4.4 Autovalores e Autovetores

4.4.1 A Equação de Euler

O vetor do momento angular pode ser representado como

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} I_i \omega_i \mathbf{e}_i^{o} \qquad (1)$$

onde os $\mathbf{e}_i^{\mathbf{o}}$ são os vetores unitários ao longo dos eixos principais, denominados com 1, 2 e 3.

Pois, podemos decompor $\boldsymbol{\omega}$ nas três componentes $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{\omega_2}$ e $\boldsymbol{\omega_3}$ paralelos a estes eixos. Para cada componente podemos escrever $\mathbf{L_i} = I_i\ \boldsymbol{\omega_i}$. Os momentos I_i são momentos principais de inércia. O momento angular do corpo rígido em torno de um eixo arbitrário será

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2} + \mathbf{L_3} = I_i\ \boldsymbol{\omega_1} + I_2\ \boldsymbol{\omega_2} + I_3\ \boldsymbol{\omega_3} \qquad (2)$$

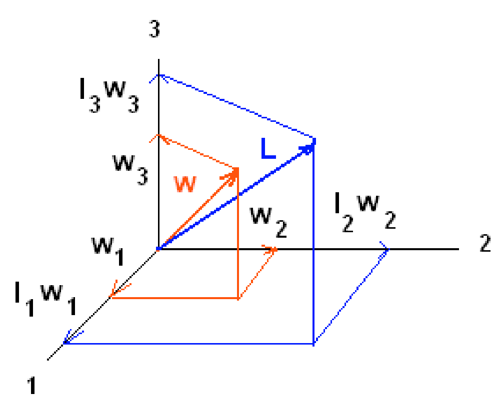

Fig.: 4.4-1

Na figura 4.4-1 vemos as projeções dos **ω** e **L** sobre aos eixos principais.

Com os vetores unitários $\mathbf{e_i^o}$ podemos expressar (2) sob a seguinte forma

$$\mathbf{L} = I_1\, \omega_1\, \mathbf{e^o_1} + I_2\, \omega_2\, \mathbf{e^o_2} + I_3\, \omega_3\, \mathbf{e^o_3} \qquad (3)$$

que é precisamente a Eq. (1).

L e **ω** têm direções diferentes, como mostra também a figura 4.4-1.
A soma (3) pode ser escrita sob a forma de um produto matricial:

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \bar{\omega} \qquad (4)$$

o que já vimos em 4.3.1, Eq. (6).

Os I_i são independentes do tempo, se os referimos a um sistema de coordenadas ligado ao corpo, p. ex. ao CM. Note, porém, que os vetores unitários giram com o corpo e são, por isso, funções do tempo. O torque das forças externes é

$$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} I_i \frac{d\omega_i}{dt} e_i^o + \sum_{i=1}^{3} I_i \omega_i \frac{de_i^o}{dt} \qquad (5)$$

conferir com Eq. (8) no parágrafo 4.3.1.

Podemos simplificar esta expressão, se tomamos em conta o fato de poder-se escrever a derivada de um vetor com módulo constante como produto vetorial com o vetor **ω**, veja Eq. (1) no parágrafo 3.5.1 ou *Shames, I.H.*, Dynamics, Vol. II, p. 488, ou outro texto de dinâmica,

$$\frac{de_i^o}{dt} = \bar{\omega} \times e_i^o \qquad (6)$$

Obtemos, assim, a importante *equação de Euler*

$$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} I_i \frac{d\omega_i}{dt} e_i^o + \bar{\omega} \times \bar{L} \qquad (7)$$

Se o corpo girar com velocidade angular constante, podemos usar a seguinte simples expressão:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L} \qquad (8)$$

O trabalho investido para chegar a esta equação teríamos podido evitar, pois Eq. (8) é apenas uma conseqüência da Eq. (1) do parágrafo 3.5.1. Mas tive a intensão de mostrar que a Eq. (8) é um caso especial da equação geral (5).

Para entrar, finalmente, no tema desta seção, substituimos em Eq. (8) o momento angular **L** pela expressão **L** = **I** · **ω** (veja Eq. (6) no parágrafo 4.3.1:

$$\vec{M} = \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) \qquad (9)$$

Uma característica dos eixos principais é o fato de o corpo poder girar em torno deles sem nenhum torque. Poderíamos usar esta propriedade como definição dos eixos principais e aplicar este ponto de vista para formular um método para achar um eixo principal. A condição **M** = **0** é cumprida quando **I** · **ω** é paralelo ao vetor **ω**, ou seja, quando

$$I \cdot \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega} \qquad (10)$$

Equaçaõ (10) é chamada de *equação do autovalor*.

