

## 4.5 Conservação de Energia

Chegamos até aqui sem ter tido a necessidade de usar o conceito de **energia**, nunca fomos obrigados a usar a energia na busca de uma solução de um problema.

Mas, pelo menos por razões práticas, seria completamente errado não fazer uso da lei de conservação de energia, pois ela não contém nenhuma derivada segunda, já que não utiliza a aceleração, e é, por isso, um passo mais perto da solução do problema dado.

### 4.5.1 Trabalho e energia cinética

Que significado físico pode ter uma integral de linha (ou caminho) da forma

$$\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

Esta integral de  $\vec{F}$  soma os produtos escalares de  $\vec{F}$  e  $d\vec{r}$  ao longo do caminho, sendo  $d\vec{r}$  um deslocamento infinitesimal.

Existe uma grandeza física que varia sob a influência de uma determinada força  $\vec{F}$  *ao longo de um caminho*, similar à mudança do momento linear que sofre uma partícula submetida a uma força *ao longo de certo intervalo de tempo*?

A integração de (1) começa no ponto  $P_0$  e se estende até o ponto final  $P_1$ . A pergunta surge, se o valor da integral depende ou não *da forma* do caminho percorrido pela partícula.

Se a integral depender do caminho, não teria muito sentido introduzi-la, já que obteríamos, para  $P_0$  e  $P_1$  dados, um número infinito de valores para a integral (1).

Historicamente, tratou-se este problema por introduzir duas novas grandezas: o **trabalho** e a **energia cinética**.

Primeiro, chamamos a integral (1) de trabalho  $W$  que a soma de todas as forças, aplicadas sobre a partícula, realiza movendo-a de  $P_0$  até  $P_1$ . O trabalho é positivo, se a força age na direção do movimento. (Veja um exemplo no parágrafo 4.5.5)

Segundo, definimos pela relação

$$E_k = m v^2/2 \quad (2)$$

a energia cinética da partícula.

(Ao começo, o fator 1/2 não foi usado. O produto  $m v^2$  tinha sido chamado de *vis viva*, força viva.)

Essas duas grandezas são ligadas entre se por meio da seguinte relação

$$\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (3)$$

Eq. (3), também chamada de *teorema do trabalho- energia cinética*, é uma consequência da segunda lei de Newton.

Para mostrar isso, substituímos  $\vec{F}$  por  $m \cdot d^2\vec{r}/dt^2$  e aplicamos a relação vetorial geral

$$2 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right)}{dt} \quad (4)$$

Escrevendo  $d\vec{r}/dt \cdot d\vec{r}/dt = v^2$ , obtemos

$$\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{m}{2} \int_{v_0}^{v_1} \frac{d(v^2)}{dt} \cdot dt = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} \quad (5)$$

O que é a relação (3).

Note: A integral *temporal* de tipo  $\int \vec{F} dt$  de uma força produz a variação de uma grandeza *vetorial*, a saber, do momento linear:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (6)$$

A variação do momento linear é chamado de **Impulso** da força. Mas, a integral *espacial* de uma força produz a variação de uma grandeza *escalar* positiva, da energia cinética.

É interessante que no teorema trabalho-energia cinética (3) só aparecem as velocidades inicial e final. O que passa ao longo do caminho percorrida não tem importância para a variação da energia cinética. Sobre este ponto vamos falar mais adiante com exemplos.

Sabemos que o momento linear de um sistema isolado é uma constante, mas isso não é o caso com a energia cinética.

Considere dois carrinhos, providos de molas que vêm a ser deformadas durante a colisão, que estão movendo-se sem atrito um contra o outro, para fazer uma colisão elástica frontal. Durante a colisão os carrinhos pararão por um instante antes de separar-se outra vez.

Enquanto em cada instante a soma  $\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$  é sempre a mesma, não é certo isso para a soma  $E_k = m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 := E_{k1} + E_{k2}$ , que até chega a ser zero no instante da parada.

Se, porém, compararmos as energias cinética antes e depois da interação, então vamos constatar que  $E_{k,fin} = E_{k,ini}$ , pois pressupusemos uma colisão elástica.

Nas colisões do dia-a-dia entre corpos comuns, como, por exemplo, entre dois carros, há sempre uma transferência de energia cinética para outras formas de energia, como por exemplo energia térmica ou energia sonora. Assim, a energia cinética do sistema não se conserva, e a colisão é chamada de inelástica.

Suponha que você deixe cair uma bola de golfe, ela não vai ressaltar até a sua altura original. Durante a colisão, uma parte de sua energia cinética se transforma em calor e energia acústica e a bola irá ressaltar até apenas 60% da sua altura original. Se a colisão entre a bola e o piso fosse elástica, a bola não perderia energia cinética alguma e iria ressaltar até a sua altura original.

