por  $E_p(r)$ , temos da Eq. (17)

$$\text{grad } E_p(r) = -F(r) \mathbf{r}^0 = -F(r) \mathbf{r}/r \quad (18)$$

No caso particular da *força gravitacional* temos  $F(r) = -k/r^2$  com  $k := GmM$ , onde a constante gravitacional é  $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ .

Para obter a energia potencial, basta aplicar a Eq. (16):

$$E_p(r) = E_p(r_0) + k \int_{r_0}^r (1/r')^2 dr' = E_p(r_0) + k [1/r_0 - 1/r]$$

Normalmente, a energia potencial no infinito ( $r_0 = \infty$ ) é tomado como sendo zero. Com esta convenção temos

$$E_p(r) = -k/r = -GmM/r \quad (19)$$

(Com  $\text{grad } (1/r) = -\mathbf{r}/r^3$  podemos escrever  $\text{grad } E_p(r) = -GmM \mathbf{r}/r^3$ , que é outra vez a lei de gravitação de Newton.)

$W_{\text{campo}} = -E_p(r)$  é o trabalho do campo gravitacional para mover uma partícula do infinito até a distância  $r$  do centro.

Também podemos dizer:  $W_{\infty} = GmM/r$  é o trabalho que devemos realizar para transportar uma partícula desde a distância  $r$  até o infinito.  $W_{\infty}$  é chamado de **energia de escape**.

A energia total de uma partícula na distância  $r$  do centro é  $E = E_k + E_p(r)$ , ou seja

$$mv^2/2 + (-GmM/r) = E \quad (20)$$

Se  $E$  for zero, então a velocidade na distância  $r$  será

$$v = (2GM/r)^{1/2} \quad (21)$$

Esta velocidade (*velocidade de escape* para um projétil disparado para cima) diminui com a distância e, quando o projétil atinge o "infinito", ele vai parar, já que sua velocidade vai ser nula.

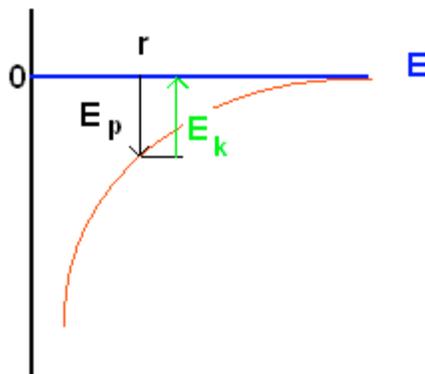


Fig.: 4.6.-1

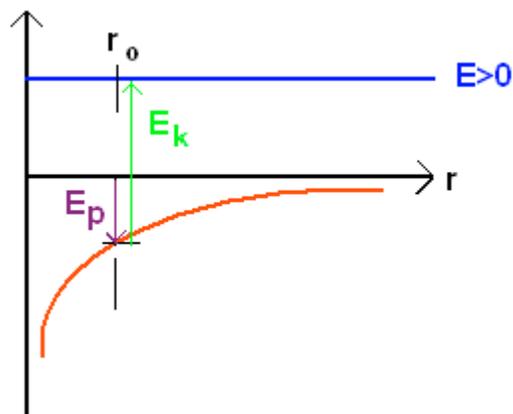


Fig.: 4.6-2

A figura 4.6-1 com  $E = 0$  mostra que  $E_k$  e  $E_p$  vão ambas ter, no infinito, o valor zero. Fig.: 4.6-2 mostra o caso de  $E > 0$ . A partícula não vai parar no infinito, -teoricamente.

Se o projétil é disparado da superfície da Terra ( $M = 5,98 \cdot 10^{24}$  kg,  $R_T = 6,37 \cdot 10^6$  m), temos  $v = 11,2$  km/s como *velocidade de escape*. Na Lua da Terra precisaríamos só 2,38 km/s.