(Em inglês, ela é chamada de *eigenvalue equation*. A palavra *eigen* vem do alemão e significa "próprio". Em vez de *valor próprio* diz-se, normalmente, *autovalor*. O "Aurélio" permite também *eigenvalor*. Aliás, a palavra *Eigentor* significa *autogol*.)

A Eq. (10) tem soluções somente para certos valores de λ, que são os denominados *autovalores*. Os vetores **ω** associados aos autovalores são chamados de *autovetores* (eigenvectors). No caso do tensor de inércia, são os autovalores do tensor **I** os momentos principais de inércia e os autovetores são os vetores direcionais dos eixos principais. Para cada corpo rígido existem pelo menos três eixos principais ortogonais (ou que podem ser ortogonalizados).

Exemplo:

Um tensor de inércia tem a representação

$$I = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcule os autovalores e os autovetores.

Solução:

Se nos basearmos nas definições de autovalor e autovetor, para determinar seus valores, estaremos adotando um procedimento muito complicado. Por isso, vamos procurar um método prático para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz real de ordem n.

Mas, primeiro, vamos buscar uma solução do problema em questão por meio das funções que MuPAD contém no seu pacote **linalg**.

A função `linalg::eigenvectors` determina autovalores e autovetores. Juntamente com os autovalores é indicado se o autovalor encontrado é único ou se ele conta duplo ou triplo ou mais. Nossa matriz tem três autovalores simples, mas a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tem só dois autovalores, dos quais um, $\lambda=2$, conta duplo.

Chamamos de *multiplicidade algébrica de um autovalor* a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico, veja mais adiante no parágrafo 4.4.3. No exemplo anterior, $\lambda=2$ tem multiplicidade algébrica igual a 2, ou ainda, 2 é uma raiz dupla do polinômio característico.

(A multiplicidade *geométrica* de um autovalor λ é a dimensão do subespaço de autovetores associados a λ.)

O programa a seguir indica detalhadamente como se deve ler a lista do "output" do MuPAD. Se quiser mais informação, utilize `?eigenvalue`

- ```
  reset()://autovalores e autovetores
  DIGITS:=6:
  A:=matrix([[7,-2,0],[-2,6,-2],[0,-2,5]]):
  /*A:=matrix([[4,2,0],[-1,1,0],[0,1,2]]) esta matriz tem
  somente dois autovalores, l = 2 tem multiplicidade 2*/

  a:=linalg::eigenvectors(A);
  a[1];/*primeira parte da solução com
  autovalor,multiplicidade e autovetor*/

  a[2];//segunda parte
  a[3];//terceira parte
  a[1][1];//primeiro autovalor
  a[1][3][1];//primeiro autovetor
  a[2][1];//segundo autovalor
  a[2][3][1];//segundo autovetor
  a[3][1];//terceiro autovalor
  a[3][3][1];//terceiro autovetor
  ```

  Resultados: (resumidos)

  Autovalores: 3, 6, 9
  Autovetores: (1/2, 1, 1), (-1, -1/2,1), (2, -2, 1)
  (Também seriam autovetores: (1, 2, 2), (-2, -1, 2), (2, -2, 1))

  Com as linhas seguintes podemos controlar os resultados, checando para cada par de autovalor e autovetor a equação (10):

  ```
  l1:=a[1][1]://primeiro autovalor
  v1:=a[1][3][1]://primeiro autovetor
  l2:=a[2][1]://segundo autovalor
  v2:=a[2][3][1]://segundo autovetor
  l3:=a[3][1]://terceiro autovalor
  v3:=a[3][3][1]://terceiro autovetor

  bool(A*v1=l1*v1);
  bool(A*v2=l2*v2);
  bool(A*v3=l3*v3);
  ```