## 4.5.2 Energia Potencial

Devido ao teorema de trabalho-energia cinética sabemos que numa colisão elástica  $E_k$  antes da colisão deve ser tão grande como depois. *Durante* a colisão, o corpo A exerce a força  $\mathbf{F}(t)$  sobre o corpo B e o corpo B exerce a força  $-\mathbf{F}(t)$  sobre o corpo A. As forças  $\mathbf{F}(t)$  e  $-\mathbf{F}(t)$  formam um par de forças da terceira lei de Newton; suas intensidades variam com o tempo durante a colisão, mas, em qualquer instante, essas intensidades são iguais. Durante a colisão vemos que a energia cinética chega a ser zero e que "renasce" depois da parada, para assumir, finalmente, outra vez o valor inicial.

Para resolver o problema da aparente criação de energia cinética do nada, vamos introduzir uma nova grandeza que é zero antes e depois da colisão, mas que armazena energia cinética durante a colisão. Essa grandeza chamaremos de **energia potencial**  $E_p$ . Ela é associada ao sistema dos dois corpos como um todo e pode ser descrita pela seguinte equação

$$\text{Variação de } E_p = - \text{Variação de } E_k$$

ou como fórmula

$$\Delta E_p = -\Delta E_k = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Esta definição não dá para falar simplesmente de *energia potencial*, só pode-se falar na *variação* dela. Atribuir um determinado valor de energia potencial a um sistema faz sentido apenas se o valor de energia potencial de uma referência for definido.

Se decretamos que  $E_p(P_0) = 0$ , então podemos associar a cada ponto P uma energia potencial com valor bem definido. No caso unidimensional, podemos, por exemplo, definir  $E_p(x_0) = 0$  e calcular  $E_p(x)$  por meio da equação

$$E_p(x) = - \int_{x_0}^x F dx' + E_p(x_0) = - \int_{x_0}^x F dx' \quad (7)$$

Nos casos unidimensionais podemos, porém, sempre escrever

$$F(x) = - \frac{dE_p(x)}{dx} \quad (8)$$

se F depende somente de x.

Podemos, agora, ver que para um sistema com energia potencial (= um sistema conservativo) a soma das energias potencial e cinética mantém-se constante. Pois, da definição da energia potencial e do teorema de trabalho-energia cinética resulta

$$E_{p_b} - E_{p_a} = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{k_a} - E_{k_b} \quad (9)$$

o que se pode escrever na forma da lei de **conservação da energia mecânica**:

$$E_p(A) + E_k(A) = E_p(B) + E_k(B) = E = \text{const.} \quad (10)$$

A quantidade  $E = E_p + E_k$  é chamada de energia total. Os estados designados por A e B são arbitrários.

No caso de um corpo que cai vimos no parágrafo 1.1.2 que  $E_p = mgy$  e  $E_k = mv^2/2$  e que sua soma não varia.

### 4.5.3 Campos de força

Quando experimentamos uma força, às vezes ela resulta de contato direto com o objeto que fornece a força (por exemplo um empurrão ou um abraço). Muitas forças, porém, podem ser sentidas em todos os pontos de espaço, ou pelo menos em certa região dele. Por exemplo, a Terra exerce atração gravitacional em todas as outras massa.

Nestes casos, temos associado a cada ponto do espaço um vetor-força. Em matemática, um **campo de vetores** é uma função que associa um vetor a cada ponto de espaço, ou também:

Um *campo vetorial* no 3-espaço é uma função  $\mathbf{F}(x,y,z)$  cujos valores são vetores do 3-espaço. Pode-se escrever  $\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ .

Se, em vez de um vetor, um escalar estiver associado a cada ponto no espaço, teremos um *campo escalar*  $\Phi(\mathbf{r})$ , como, p.ex., o campo de temperatura, que associa a cada ponto numa região do espaço um número real, a saber, a temperatura do ponto.

Os campos vetoriais que vamos estudar serão todos independentes do tempo; eles são chamados de *campos estacionários*.

#### Exemplo 1:

Esboce o campo de vetores no 2-espaço dado por  $\mathbf{F}(x,y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$ .

**Solução:**

Para representar os vetores, marcamos-os com a cauda (= ponto inicial) em  $(x,y)$  e com o ponto final em  $(x,y) + (F_x,F_y)$ . Somente podemos representar o campo por meio de alguns vetores característicos. Na figura 4.5-1 utilizamos uma lista para armazenar os valores  $x$ ,  $y$ ,  $F_x$  e  $F_y$ . Na figura 4.5-2 elegemos pontos de um círculo com raio  $2^{1/2}$  para os pontos iniciais. O comprimento das setas podemos variar usando um fator  $d$  de escala. Primeiro fazemos uma tabela com algumas coordenadas:

início		$F(x,y)$	ponto final	
$x_1$	$y_1$	$-y_1 i + x_1 j$	$x_2$	$y_2$
1	1	$-i + j$	0	2
-1	1	$-i - j$	-2	0
-1	-1	$+i - j$	0	-2
1	-1	$+i + j$	2	0
2	1	$-i + 2j$	1	3
1	2	$-2i + j$	-1	3
-1	2	$-2i - j$	-3	1

O vetor  $-i + j$  associado ao ponto  $(1,1)$  começa em  $(1,1)$  e termina em  $(0,2)$ . O segundo vetor tem sua cauda em  $(-1,1)$  e sua ponta em  $(-2,0)$  etc.

