

4.3 O momento de inércia de um corpo rígido

4.3.1 O tensor de inércia

Um corpo rígido pode ser considerado como sendo um conjunto de partículas cujas distâncias permanecem fixas. Este sistema especial conserva sua forma durante o movimento. Se este sistema (corpo rígido) girar ao redor de um eixo, então todas as suas partículas percorrerão círculos com velocidades angulares idênticas.

O momento angular total do corpo é

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \quad (1)$$

Já na seção anterior falamos do momento angular de um sistema de partículas, mas com a restrição (simplificação) de que todas as partículas estiveram girando em torno do eixo-z. No caso geral de rotação em torno de um eixo arbitrário, temos que computar os dois produtos vetoriais na equação (1). Com MuPAD obtemos

- `reset() :`
`mat:=Dom::Matrix():export(linalg) :`
`r:=mat([[x[i],y[i],z[i]]])://vetor r`
`w:=mat([[wx,wy,wz]])://vetor omega`
`lo:=crossProduct(r,crossProduct(w,r));//sem as massas mi`
`lox:=lo[1,1]://componente-x de lo`
`loy:=lo[1,2] :`
`loz:=lo[1,3] :`
`factor(lox) ;`
`factor(loy) ;`
`factor(loz)`

Resultados:

```
array(1..1, 1..3,
(1, 1) = - (wy x[i] - wx y[i]) y[i] - (wz x[i] - wx z[i]) z[i],
(1, 2) = (wy x[i] - wx y[i]) x[i] - (wz y[i] - wy z[i]) z[i],
(1, 3) = (wz x[i] - wx z[i]) x[i] + (wz y[i] - wy z[i]) y[i]
)
```

simplificando:

```
wx y[i]^2 + wx z[i]^2 - wy x[i] y[i] - wz x[i] z[i]
wy x[i]^2 + wy z[i]^2 - wx x[i] y[i] - wz y[i] z[i]
wz x[i]^2 + wz y[i]^2 - wx x[i] z[i] - wy y[i] z[i]
```

Estas expressões temos que multiplicar com as massas e pois fazer as somas. Introduzindo os seguintes termos, podemos simplificar o resultado consideravelmente:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & I_{yy} &= \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & I_{zz} &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \\
 I_{xy} &= I_{yx} = - \sum m_i x_i y_i & I_{yz} &= I_{zy} = - \sum m_i y_i z_i & I_{zx} &= I_{xz} = - \sum m_i x_i z_i
 \end{aligned}$$

(2)

As três componentes de \mathbf{L} escrevem-se com estas somas assim:

$$\begin{aligned}
 L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\
 L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\
 L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \quad (3)
 \end{aligned}$$

Os nove termos (2) podemos considerar como elementos da seguinte matriz

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (4)$$

As seis equações (2) podemos escrever numa equação só:

$$I_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} - x_i^{(k)} x_j^{(k)}) \quad (5)$$

$x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ são as coordenadas x-y-z da partícula k . O símbolo δ_{ij} é o delta de Kronecker. O seu valor é 0, para $i \neq j$, no caso contrário é 1.

Uma estrutura como (4) chama-se, dependendo do contexto, *matriz*, *operador*, *diádico* ou *tensor* (de segunda ordem). O tensor de segunda ordem é, portanto, uma grandeza cuja representação envolve nove componentes. Em nosso caso, trata-se de um tensor simétrico, como revelam as expressões (2): $I_{xy} = I_{yx}$ etc. Um tensor é uma grandeza que se pode definir como uma generalização de um vetor que pode ser nomeado de tensor de primeira ordem. Um vetor pode ser representado, geometricamente, por uma seta. Como veremos mais tarde, um tensor pode ser representado por um elipsóide.

As quantidades I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} são conhecidas como os *momentos de inércia* do corpo em torno dos eixos respectivos, e I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} são conhecidos como os *produtos de inércia* com respeito aos eixos coordenados. Os eixos x-y-z para os quais os produtos de inércia se anulam são chamados de *eixos principais de inércia*, e I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} passam a ser chamados de *momentos de inércia principais*.