  Resultados:

  ```
  TRUE, TRUE, TRUE
  ```
  ```

A segunda matriz tem os autovalores 2, 3 (o valor 2 conta duas vezes) e os autovetores são (0, 0, 1) e (-2, 1, 1).

Já que cada múltiplo de um autovetor também é autovetor, veja 4.4.3, costuma-se **normalizar** os autovetores com o comprimento 1. Estes vetores são vetores unitários.

O autovetor (2, -2, 1) tem comprimento $[2^2 + (-2)^2 + 1^2]^{1/2} = 3$. Dividindo cada componente do vetor por 3, dá o vetor normalizado (0.666667, -0,666667, 0,333333).

Para (-2, 1, 1) teremos o vetor normalizado
$(-2,1,1)/[(-2)^2+1^2+1^2]^{1/2}=$ (-0.8165, 0.4082, 0.4082).

MuPAD normaliza os autovetores com `linalg::normalize(v)`

Assim, obtemos com `linalg::normalize(v3)` o terceiro autovetor da matriz A normalizado : (2/3, -2/3, 1/3). Com a instrução `float(linalg::normalize(v))` obtemos as componentes em forma decimal. `0.666667,-0.666667, 0.333333.`

O seguinte exemplo mostra uma matriz com 2 autovetores para um autovetor:

- ```
  reset()://autovalores e autovetores
  DIGITS:=6:
  A:=matrix([[3,0,-4],[0,3,5],[0,0,-1]]):
  a:=linalg::eigenvectors(A);
  ```

Resultados:

Autovalores: -1, simples; 3, duplo
Ao autovalor $\lambda_1 = -1$ pertence o autovetor (1/-5/4,1)
Ao autovalor $\lambda_2 = 3$ pertencem os autovalores (1,0,0) e (0,1,0)
λ_2 tem multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica igual a 2, portanto a dimensão do subespaço associado a λ_2 é também 2.

A matriz A:=([[3,-3,-4],[0,3,5],[0,0,-1]]) tem os autovalores 3 e -1.
O autovalor 3 tem multiplicidade algébrica 2, mas a multiplicidade geométrica é igual a 1, pois só existe o autovetor (1, 0, 0) para este autovalor.
  ```

4.4.3 O polinômio característico

Equações do tipo **I·ω** = λ **ω** aparecem em vários ramos da física, p. ex. no estudo do movimento de osciladores acoplados ou na mecânica quântica. Um vetor coluna vamos agora designar pelo símbolo |u> (ket), um vetor linha será designado por <u| (bra). (A palavra inglesa *bracket* significa parêntese.)

Nossa tarefa consta na busca de números λ (autovalores) e vetores |u> (autovetores) que satisfazem a equação T·**u** = λ **u** ou, usando a notação com kets :

$$\mathbf{T}\cdot|u\rangle = \lambda\,|u\rangle \qquad (11)$$

T é um tensor (operador linear) de segunda ordem como, p.ex. o tensor de inércia. A matriz associada ao tensor tem a forma

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Se α ı um número, também α|u> será um vetor que satisfaz T(α|u>) = λ(α|u>). Isso significa que o módulo del vetor não tém importância. Para resolver a Eq. (11), notamos que ela pode ser escrita sob a forma T|u> = (λE)|u> ou ainda como

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E})|u\rangle = 0, \qquad (13)$$

onde $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é o tensor identidade.

Escrevendo (13) explicitamente, temos

$$\begin{array}{llll} (T_{11}-\lambda)u_1 + & T_{12}u_2 + & T_{13}u_3 & = 0 \\ T_{21}u_1 + & (T_{22}-\lambda)u_2 + & T_{23}u_3 & = 0 \\ T_{31}u_1 + & T_{32}u_2 + & (T_{33}-\lambda)u_3 & = 0 \end{array} \qquad (14)$$

As equações (14) são três equações para as três componentes desconhecidas u_1, u_2, e u_3 do vetor |u>. Nossa pergunta agora é: Como devemos eleger o número λ , para que o sistema (14) tenha soluções não nulas? Os matemáticos nos dizem que o determinante de (**T**- λ**E**) deve ser nulo, ou seja

$$\det(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{E}) = 0 \qquad (15)$$

Eq. (15) é uma equação cúbica e é chamada de *equação característica*. O lado esquerdo da Eq. (15) é um polinômio em λ de grau 3 (em geral de grau n).