Com o seguinte programa desenhamos 4 pontos junto com os 4 vetores de força.

- `reset()` :

```

x:=t->2^0.5*sin(t):y:=t->2^0.5*cos(t)//circunferência
curva:=plot::Curve2d([x(t),y(t)],t=0..2*PI,Color=RGB::Black
):
p:=[[1,1],[0,2],[-1,1],[-2,0],[-1,-1],[0,-2],
[1,-1],[2,0],[2,1],[1,3],[1,2],[-1,3],[-1,2],[-2,-1]]:
s1:=plot::Arrow2d(p[1],p[2])//vetores F
s2:=plot::Arrow2d(p[3],p[4]):
s3:=plot::Arrow2d(p[5],p[6]):
s4:=plot::Arrow2d(p[7],p[8]):

s11:=plot::Arrow2d(p[1],Color=RGB::Red)//vetores-posição
s22:=plot::Arrow2d(p[3],Color=RGB::Red):
s33:=plot::Arrow2d(p[5],Color=RGB::Red):
s44:=plot::Arrow2d(p[7],Color=RGB::Red):
pontos:=plot::PointList2d([p[1],p[3],p[5],p[7]],
PointSize=2):
plot(s1,s2,s3,s4,s11,s22,s33,s44,pontos,curva,
Scaling=Constrained)

```

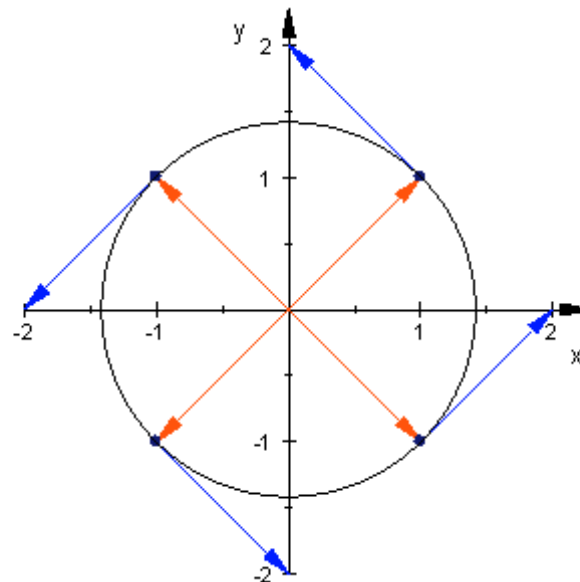


Fig.: 4.5-1

A figura mostra que os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$  são ortogonais, ou seja, os vetores-força são tangentes a uma circunferência que tem seu centro na origem. Os vetores-posição e os vetores-força têm o mesmo comprimento.

Na seguinte figura 4.5-2 vemos uma representação "automatizada" do mesmo campo vetorial, onde os pontos iniciais foram elegidos num círculo e os finais são calculados com  $(x,y) + (F_x, F_y)$ .

- `reset() :`  
`r:=2^0.5://raio`  
`d:=1://fator de scala`  
`valores:=[0,PI/4,PI/2,3*PI/4,PI,5*PI/4,3*PI/2,7*PI/4,2*PI] :`  
`x:=t->r*cos(t)://caminho`  
`y:=t->r*sin(t) :`  
`u:=t->-y(t)://componente-x da força`  
`v:=t->x(t) :`  
`pos:=matrix([[x(t),y(t)]]) :`  
`curva:=plot::Curve2d(pos,t=0..2*PI,Color=RGB::Black) :`  
`F:=matrix([[u(t),v(t)]])://força`  
`x1:=pos[1]:y1:=pos[2]://ponto inicial`  
`x2:=pos[1]+d*F[1]:y2:=pos[2]+d*F[2]://ponto final`  
`seta1:=plot::Arrow2d(subs(([x1,y1],[x2,y2]),t=valores[i]),`  
`Color=RGB::Blue) $i=1..9:`  
`seta2:=plot::Arrow2d(subs(([x1,y1]),t=valores[i]),`  
`Color=RGB::Red) $i=1..9:`  
`plot(curva,seta1,seta2,Scaling=Constrained)`



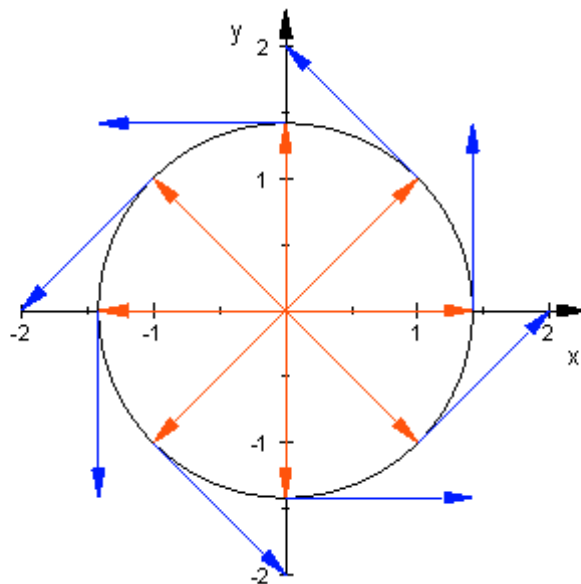


Fig.: 4.5-2

Podemos provar, em forma geral, que cada vetor do campo  $\mathbf{F}(x,y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$  é vetor tangente a uma circunferência e que a norma (comprimento) de cada vetor é igual ao raio da circunferência.