### Problema:

Um asteróide acercando-se para a Terra pode ser considerado como um projétil disparado para baixo. Suponhamos que a velocidade do asteróide é de 12 km/s em relação à Terra quando se encontra a uma distância do centro da Terra igual a 10 raios da Terra ( $r = 10R$ ). Desprezando os efeitos da atmosfera da Terra sobre o asteróide, determina a velocidade final  $v_{fin}$  do asteróide quando ele atinge a superfície da Terra.

### Solução:

A energia mecânica do sistema Terra-asteróide (M-m) se conserva durante a queda, ou seja:

$$E_{k,fin} + E_{p,fin} (R) = E_{k,ini} + E_{p,ini} (10R)$$

$$m v_{fin}^2/2 - GmM/R = m v_{ini}^2/2 - GmM/(10R)$$

A massa  $m$  do asteróide cai da equação. Reordenando e substituindo valores conhecidos, achamos  $v_{fin} = 16$  km/s.

Se o asteróide tiver apenas 5 m de diâmetro, o impacto poderia liberar quase tanta energia quanto a explosão nuclear de Hiroshima. O impacto de um asteróide de 500 m de diâmetro "poderia provocar o fim da civilização moderna e quase eliminar a raça humana da face da Terra." (Halliday et. al. Vol. II)

Não é preocupante saber que cerca de um milhão de asteróides deste tamanho estão próximos da órbita terrestre?

### 4.6.3 Exemplos

Se sabemos que  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho (neste caso temos  $\partial F_x / \partial y = \partial F_y / \partial x$ ), podemos escolher um "bom caminho" e avaliar a integral. Vimos, por exemplo, que  $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  é independente do caminho e, para ir de  $(x_0, y_0)$  até  $(x, y)$ , basta ir primeiro de  $(x_0, y_0)$  até  $(x, y_0)$  e depois de  $(x, y_0)$  até  $(x, y)$ :

- `f:=t:`  
`phi:=int(f, t=x0..x)+int(f, t=y0..y)`

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}$$

ou seja:  $\Phi(x,y) = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0,x} t \, dt + \int_{y_0,y} t \, dt = x^2/2 + y^2/2 + \text{const.}$ , que é o mesmo resultado como antes no 4.6.1.

Para o campo  $\mathbf{F} = 2x \cos(y) \mathbf{i} - x^2 \sin(y) \mathbf{j}$  obtemos

- `phi:=int(2*t*cos(t), t=0..x)-int(x^2*sin(t), t=0..y)`

$$x^2 \cdot \cos(y)$$

Neste caso começamos com a integração na origem. Outra vez temos o resultado já obtido com outro método.

Acrescentemos, para terminar essa seção, alguns programas sobre exemplos de interesse para o nosso tema:

- `reset()://Gradiente de funções potenciais centrais`  
`//usando coordenadas cartesianas`  
`export(linalg):`  
`r:=sqrt(x^2+y^2+z^2):`  
`g1:=grad(r,[x,y,z]):`  
`g2:=grad(1/r,[x,y,z]):`

- `reset()://Gradiente de funções potenciais centrais`  
`//usando coordenadas esféricas`  
  
`/*os resultados devem ser multiplicados pelo vetor unitário radial*/`  
  
`export(linalg):`  
`g1:=grad(r,[r,theta,phi])[1]:`  
`Simplify(g1);`  
`g2:=grad(1/r,[r,theta,phi])[1]:`  
`Simplify(g2);`  
`g3:=grad(F(r),[r,theta,phi])[1]:`  
`Simplify(g3);`  
`g4:=grad((1+a*r/2)*e^(-a*r)/r,[r,theta,phi])[1]:`  
`Simplify(g4);`

#### 4.6.4 A superfície potencial do sistema Terra-Lua

Para ilustrar o campo gravitacional de uma massa  $M$ , podemos representar  $E_p(r)$  por uma superfície construída por encima do plano- $x$ - $y$ , ou seja, podemos associar com cada ponto  $(x,y)$  uma coordenada  $E_p(r) = -GmM/(x^2 + y^2)^{1/2}$  no espaço  $E_p$ - $x$ - $y$ . O conjunto de tais pontos seria a superfície da energia potencial. O inconveniente de tal representação seria o fato de que ela não só dependeria de  $M$  mas também de  $m$ .