A equação característica do primeiro exemplo com a matriz `([[7,-2,0],[-2,6,-2],[0,-2,5]])` tem a forma

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda -162 =0$$

MuPAD determina para a matriz A o polinômio característico e, também, as soluções da equação característica.

- ```
  reset()://autovalores e autovetores
  DIGITS:=6:
  A:=matrix([[7,-2,0],[-2,6,-2],[0,-2,5]]):
  p:=linalg::charpoly(A,l);// l é lambda

  solve(p)
  ```

  Resultados:

  $l^3 - 18\ l^2 + 99\ l -162$

  {[l = 3], [l = 6], [l = 9]}

  As três soluções são então $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$

Agora calculamos o autovetor $|u_1>$, substituindo λ_1 no sistema (14). Este sistema vai reduzir-se a um sistema de duas equações com três incógnitas. Vamos pôr u_3 arbitrariamente igual a 1 -o que só tem influência sobre o comprimento do vetor. Isso não afeta o resultado, já que, ao final, vamos normalizar o vetor. Resulta:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
  ```

O vetor unitário correspondente será

$$\left|e_1\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Os autovalores λ_2 e λ_3 conduzem aos autovetores

$$\left|u_2\right\rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \left|u_3\right\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

São estes os vetores que mais acima obtivemos por meio de MuPAD. Também aqui temos como fator de normalização o valor 1/3.

Facilmente podemos ver que os autovetores são dois a dois ortogonais. (Diz-se que dois vetores **a** e **b** são ortogonais se o produto escalar **a·b** é zero.) Por exemplo, temos $\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_2}$ = (-2 -2 +4)/9 =0

Na notação com *bra* e *ket*, escrevemos isso como

$$\left\langle e_1 \middle| e_2 \right\rangle = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (18)$$

Esta propriedade de ortonormalidade, ou seja

$$\left\langle e_i \middle| e_k \right\rangle = \delta_{ik}, \qquad (19)$$

possuem todos os tensores simétricos. O símbolo δ_{ik} é o símbolo de *Kronecker*. O seu valor e 1, se i = k. Se i for diferente de k, o valor do delta de Kronecker é 0.

Se usarmos os autovetores de um operador simétrico para sua representação matricial, obteremos um a matriz diagonal. Fala-se de uma representação em eixos principais.

Os elementos de um tensor simétrico **S** obtém-se no sistema dos autovetores por meio de

$$<e_i|\mathbf{S}|e_k> = \lambda_k\, \delta_{ik} \qquad (20)$$

Pois de $\mathbf{S}|e_k> = \lambda_k\, |e_k>$ obtemos $<e_i|\, \mathbf{S}|e_k> = \lambda_k <e_i|e_k> = \lambda_k\, \delta_{ik}$, devido à Eq. (19).

Eq. (20) contém os elementos de uma matriz diagonal com os autovalores como elementos diagonais. A soma dos elementos da diagonal chama-se de *trace* (traço) da matriz:

$$\mathrm{Tr}\, \mathbf{S} = \sum \lambda_k \qquad (21)$$

(O Mupad tem a função `linalg::tr(A)`.)

Usa-se muito a representação do tensor simétrico sob forma de soma, que se obtém, multiplicando **S** de ambos os lados pela matriz identidade **E**:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E\ S\ E} = \sum_{ik} |e_i><e_i|S|e_k><e_k| = \sum_{ik} \lambda_k\, \delta_{ik}|e_i><e_k|$$

$$= \sum_k \lambda_k[\sum_i \delta_{ik}|e_i><e_k|] = \sum_k \lambda_k\, |e_k><e_k|.$$

Com *representação em eixos principais* entende-se muitas vezes precisamente esta "soma"

$$\mathbf{S} = \sum_k \lambda_k\, \mathbf{|e_k><e_k|}. \qquad (22)$$

4.4.4 O elipsóide de inércia

Cada tensor simétrico pode ser representado, geometricamente, por um elipsóide. Para entender isso, temos que desenvolver alguns conceitos adicionais, por exemplo o conceito de uma *forma quadrática*.

Consideremos um vetor |r>. Numa base ortonormal arbitrária $\{|a_i>\}$ podemos representar o vetor |r> assim:

$$|r> = \sum_i x_i|a_i> \qquad (23)$$

Se escolhermos como base o sistema dos autovetores do operador **S**, então obteremos a seguinte representação do mesmo vetor |r>

$$|r\rangle = \sum_i x'_i|e_i\rangle \qquad (24)$$

A expressão F(**r**): = <r|S|r> é chamada de forma quadrática. A razão para esta denominação entendemos se desenvolvemos o lado direito:

$$\langle r|S|r\rangle = \langle r|(\sum_k S|a_k\rangle x_k) = \sum_i x_i \langle a_i|(\sum_k x_k S|a_k\rangle) = \sum_{ik} x_i x_k \langle a_i|S|a_k\rangle$$

Temos, então,

$$F(\mathbf{r}) := \langle r|S|r\rangle = \sum_{ik} x_i x_k S_{ik} \qquad (25)$$

(Uma forma quadrática em $\mathbf{R}^3$ de três variáveis x_1, x_2, x_3 é freqüentemente escrita na forma

$$F(\mathbf{r}) = S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 + 2S_{12}x_1x_2 + 2S_{13}x_1x_3 + 2\,S_{23}x_2x_3$$

o que é igual a $\sum_{ik} x_i x_k S_{ik}$ com $S_{ik} = S_{ki}$)

Se agora usamos a base {|ei>} dos autovetores de **S**, podemos usar $\langle e_i|\mathbf{S}|e_k\rangle = \lambda_k\,\delta_{ik}$ para obter a assim chamada *forma canônica* da forma quadrática:

$$F(\mathbf{r}) = \langle r|S|r\rangle = \sum_{ik} x_i x_k S_{ik} = \sum_k x'^2_k\,\lambda_k \qquad (26)$$

Para o nosso exemplo de acima, com os autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$, obtemos a seguinte forma canônica

$$F(\mathbf{r}) = 3x'^2_1 + 6x'^2_2 + 9x'^2_3 \qquad (27)$$

A equação F(**r**) = c é a equação de uma superfície de segunda ordem. A constante c só tem influência sobre o tamanho da figura. Escolhendo c = 18, obtemos a seguinte equação de um *elipsóide*

$$x'^2_1/6 + x'^2_2/3 + x'^2_3/2 = 1 \qquad (28)$$

com os semi-eixos √6, √3 e √2.

O seguinte gráfico é produzido usando a função `plot::Implicit3d` que já foi usada no parágrafo 3.4.7.