1. Seja  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$  o vetor- posição do ponto  $(x,y)$ .  
Então  $\mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{r} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -xy + xy = 0$ , ou seja,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$  são ortogonais.  
Isso significa que os vetores deste campo vetorial são tangentes a círculos centrados na origem.
2. A norma de  $\mathbf{F}$  é  $\|\mathbf{F}(x,y)\| = \|-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}\| = (x^2 + y^2)^{1/2} = \|\mathbf{r}\|$ , o que significa que o comprimento de cada vetor  $\mathbf{F}$  é igual à distância de  $(x,y)$  à origem.  
Portanto, todos os vetores a uma distância fixa da origem têm o mesmo comprimento e este fica maior quando nos afastamos da origem.

### Exemplo 2:

Para obter um campo vetorial com vetores que apontam para fora, escrevemos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \text{ com } \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Para representar  $\mathbf{F}$ , temos que representar  $\mathbf{r}$  com a cauda no ponto  $(x,y,z)$ .

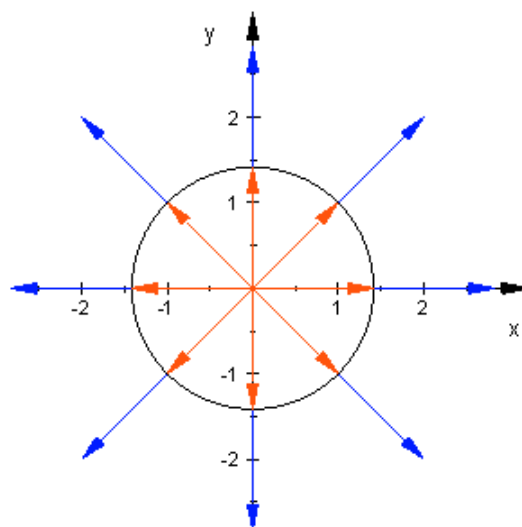


Fig.: 4.5-3

A figura 4.5-3 mostra alguns vetores ao longo de uma circunferência no 2-espaco.

(As únicas mudanças no programa anterior são as duas linhas

$\mathbf{u} := \mathbf{t} \rightarrow \mathbf{x}(t) // \text{componente-x da força}$   
 $\mathbf{v} := \mathbf{t} \rightarrow \mathbf{y}(t) ; )$

$\mathbf{F}$  é radial e o sentido aponta fora da origem. As representações de vetores próximos da origem são menores do que aquelas em pontos longe da origem e os comprimentos são os mesmos em pontos situados a uma mesma distância da origem. O campo representado por  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$  chama-se de **campo de força central**

No caso de um campo de *força central* temos  $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{r}^o$ , onde  $\mathbf{r}^o$  é o vetor unitário  $\mathbf{r}/r$ . Exemplos para tais campos são

1.  $F(r) = -kr, k > 0$  (força elástica)
2.  $F(r) = -k/r^2, k > 0$  (força gravitacional)
3.  $F(r) = +/- k/r^2, k > 0$  (força eletrostática)

O sinal negativo indica que a direção da força é para a origem (estas forças são atrativas). Somente no terceiro caso pode haver uma força repulsiva. Isso ocorre quando a carga na origem e a no ponto  $(x,y,z)$  têm o mesmo sinal.

A força gravitacional é dada pela lei de Newton (veja também 2.1.4)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = - G m M / [(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}] \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \quad (11)$$

$G$  = constante gravitacional universal

$m$  = massa no ponto com vetor-posição  $\mathbf{r}$

$M$  = massa localizada na origem (Terra)

A figura 4.5-4 é um esboço do campo gravitacional. Pode-se ver que os vetores em todos os pontos apontam para a Terra (que não é mostrada no diagrama) e que os vetores mais afastados da Terra são menores em comprimento (norma).