Utiliza-se, por isso, outra grandeza para representar o campo gravitacional, a saber, o **potencial** gravitacional, definido dividindo  $E_p$  por  $m$ :

$$V := E_p(r)/m = -GM/r := C/r \quad (22)$$

com  $C := GM$ .

Vemos que o potencial gravitacional no ponto  $P = (x,y,z)$  é a energia potencial de uma massa de  $m = 1\text{kg}$  (massa unitária) colocada no mesmo ponto  $P$  do campo gravitacional. O potencial gravitacional é, então, expresso em  $\text{J/kg}$  ou  $\text{MJ/kg}$  (*megajoule*). O potencial na superfície terrestre é  $-62,565 \text{ MJ/kg} = -62,565 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ . (Na superfície da Lua temos  $-2,821 \text{ MJ/kg}$ .)

O potencial do sistema Terra-Lua num ponto P obtém-se somando escalarmente os potenciais da Terra e da Lua  $V = V_T + V_L = -G(M_1/r_1 + M_2/r_2)$ , onde  $M_1$  é a massa da Terra,  $M_2 =$  massa da Lua.  $r_1 =$  distância de P da Terra,  $r_2 =$  distância de P da Lua. Os valores numéricos são  $M_1 = 5,974 \cdot 10^{24}$  kg e  $M_2 = 7,348 \cdot 10^{22}$  kg. Vamos supor que a Lua se encontra numa distância meia de  $x_m = 60 \cdot R_T$ .  $R_T = 6,37 \cdot 10^6$  m.

- `reset()://superfície de potencial do sistema Terra-Lua.`
- `e1:=62.5:// = G M1`
- `e2:=7.75:// = 10 · G M2`
- `xm:=60:ym:=0://xm =60 · RT`
- `a:=10:b:=70:c:=10:d:=10:`
- `f(x,y):=-e1/sqrt(x^2+y^2)-e2/sqrt((xm-x)^2+(ym-y)^2):`
- `superf:=plot::Surface([x,y,2*f(x,y)],x=-a..b,y=-c..d):`
- `plot(superf,Scaling=Constrained)`

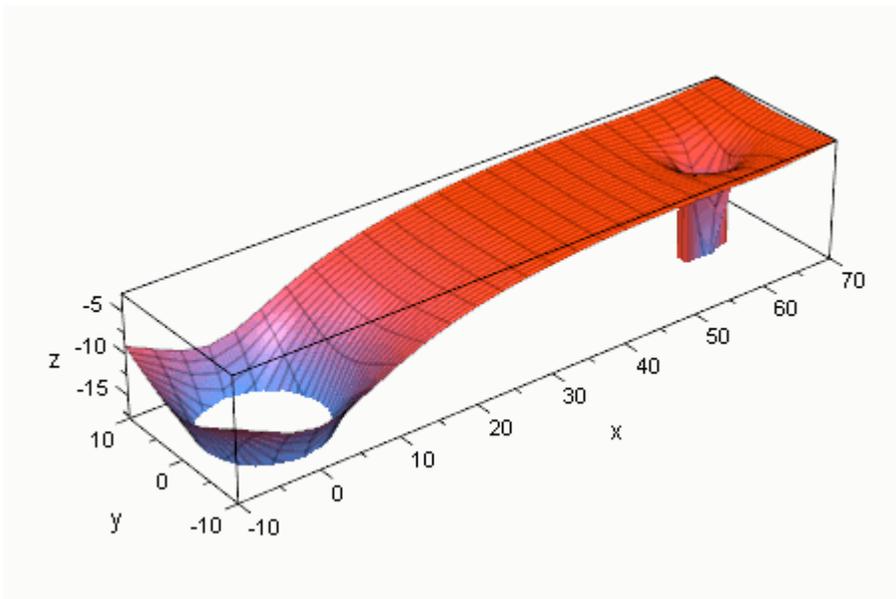


Fig.: 4.6-3

A figura 4.6-4 mostra outra perspectiva do mesmo sistema.