As três equações (3) podemos, agora, escrever da seguinte maneira:

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{I}_A \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (6)$$

onde A é um ponto de referência arbitrário ligado com o corpo, por exemplo o centro de massa (CM). Podemos interpretar a equação (6) da seguinte forma: O operador \mathbf{I} é aplicado ao vetor $\boldsymbol{\omega}$ e produz um novo vetor \mathbf{L} cuja direção normalmente não coincide com a do vetor $\boldsymbol{\omega}$, ou seja, geralmente, \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ têm direções diferentes.

Os elementos I_{ij} de (5) são os elementos matriciais do operador I .

(Às vezes é bastante vantajoso o uso da seguinte notação introduzida por **Dirac** na mecânica quântica

$$|L_A\rangle = I_A |\omega\rangle \quad (7)$$

Os símbolos $|L\rangle$ e $|\omega\rangle$ são vetores-*Ket*. Volveremos sobre este ponto mais adiante.)

Para cada corpo existem pelo menos três eixos ortogonais, os eixos principais, que têm a propriedade de que L e ω são paralelos se a rotação for em torno de um dos eixos principais. O vetor da velocidade angular ω é sempre dirigido ao longo do eixo de rotação. Para um corpo simétrico, os eixos principais coincidem com alguns dos eixos de simetria. Numa esfera, qualquer eixo que passa pelo seu centro é um eixo principal. Para um corpo com simetria cilíndrica, o eixo de simetria é um eixo principal.

O significado técnico dos eixos principais reside no fato de não precisar de nenhum torque externo para manter um corpo girando em torno de um eixo que coincide com um dos eixos principais. Um corpo rígido que gira em torno de um eixo principal move-se com velocidade angular constante quando não é aplicado torque externo.

Isso poderia ser considerado como a lei de inércia para o movimento rotacional. $L = I \cdot \omega$ é para o movimento rotacional o que $p = m v$ é para o movimento translacional. O tensor I representa uma espécie de "massa rotacional". Mas I não só contém a *massa* inercial do corpo em rotação, também contém informação sobre a *distribuição* da massa no interior do corpo. Se o corpo não for rígido, a distribuição da massa pode variar e a condição $I \omega = \text{const.}$ requer que, se I cresce (ou decresce) então ω decresce (ou cresce). Esse fato tem múltiplas aplicações, por exemplo no caso de uma patinadora no gelo que pode fechar os braços e juntar os pés para diminuir o seu momento de inércia e aumentar o valor de ω . Quando ela estica os braços, o seu momento de inércia vai ser reduzido e sua velocidade de rotação aumentará.

Na seção 4.2 vimos a relação $M = dL/dt$ para o torque das forças externas que no caso do corpo rígido toma a forma

$$M = dL/dt = d(I \cdot \omega)/dt = dI/dt \cdot \omega + I \cdot d\omega/dt \quad (8)$$

Quando as componentes do tensor de inércia são independentes do tempo, obtemos a seguinte forma da segunda lei de Newton para o movimento de um corpo rígido

$$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} = I \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad (9)$$

Estas expressões vamos estudar na próxima seção.

No seguinte **exemplo** vamos calcular o tensor de inércia para um molécula de água que queremos considerar como um corpo rígido.

A distância H-O é $0,96 \cdot 10^{-10}$ m = 0,096 nm. O ângulo entre as duas ligações H-O é 105° .

Determine os momentos de inércia da molécula relativo ao centro de massa CM.

Solução:

Primeiramente determinamos os vetores-posição dos átomos relativo ao CM que tomamos como origem do sistema de coordenadas.