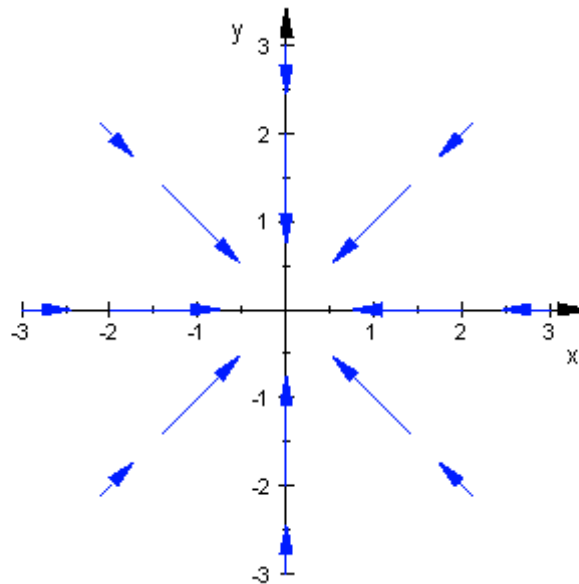


Fig.: 4.5-4

### 4.5.4 Trabalho e integral de linha

Neste parágrafo vamos considerar alguns exemplos com integrais de um campo vetorial. Um simples exemplo sobre o conceito de **trabalho** fica no parágrafo Com lápis e papel. Aqui vamos calcular o trabalho como integral de linha de  $\mathbf{F}$  ao longo de uma curva  $C$ . (A integral na definição de  $W$  é uma integral de linha.)

Podemos calcular a integral de  $W$ , substituindo  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  por  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}dt$ , ou seja

$$W = \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt \quad (12)$$

O primeiro passo é parametrizar a curva  $C$  e substituir esta parametrização em  $\mathbf{F}$ , para obter  $\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))$ .

O texto dos exemplos tem quasi sempre o seguinte teor:

Ache o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  (pelo campo de força) ao mover uma partícula ao longo de uma reta (circunferência, parábola etc.)

Um exemplo explícito calcularemos em "Com lapis e papel". Aqui vamos usar o MuPAD para desenhar a curva e o campo e, também, para calcular o trabalho  $W$ .

#### Exemplo 1:

Primeiro utilizamos o programa da figura 4.5-2 -com pequenas modificações- para calcular o trabalho realizado pela força  $\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  ao mover uma partícula ao longo do círculo unitário, orientado em sentido anti-horário.

#### Solução:

Para avaliar a integral (12), falta determinar a velocidade e calcular o produto escalar  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . O parâmetro  $t$  varia entre 0 e  $2\pi$ .

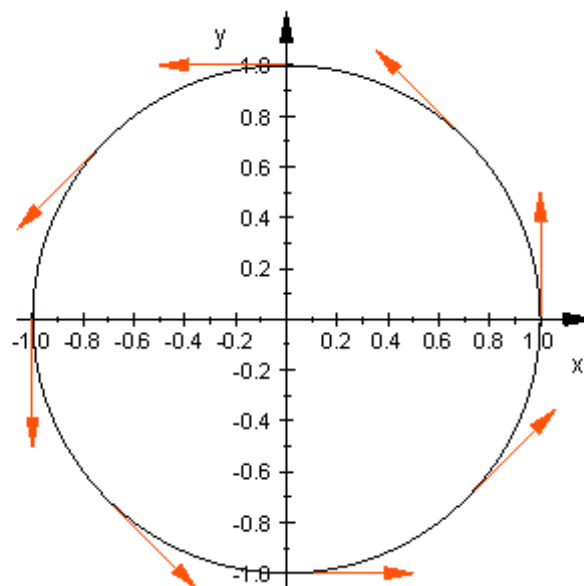
O valor de  $W$  calculamos com `W:=int(F[1]*vel[1]+F[2]*vel[2],t=0..2*PI)`  
a velocidade determina-se com `vel:=matrix([x'(t),y'(t)])`

```

• reset():r:=1://raio
d:=0.5://fator de escala
valores:=[0,PI/4,PI/2,3*PI/4,PI,5*PI/4,3*PI/2,7*PI/4,2*PI]:
x:=t->r*cos(t)//caminho
y:=t->r*sin(t):
u:=t->-y(t)//componente-x da força
v:=t->x(t):
pos:=matrix([[x(t),y(t)]]):
vel:=matrix([[x'(t),y'(t)]]):
curva:=plot::Curve2d(pos,t=0..2*PI,Color=RGB::Black):
F:=matrix([[u(t),v(t)]])://força
x1:=pos[1]:y1:=pos[2]://ponto inicial
x2:=pos[1]+d*F[1]:y2:=pos[2]+d*F[2]://ponto final
seta:=plot::Arrow2d(subs([[x1,y1],[x2,y2]],t=valores[i]),
Color=RGB::Red) $i=1..9:
W:=int(F[1]*vel[1]+F[2]*vel[2],t=0..2*PI); //integral de
linha
plot(seta,curva,Scaling=Constrained)

```

**Resultado:**



$W = 2 \pi$

Fig.: 4.5-5

O trabalho é  $W = 2\pi J$ . O *joule*, símbolo J, é o trabalho realizado por uma força constante de um newton quando desloca um corpo numa distância de um metro na sua direção e sentido.

Pudemos esperar um valor positivo para W, já que todos os vetores de  $\mathbf{F}$  ao longo de C apontam em direção da orientação de C, ou seja, o ângulo entre  $\mathbf{F}$  e  $d\mathbf{r}$  é sempre zero. No caso da força radial  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$  (fig. 4.5-3), os vetores de  $\mathbf{F}$  estão sempre ortogonais ao vetor de deslocamento  $d\mathbf{r}$ , e o trabalho é zero.