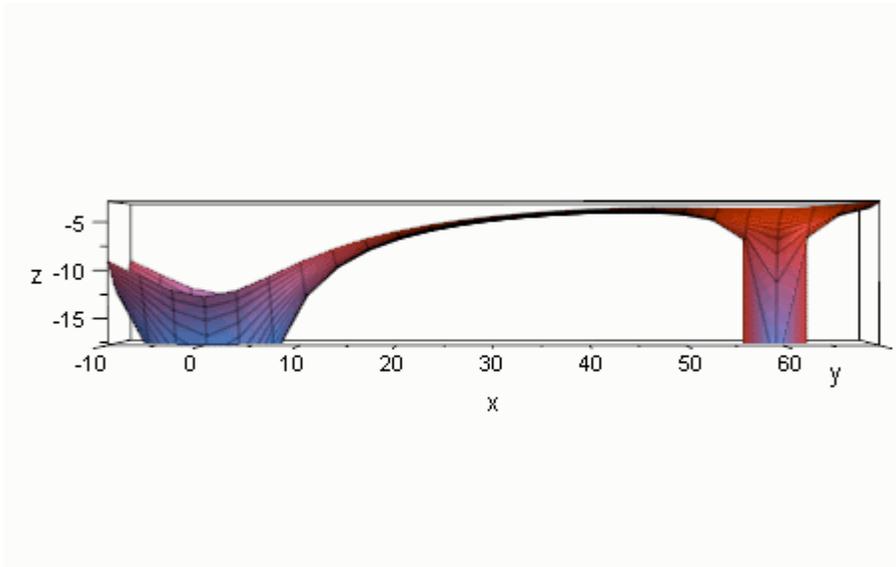


Fig.: 4.6-4

O "pote de potencial" da Terra dá a impressão de uma cratera com a Terra no fundo dela. Para escapar da atração gravitacional, deve-se "escalar" as paredes do "pote de potencial". Mas tal fuga não é possível. A única possibilidade de escapar seria por meio de um canhão imenso que seria capaz de proporcionar ao corpo uma velocidade de escape de 11,188km/s. Mas, até agora, tal canhão não foi construído.

Na cercania da Terra a "montanha do potencial" sobe por 0.0098MJ/kg por cada km de altura, este valor é na Lua somente 0.0016 MJ/kg/km.

Na linha que conecta Terra e Lua existe um ponto N, onde a curva de potencial é horizontal e o campo gravitacional resultante é nulo. Este ponto tem uma distância de 54  $R_T$  do centro da Terra.

Com o seguinte programa podemos fazer uma ilustração no 3-espaco de um modelo do sistema Terra-Lua, simplesmente representando duas esferas com diferentes centros e raios.

Sendo  $x_m$ ,  $y_m$  as coordenadas do centro lunar, com o centro da terra na origem do sistema de coordenadas, temos

$$V(x,y) = -GM_1/(x^2 + y^2)^{1/2} - GM_2/[(x_m-x)^2 + (y_m-y)^2]^{1/2}$$

- ```

mx:=0:my:=0:mz:=0:r:=2://centro e raio da Terra
x := r*cos(u)*sin(v)+mx:
y := r*sin(u)*sin(v)+my:
z := r*cos(v)+mz:
s1 := plot::Surface([x, y, z], u = 0 .. 2*PI, v = 0 .. PI,
Color=RGB::Red):
mx:=2:my:=-2:mz:=3:r:=0.5:// "Lua"
X := r*cos(u)*sin(v)+mx:
Y := r*sin(u)*sin(v)+my:
Z := r*cos(v)+mz:
s2 := plot::Surface([X, Y, Z], u = 0 .. 2*PI, v = 0 .. PI,
Color=RGB::Blue): plot(s1,s2, Scaling = Constrained)