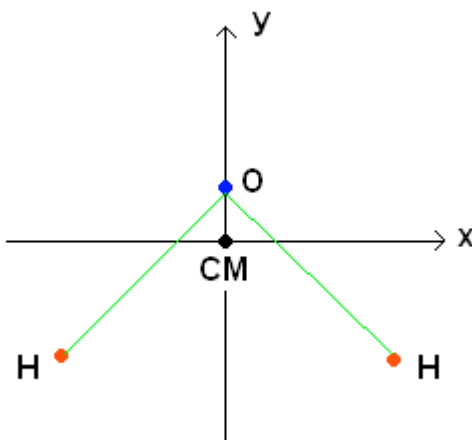


Fig.: 4.3-1

Usando a definição do CM, $\mathbf{r}_{cm} = \sum m_i \mathbf{r}_i / \sum m_i := \mathbf{0}$ e algo de geometria, p. ex. $x/0,96 = \text{sen } 52,5$ etc., obtemos para os vetores-posição

$$\mathbf{r}(\text{O}) = (0, 0.065) \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\mathbf{r}(\text{H}_{\text{esquerdo}}) = (-0.76, -0.52) \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\mathbf{r}(\text{H}_{\text{à direita}}) = (0.76, -0.52) \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

A coordenada-y do átomo de oxigênio é $-y/8$, onde y é a coordenada do átomo de hidrogênio.

As componentes do tensor de inércia calculamos com MuPad, usando as relações (2). O fator u contém a massa do próton $1,67 \cdot 10^{-24}$ g e a potência $(10^{-8} \text{ cm})^2 = 10^{-16} \text{ cm}^2$. Os produtos de inércia se anulam, ou seja, o tensor tem forma diagonal, sua matriz é dita diagonalizada. Os eixos x-y-z para os quais os produtos de inércia se anulam são chamados de eixos principais de inércia. Os elementos da diagonal I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são chamados de momentos de inércia principais ou também de *autovalores* do operador I .

Em nosso caso, vemos que os eixos coordenados são eixos principais de inércia. Repito que é sempre possível localizar os eixos principais de inércia para um corpo rígido tridimensional geral.

- `reset()://H2O-tensor de inércia`
- ```

DIGITS:=5:

u:=1.67*10^(-40)*g*cm^2://fator de conversão

m[1]:=16:m[2]:=1:m[3]:=1://massas
r[1]:=matrix([[0,0.065,0]])://posição do átomo O
r[2]:=matrix([[-0.76,-0.52,0]])://átomo H
r[3]:=matrix([[0.76,-0.52,0]])://átomo H

Ixx:=(sum(m[i]*(r[i][2]^2+r[i][3]^2), i=1..3)*u);
Iyy:=(sum(m[i]*(r[i][1]^2+r[i][3]^2), i=1..3)*u);
Izz:=(sum(m[i]*(r[i][1]^2+r[i][2]^2), i=1..3)*u);
Ixy:=- (sum(m[i]*(r[i][1]*r[i][2]), i=1..3)*u);
Iyz:=- (sum(m[i]*(r[i][2]*r[i][3]), i=1..3)*u);
Izx:=- (sum(m[i]*(r[i][3]*r[i][1]), i=1..3)*u);

```

```

1.016e-40 cm2 g
1.9292e-40 cm2 g
2.9452e-40 cm2 g
0
0
0

```

$$I = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 1.93 & 0 \\ 0 & 0 & 2.95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-40} \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

### 4.3.2 O corpo homogêneo e simétrico

Quando o corpo tem uma distribuição homogênea da massa, p. ex. uma bola de bilhar, temos que substituir a soma por uma integral como já foi dito na seção anterior, veja Eq. (22). Em vez da soma (5)

$$I_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} - x_i^{(k)} x_j^{(k)}) \quad (5)$$

usamos a integral (10)

$$I_{ij} = \int dm (r_s^2 \delta_{ij} - x_{s,i} x_{s,j}) \quad (10)$$

A equação (10) refere-se ao centro de massa do corpo o que foi indicado com o índice s. Assim obtemos, por exemplo

$$I_{11} := I_{xx} = \int dm (r_s^2 - x_{s,1}^2) \quad (11)$$

Escrevendo  $r_s^2 := r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  e  $x_{s,1}^2 := x^2$ , resulta

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \quad (12)$$

O elemento dm substituiremos por  $dm = \rho dV$ , onde  $\rho$  é a densidade.

Se o corpo tiver uma simetria simples, o cálculo das integrais não será difícil, como já vimos no 3.4.11, onde calculamos a integral tripla  $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \rho dV$  para uma esfera.

Com  $\rho = 1$  obtivemos o resultado  $I_{zz} = 8\pi R^5/15$ .