Os vetores do campo  $\mathbf{F}(x,y) = (x+y)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  apontam, geralmente, em direção oposta à orientação de C e esperamos um trabalho negativo.

Realmente encontramos o valor  $W = -\pi J$ . A seguinte figura mostra o campo e também, em azul, os vetores de deslocamento.

Para fazer o diagrama, é só necessário agregar estas linhas:

```
x3:=pos[1]+0.5*vel[1]:y3:=pos[2]+0.5*vel[2]:
seta1:=plot::Arrow2d(subs(([x1,y1],[x3,y3]),t=valores[i]),
Color=RGB::Blue) $i=1..9:
```

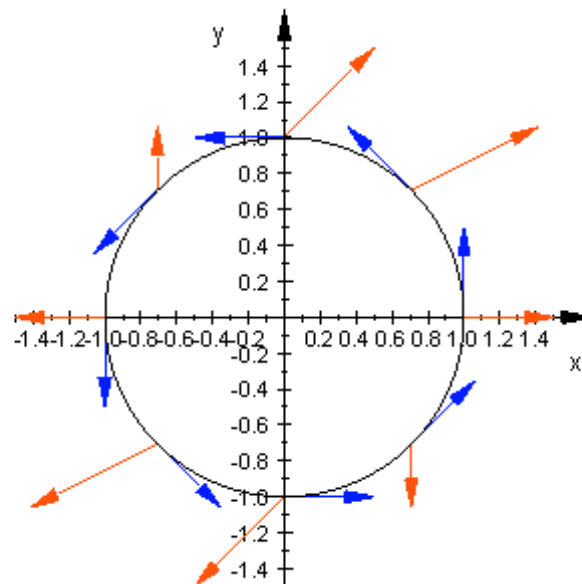


Fig.: 4.5-6

**Exemplo 2:**

A seguinte força (o seguinte campo) move uma partícula no 3-espço uma vez ao redor de uma circunferência de raio  $r = 3$  na altura  $z = 2$ :

$$\mathbf{F} = (2x-y+z)\mathbf{i} + (x+y-z^2)\mathbf{j} + (3x-2y+4z)\mathbf{k}$$

Calcule o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$ . (Resultado:  $W = 18\pi$  J)

**Solução:**

- `reset() :`  
`x:=t->3*cos(t) ://circunferência`  
`y:=t->3*sin(t) :`  
`z:=t->2 :`  
`u:=t->2*x(t)-y(t)+z(t) ://componente-x da força`  
`v:=t->x(t)+y(t)-z(t)^2 :`  
`w:=t->3*x(t)-2*y(t)+4*z(t) :`  
`pos:=matrix([[x(t),y(t),z(t)]]):`  
`curva:=plot::Curve3d([x(t),y(t),z(t)],t=0..2*PI):`  
`vel:=matrix([[x'(t),y'(t),z'(t)]])://velocidade`  
`F:=matrix([[u(t),v(t),w(t)]])://força`  
`//W:=int(linalg::scalarProduct(F,vel),t=0..2*PI);//trabalho`  
`W:=int(F[1]*vel[1]+F[2]*vel[2]+F[3]*vel[3],t=0..2*PI);`  
`plot(curva)`

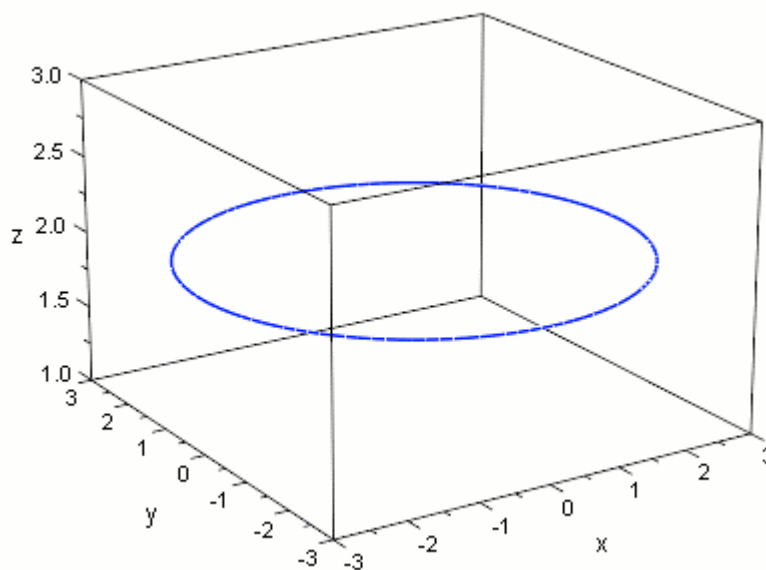


Fig.: 4.5-7

Muitos dos campos vetoriais da natureza são *independentes do caminho*, por exemplo, o campo gravitacional e o campo elétrico de partículas em repouso. O fato de o campo gravitacional ser independente do caminho significa que o trabalho efetuado pela gravidade quando um objeto se move depende somente dos pontos inicial e final e não do caminho seguido.