```
p1:=plot::Implicit3d(3*x^2+6*y^2+9*z^2-18,
x=-2.5..2.5,
y=-2..2,
z=-1.5..1.5):
plot(p1)
```

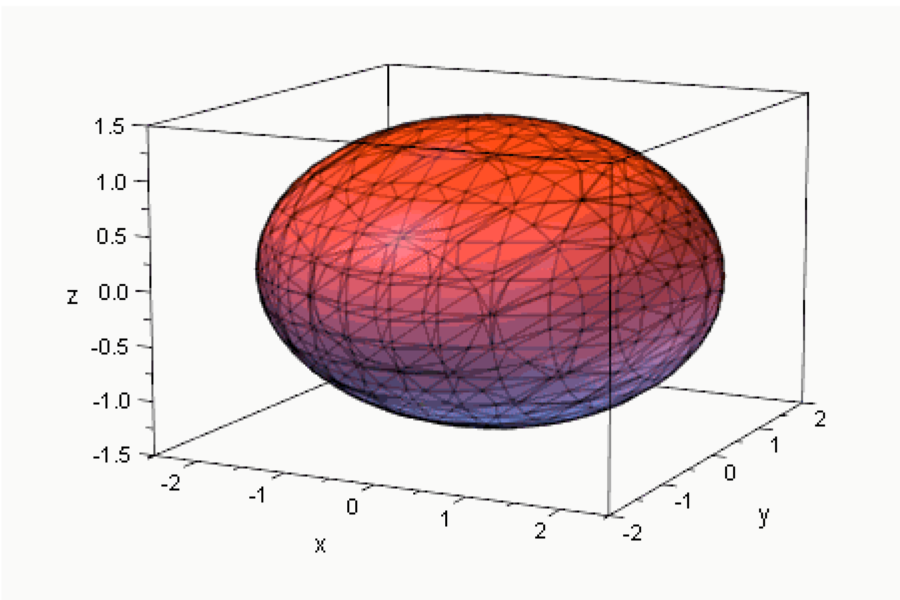

Fig.: 4.4-2