Repitamos brevemente o que foi dito no parágrafo 3.4.11:

A integral a calcular foi  $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$ , ou em coordenadas esféricas:

$$I_{zz} = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3(\vartheta) d\varphi d\vartheta dr \quad (13)$$

Na formulação de MuPAD temos

- `Izz:=rho*int(int(int(r^4*(sin(theta))^3, phi=0..2*PI), theta=0..PI), r=0..R)`

$$\frac{8 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho}{15}$$

Obtivemos, então, o mesmo resultado, se bem que a ordem de integração foi invertida.

No caso de uma esfera com sua simetria absoluta, podemos substituir uma integral tripla por uma integral simples sobre o raio  $r$ . Para realizar isso, deve-se subdividir a esfera em cascas esféricas delgadas, sendo  $dr$  a espessura das cascas. O elemento de volume será o volume de uma casca, ou seja  $dV = 4\pi r^2 \cdot dr$ .

Escrevendo  $I_o := I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ , obtemos

$$3I_o = \rho \int (y^2 + z^2) dV + \rho \int (x^2 + z^2) dV + \rho \int (x^2 + y^2) dV, \text{ ou seja } I_o = [2\rho \int (x^2 + y^2 + z^2) dV]/3.$$

Integrando, obtemos

$$I_o = \frac{2}{3} \rho 4\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 \quad (14)$$

então, o mesmo resultado como o anterior.  $I_o$  é o momento de inércia com respeito a um eixo que passa pelo CM. Todas as distâncias devem ser medidas desde tal eixo.

Calculemos agora o momento de inércia **para uma barra** homogênea relativamente a um eixo perpendicular à barra e passando pelo CM.

A haste tem o comprimento  $L$  e uma seção transversal  $S$  constante. Quando  $M$  é a massa da haste, então temos  $\rho = dm/dV = M/V = M/(SL)$ .

Dividimos a haste em pequenos segmentos de comprimento  $dx$  com a distância  $x$  ao eixo. Com  $dV = S dx$  temos  $dm = M dx/L$ . A integral se estende de  $-L/2$  até  $+L/2$ :

$$I_o = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = 2 \int_0^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx$$

Ou seja,  $I_o = ML^2/12$ .

Se o eixo passa por a extremidade  $A$  da barra, temos que integrar entre  $0$  e  $L$  e o resultado será  $I_A = ML^2/3$ , ou seja quatro vezes o resultado anterior.

O calculo de momentos de inércia com respeito a *eixos paralelos* resulta muito fácil com a aplicação do *teorema de Steiner* :  $I_A = I_o + M a^2$ , onde  $a$  é a separação entre os eixos. Em nosso caso com  $a = L/2$  obtemos, sem integração

$$I_A = ML^2/12 + M L^2/4 = ML^2/3.$$

Mais adiante vamos derivar o teorema de Steiner, isso aqui foi só uma pequena demonstração de sua utilidade.



A próxima figura mostra uma **quina** (tetraedro, corpo de quatro faces) limitada pelos planos de coordenadas e pelo plano  $z(x,y) = a(1-x/b -y/c)$ . Calcule os elementos do tensor de inércia com respeito à origem O de coordenadas.

- $a:=3:b:=3:c:=3:$

```
plot(plot::Implicit3d(z+a*x/b+a*y/c-a,
x=0..4,y=0..4,z=0..4))
```