Quando um campo de vetores é independente do caminho, podemos definir a *energia potencial* de um corpo. Se o trabalho não fosse independente do caminho, a energia potencial dependeria da posição presente do corpo e de como chegou lá, tornando impossível definir uma energia potencial.

Campos vetoriais de força independentes do caminho são também chamados **conservativos**. Na próxima seção voltaremos a falar sobre este tema.

### 4.5.5 Com lápis e papel

#### 1. Trabalho

Para entender melhor o conceito do **trabalho**, consideramos uma massa jazendo sobre uma mesa e presa a uma mola cuja outra extremidade está presa à parede.

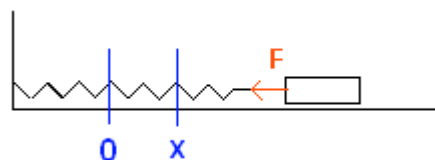


Fig.: 4.5-8

A mola é estendida de 10 cm além de sua posição de repouso e solta. Na distância  $x$ , a mola exerce sobre a massa a força  $\mathbf{F}(x) = -kx\mathbf{i}$  (lei de Hooke).

Suponha que a massa volta a sua posição de repouso. Quanto trabalho foi efetuado pela força exercida pela mola?

#### Solução:

O caminho começa em  $P_0 = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$  e se estende até  $P_1 = 0$ . O trabalho total efetuado pela mola sobre a massa será



$$W = \int_{0.1}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0.1}^0 (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \left[ -\frac{kx^2}{2} \right]_{0.1}^0 = \frac{k(0.1)^2}{2}$$

Se a constante da mola for de  $k = 10\,000$  N/m, o trabalho seria igual a 50 N·m ou 50 J.

Note que o trabalho é positivo, pois a força age na direção do movimento. Neste exemplo vimos como uma integral de linha sobre um caminho paralelo ao eixo-x se reduz a uma integral em uma variável. Na matemática se mostra como transformar qualquer integral de linha em uma integral ordinária em uma variável, veja Eq. (12).

## 2. Integral de linha

Suponha que uma partícula se move ao longo da parábola  $y = x^2$  do ponto  $(-1,1)$  até o ponto  $(2,4)$ . Ache o trabalho total realizado, se o movimento for causado pelo campo de forças  $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$ . (O caminho é medido em metros e a força em newtons.)

### Solução:

O primeiro passo é parametrizar C. As equações paramétricas da parábola são  $x = t$  e  $y = t^2$ , ou em forma vetorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \text{ com } -1 \leq t \leq 2$$

Para avaliar a integral (12), precisamos da velocidade  $d\mathbf{r}/dt$ . Neste caso temos  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ . Estas equações fazem que C é percorrida no sentido horário, pois  $t = 0$  dá  $(0,0)$  e  $t = 1$  dá  $(1,1)$ . Como  $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} = (x^2 + y^2, 3x^2y)$ , então

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(t, t^2) = (t^2 + t^4, 3t^4)$$

$$W = \int ((t^2 + t^4)\mathbf{i} + 3t^4\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) dt = \int (t^2 + t^4 + 6t^5) dt, \text{ a integral é de } t = -1 \text{ até } t = 2$$

$$W = t^3/3 + t^5/5 + t^6/1 \Big|_{-1}^2 = 363/5 = 72,6 \text{ J.}$$

## 3. Integrais de linha independentes e dependentes do caminho

Na maioria dos casos, as integrais de linha são dependentes do caminho, como mostra também o seguinte exemplo.

Calcule o trabalho realizado pela força  $\mathbf{F}(x,y) = (x+y) \mathbf{i} + y \mathbf{j}$  ao mover uma partícula ao longo do quarto do círculo unitário, orientado em sentido anti-horário (veja figura 4.5-6).

Compare este trabalho com o trabalho que se obtém, se o caminho é o segmento de reta unindo (1,0) a (0,1).

### Solução:

A curva definida pela equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = r \cos(t) \mathbf{i} + r \sin(t) \mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , é uma circunferência com centro na origem e raio  $r$ . Para o quarto do círculo unitário, temos  $r = 1$  e  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

Substituindo  $x(t) = \cos(t)$  e  $y(t) = \sin(t)$  em  $\mathbf{F}(x,t)$ , obtemos

$$\mathbf{F}(x(t),y(t)) = (\cos(t) + \sin(t))\mathbf{i} + \sin(t) \mathbf{j}$$

Indicando a derivada por um acento, obtemos para o vetor de velocidade

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} = -\sin(t) \mathbf{i} + \cos(t) \mathbf{j}$$

Então temos para o trabalho (integral de linha) - a integral vai de 0 até  $\pi/2$ -

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} ((\cos(t) + \sin(t))\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}) \cdot (-\sin(t) \mathbf{i} + \cos(t) \mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos(t)\sin(t) - \sin^2(t) + \sin(t) \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -\sin^2(t) dt = -\left[ -\sin(t) \cos(t)/2 + t/2 \right]_0^{\pi/2} = -\pi/4 \text{ J} \end{aligned}$$

Calculemos, agora, o trabalho ao longo do segmento da reta que une os pontos (1,0) e (0,1). A equação da reta será  $y = -x + 1$ .