```

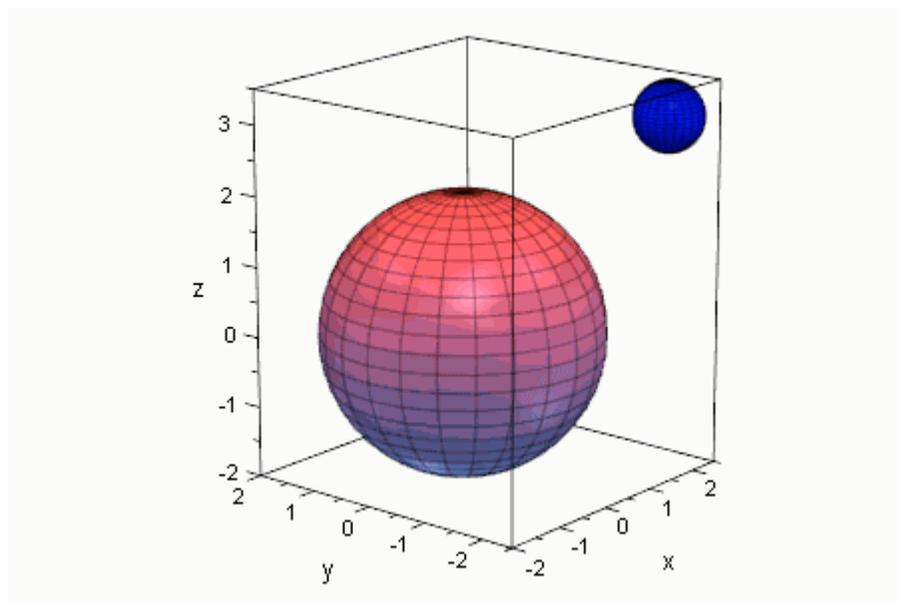


Fig.: 4.6-5

Esta figura é semelhante a uma foto tomada pela sonda "Galileo", veja

http://www.oal.ul.pt/observatorio/vol6/n2/vol6n2_5.html

4.6.5 Com lápis e papel

a. A aceleração da gravidade

A energia potencial da massa m na distância r do centro da Terra é

$$E_p(r) = G m M (1/r_0 - 1/r) \quad (23)$$

Se a superfície da Terra é o referencial para E_p , então $r_0 = R_T = 6,371 \cdot 10^6$ m.

Para pequenas alturas h podemos escrever

$$E_p(r) = G m M ((r-R_T)/(rR_T)) \approx G M/R_T^2 \cdot mh := g \cdot mh \quad (24)$$

onde $g := GM/R_T^2$ é a aceleração da gravidade em termos da massa e do raio da Terra. Introduzindo os valores numéricos, obtemos $g = 9,82$ m/s².

b. Satélites artificiais

A velocidade de escape é a velocidade mínima com a qual um corpo deve ser lançado da Terra para alcançar o infinito.

Um satélite artificial é lançado da Terra por um foguete portador. Após alcançar uma altura máxima h , o satélite recebe um impulso final que lhe dá uma velocidade horizontal v_0 . A energia total do satélite será

$$E = mv_0^2/2 - GmM/(R_T+h) \quad (25)$$

Para $E < 0$ a trajetória será uma elipse. Se a energia for muito baixa, a órbita intersectará a Terra e o satélite cairá. No próximo capítulo vamos estudar as trajetórias de satélites com mais detalhe.

c. O sistema Terra-Lua

A massa lunar é aproximadamente $1/81$ vezes a da Terra e para a distância entre os centros podemos tomar $d = 60 \cdot R_T$.

A força gravitacional resultante $\mathbf{F} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_L$ se faz zero em certo ponto N entre Terra e Lua. A curva do potencial é horizontal em N; N é um ponto "sela".

A posição de N obtemos da equação $G m_M T / r^2 = G m_M L / (60 R_T - r)^2$ Resolvendo por r, temos $r := r_N = 54 R_T$. Quando o foguete passa por este ponto, ele será acelerado pela força gravitacional da Lua.