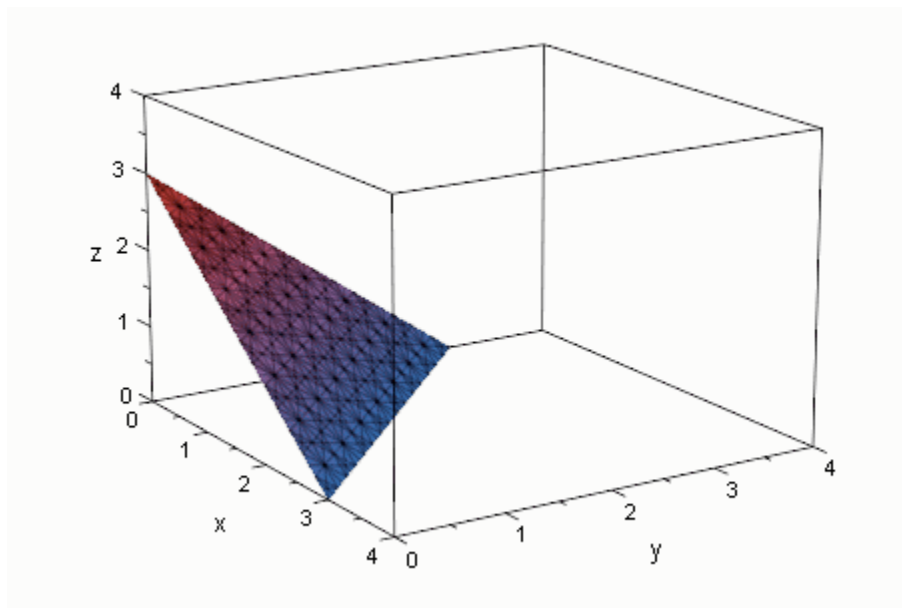


Fig.: 4.3-2

O cálculo direto dos elementos é possível, mas bastante cansativo (veja *Com lápis e papel*). Temos aqui um verdadeiro trabalho para o MuPAD. Para nos orientar, inspecionamos, outra vez, as equações (2)

$$I_{xx} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) \quad I_{yy} = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) \quad I_{zz} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum m_i x_i y_i \quad I_{yz} = I_{zy} = - \sum m_i y_i z_i \quad I_{zx} = I_{xz} = - \sum m_i x_i z_i$$

Para calcular  $I_{xx}$  precisamos da soma  $y^2 + z^2$  e tomamos  $\rho = 1$ .

Os valores de  $x$  vão de  $x_1 = 0$  até  $x_2 = b$ , os de  $y$  de  $y_1 = 0$  até  $y_2 = c(1-x/b)$ .

- `reset() :`  
`int(int(int(y^2+z^2, z=0..a*(1-x/b-y/c)) ,`  
`y=0..c*(1-x/b)) , x=0..b) :`  
`simplify(%)`

$a \ b \ c \ (a^2 + c^2)$

-----

60

Para obter este resultado manualmente, você precisará, pelo menos, duas páginas de cálculos- e *sem erros!*

### 4.3.3 Com lápis e papel

Calculemos agora o elemento de inércia  $I_{yz}$  à mão.

$$I_{yz} = \rho \int_0^b dx \int_0^{c(1-x/b)} y dy \int_0^{a(1-x/b-y/c)} z dz$$

Para simplificar, vamos escrever  $I_{yz} = \rho \int_x dx \int_y y dy \int_z z dz$ . Avaliando a última integral, resulta

$$I_{yz} = \rho \int_x dx \int_y y dy [a^2(1-x/b-y/c)^2/2]$$

Agora temos  $y(1-x/b-y/c)^2 = y(1-2x/b+x^2/b^2) + y^2(2x/(bc) - 2/c) + y^3/c^2$  e o cálculo segue assim:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= a^2 \rho / 2 \cdot \int_x (1-2x/b+x^2/b^2) dx \cdot \int_y y dy + a^2 \rho / 2 \cdot \int_x dx \cdot \int_y y^3 / c^2 dy + \\ &\quad + a^2 \rho / 2 \cdot \int_x (2x/(bc) - 2/c) dx \cdot \int_y y^2 dy , \\ &= a^2 \rho c^2 / 4 \cdot \int_x (1-x/b)^4 dx + a^2 \rho c^2 / 8 \int_y (1-x/b)^4 dx + \end{aligned}$$

$$+ a^2 \rho c^3 / 6 \cdot \int_x (2x/(bc) - 2/c)(1-x/b)^3 dx,$$

$$= a^2 bc^2 \rho / 20 + a^2 bc^2 \rho / 40 - a^2 bc^2 \rho / 15 = \mathbf{a^2 bc^2 \rho / 120}$$

Deixei alguns passos intermédios em branco para que você tenha um pouco mais de alegria. Com MuPAD obtém-se o mesmo resultado, mas mais barato:

- `reset() :`  
`int(int(int(rho*y*z, z=0..a*(1-x/b-y/c)),`  
`y=0..c*(1-x/b)), x=0..b) :`
- `simplify(%)`

$$\frac{a^2 \cdot b \cdot c^2 \cdot \rho}{120}$$

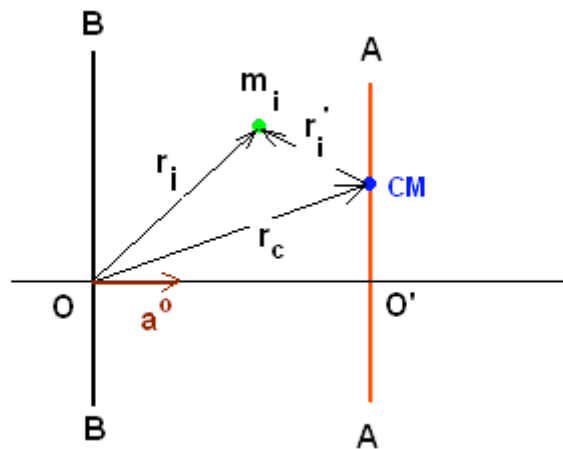


Fig.:4.3-3

Como já foi anunciado, vamos ver agora a demonstração de um simples teorema de grande importancia prática para o cálculo do momento de inércia, a saber, o teorema de **Steiner** (teorema dos eixos paralelos).

Consideremos, veja figura 4.3-3, dois eixos paralelos de rotação de um corpo rígido. Suponhamos que um deles, o eixo AA, passe pelo centro de massa CM do corpo. A separação vertical entre os dois eixos é  $a$ .

Da figura 4.3-3 tiramos  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$ , onde  $\mathbf{r}_i$  é o vetor-posição da partícula  $m_i$  com respeito à origem O.  $\mathbf{a}^\circ$  é um vetor unitário perpendicular aos eixos,  $\mathbf{r}_c$  é o vetor posição do CM relativo à O.  $\mathbf{r}'_i$  é o vetor-posição de  $m_i$  relativo ao CM. A distância de  $m_i$  do eixo BB é dada pela projeção do vetor  $\mathbf{r}_i$  sobre o vetor  $\mathbf{a}^\circ$ . (No cálculo do momento de inércia, interessam apenas as coordenadas perpendiculares ao eixo referido.) O momento de inércia de todas as partículas relativo ao eixo BB é dado por

$$I_{BB} = \sum m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}^\circ)^2, \quad (15)$$

sendo  $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}^\circ$  a projeção do vetor  $\mathbf{r}_i$  sobre  $\mathbf{a}^\circ$ , ou seja, a distância da partícula  $m_i$  do eixo BB.  $\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{a}^\circ$  é a distância de  $m_i$  do eixo AA que passa pelo CM. O momento de inércia das partículas respeito a AA é

$$I_{CM} = \sum m_i (\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{a}^\circ)^2. \quad (16)$$

Substituindo em (15)  $\mathbf{r}_i$  por  $\mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_{BB} &= \sum m_i [(\mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{a}^\circ]^2 \\ &= \sum m_i (\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{a}^\circ + \mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{a}^\circ)^2 \\ &= \sum m_i (\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{a}^\circ)^2 + \sum m_i (\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{a}^\circ)^2 + 2 \sum m_i (\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{a}^\circ) \cdot (\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{a}^\circ) \\ &= a^2 \sum m_i + I_c + 2a (\sum m_i \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{a}^\circ = I_c + M a^2 \end{aligned}$$

Note que  $\sum m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$  já que  $\mathbf{r}_c = \sum m_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_c) / M$  e, então,  $M \mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c \sum m_i + \sum m_i \mathbf{r}'_i$ , ou seja,  $\sum m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$ .

Para calcular o momento de inércia em relação a um eixo qualquer, calculamos primeiro o momento em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa. Depois somamos a este o momento de inércia em relação ao eixo referido, calculado como se toda a massa estivesse concentrada no CM. Se o corpo não tiver nenhuma simetria, devemos utilizar um metodo experimental para a determinação do momento de inércia.