Para a parametrização podemos escolher  $x = t$ , mas também  $y = t$ . Uma mudança de parametrização da curva não muda o valor da integral de linha. Escolhamos  $y=t$ . Para  $x$  resulta, então,  $x = 1 - t$ .

Com esta escolha, obtemos  $\mathbf{r}(t) = (1-t) \mathbf{i} + t \mathbf{j}$  com  $0 \leq t \leq 1$ .

A derivada (velocidade) será  $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ . O trabalho ao longo desta reta é

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(1-t,t) \cdot (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt = \int_0^1 ((1-t) + t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} \cdot (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt = \int_0^1 (-1+t) dt = \left[ -t + t^2/2 \right]_0^1 = -1/2 \text{ J}$$

O valor da integral ao longo do quarto do círculo foi  $W = -\pi/4 \text{ J}$ , o que mostra que o valor da integral depende do caminho.

Se tivéssemos usado campos como  $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  ou  $\mathbf{F}(x,y) = 1/y \cdot \mathbf{i} - x/y^2 \cdot \mathbf{j}$ , as integrais teriam sido iguais, pois trata-se, nestes casos, de *campos vetoriais conservativos*.

A razão de  $\mathbf{F}$  ser um campo conservativo tem que ver com a existência de uma função  $\Phi$  tal que  $\mathbf{F} = \mathbf{grad} \Phi$ , onde  $\mathbf{grad}$  (gradiente) é um operador que vai ser introduzido na próxima seção.  $\Phi$  é chamado *função potencial* para  $\mathbf{F}$ . Desde já notamos que um campo de vetores  $\mathbf{F}$  é independente do caminho, se e só se  $\mathbf{F}$  é um campo de vetores gradiente.

(Na física, a função  $\Phi$  usualmente deve satisfazer  $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} \Phi$ . O significado do sinal negativo será explicado mais tarde.)

E existência de uma função potencial simplifica enormemente a avaliação de uma integral de linha, pois temos em tal caso

$$\int_C \mathbf{grad} \Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(\mathbf{B}) - \Phi(\mathbf{A}) \quad (13)$$

Como exemplo, mencionamos que o campo vetorial  $\mathbf{F}(x,y) = y \cos x \mathbf{i} + \sin x \mathbf{j}$  possui uma função potencial, a saber  $\Phi(x,y) = y \sin x + \text{const.}$

Mas, para  $\mathbf{F}(x,y) = 2xy \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$  não há função potencial.

O campo  $\mathbf{F}(x,y) = 1/y \cdot \mathbf{i} - x/y^2 \cdot \mathbf{j}$  é conservativo com a seguinte função potencial:

$$\Phi(x,y) = x/y + \text{const.}$$

Aplicando (13), obtemos para o trabalho ao longo do segmento da reta entre  $A = (5,-1)$  e  $B = (9,-3)$  o valor

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(9,-3) - \Phi(5,-1) = (9/(-3) + \text{const.}) - (5/(-1) + \text{const.}) = 2 \text{ J}$$

O cálculo direto via integral de linha sobre a reta  $\mathbf{r}(t) = (3 + 2t)\mathbf{i} - t\mathbf{j}$  com  $1 \leq t \leq 3$  dá o mesmo resultado

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (-1/t, -(3+2t)/t^2) \cdot (2, -1) dt = (-2/t + (3+2t)/t^2) dt = -3/t \Big|_1^3 = 2 \text{ J.}$$

Considere, também, o seguinte exemplo, onde mostramos em forma direta, que para a função  $\mathbf{F}(x,y) = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$  não há função potencial, pois resulta ser dependente do caminho. Escolhamos como caminho a curva  $y = 2x^n$  com  $n = \text{constante}$ . O ponto inicial é  $(0,0)$  e o final  $(1,2)$ . O cálculo podemos fazer assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= (y^2, x^2) \cdot (dx, dy) = y^2 dx + x^2 dy = 4x^{2n} dx + x^2 2n x^{n-1} dx \\ &= (4x^{2n} + 2nx^{n+1}) dx \end{aligned}$$

Integrando dá

$$W = 4x^{2n+1}/(2n+1) + 2nx^{n+2}/(n+2) \Big|_0^1 = 2(2n^2 + 3n + 4)/((n+2)(2n+1))$$

Substituindo diferentes valores de n neste resultado, dá diferentes valores para W:

$$n = 1 \rightarrow W = 18/9 = 2 \text{ J} \quad (\text{reta})$$

$$n = 2 \rightarrow W = 9/5 = 1,8 \text{ J} \quad (\text{parábola})$$

então, o trabalho depende do caminho e o campo  $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$  não é conservativo.