

## 4.2 A lei da conservação do momento angular

### 4.2.1 O momento angular e o torque

Até agora, não fizemos uso da segunda parte das experiências de Mach, ver capítulo 2, Eq. (2.3). Heis aqui outra vez esta lei, mas com novos índices:

$$\mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \quad (1)$$

Esta equação vale para todo tipo de interação. No caso do movimento de rotação, tem muita vantagem o conceito de **torque** que desempenha um papel análogo ao da força no movimento de translação.

O torque **M** (ou  $\boldsymbol{\tau}$ ) da força **F** em relação a um ponto fixo O, num sistema inercial, é definido como o produto vetorial

$$\mathbf{M} := \mathbf{r} \times m \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2)$$

O vetor **r** dá a posição da partícula em relação ao ponto O. **r** = vetor-posição. Compare esta definição com a definição dada na seção 2.1. Com a noção do torque podemos reformular a equação (1):

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{0} \quad (3)$$

Vamos ver, agora, que esta equação contém uma nova lei de conservação, uma lei que segue sendo válida quando a interação deixa de existir. Eq. (3) mesma tem somente significado físico, se houver interação.

Primeiramente introduzimos uma nova grandeza, a saber, o **momento angular L** para uma partícula de massa m:

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (4).$$

A relação (4) representa um vínculo entre movimento de translação e movimento de rotação. O momento angular total de um sistema é a soma dos momentos angulares de suas partículas. Para dois massas  $m_1$  e  $m_2$  temos

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \quad (5)$$

Este vetor tem a notável propriedade de ser independente do tempo, pois

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad (6)$$

Para a demonstração disso, ver **4.2.4**

São as condições iniciais que determinam comprimento, direção e sentido do vetor  $\vec{L}$ . Sendo  $\vec{L}$ , então, independente do tempo, vale

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \text{const.} \quad (7)$$

O resultado  $\vec{L} = \text{const.}$  significa que a direção de  $\vec{L}$  fica inalterada e, com isso a orientação do plano do movimento, determinado pelos vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , permanecerá fixo no espaço. Além disso, permanecem inalterados, como já foi dito, o módulo e o sentido de  $\vec{L}$ . Isso tem também como consequência que as duas partículas, que estão interagindo, tem que mover-se sempre no mesmo plano sem poder modificar o sentido do seu movimento. Se o seu centro de massa (CM) estiver movendo-se com movimento retilíneo uniforme, veja 4.1.1, o plano das massas se moveria juntamente com o CM. Com o seguinte programa podemos observar este comportamento:

- `reset()` :  
*/\*duas partículas de mesma massa ligadas por uma haste se movem girando pelo espaço ao longo da reta do CM\*/*  
`x1:=2*cos(2*PI*t) : //Partícula 1`  
`y1:=3*t+2*sin(2*PI*t) :`  
`z1:=2*t:`  
`curva1:=plot::Curve3d([x1(t),y1(t),z1(t)],`  
`t=0..u,u=0..2,Color=RGB::Red) :`  
  
`p1:=plot::Point3d([x1,y1,z1],PointSize=3*unit::mm,`  
`t=0..2,Color=RGB::Red) :`  
  
`x2:=-2*cos(2*PI*t) ://Partícula 2`  
`y2:=3*t-2*sin(2*PI*t) :`  
`z2:=2*t:`  
  
`curva2:=plot::Curve3d([x2(t),y2(t),z2(t)],`  
`t=0..u,u=0..2,Color=RGB::Blue) :`  
  
`p2:=plot::Point3d([x2,y2,z2],PointSize=3*unit::mm,`  
`t=0..2,Color=RGB::Blue) :`

```

//reta do CM:
x3:=0:
y3:=3*t:
z3:=2*t:
curva3:=plot::Curve3d([x3(t),y3(t),z3(t)],
t=0..2,Color=RGB::Green):

p3:=plot::Point3d([x3,y3,z3],PointSize=3*unit::mm,
t=0..2,Color=RGB::Green):

//haste:
l:=plot::Line3d([x1,y1,z1],[x2,y2,z2],t=0..2,Color=RGB::Black)
:
c:=plot::Circle3d(2,[x3,y3,z3],t=0..2,Color=RGB::Black):

plot(p1,p2,p3,l,c,curva1,curva2,curva3)

```

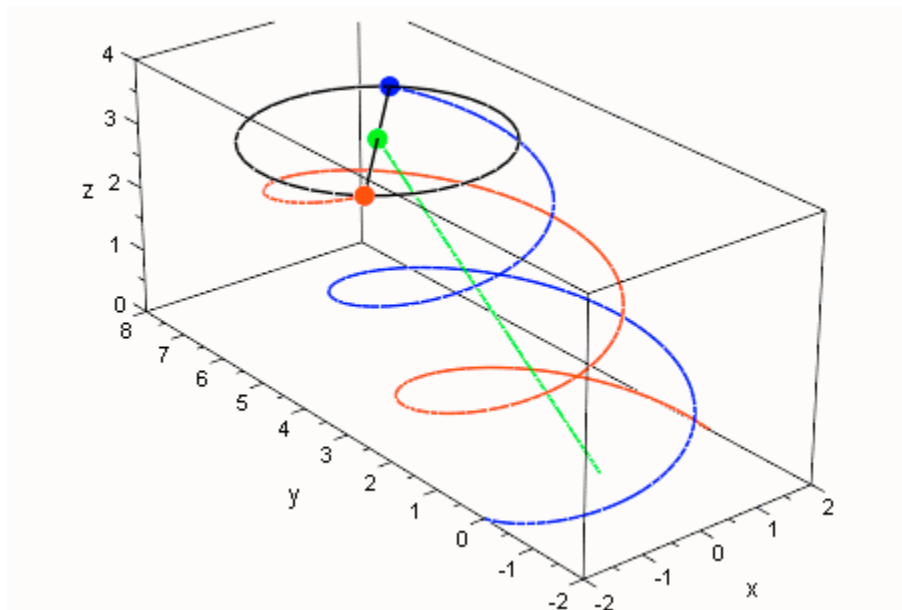


Fig.4.2-1

O movimento do sistema das duas massas ocorre num plano que se encontra na ponta do vetor  $\mathbf{r}_c$ . A ponta deste vetor move-se com velocidade constante ao longo da reta  $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_{c0} + \mathbf{v}_{c0} t$ . No programa usamos  $\mathbf{r}_{c0} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{v}_{c0} = [0, 3, 2]$ .

Enunciemos agora a **lei da conservação do momento angular**:

O momento angular total de um sistema isolado é constante em módulo, direção e sentido.

Esta lei é uma das leis fundamentais de conservação da natureza, tendo sido verificada mesmo em situações, às quais as leis de Newton não se aplicam (p.ex. quando estão envolvidas partículas a altas velocidades ou de dimensões subatômicas.)

Até aqui, o nosso sistema constava de só duas partículas, mas é fácil de comprovar que a lei é válida para qualquer sistema de partículas.

Um exemplo que mostra a validade de  $\mathbf{L} = \text{const.}$  é o sistema solar que pode ser tratado como isolado. Este sistema, como um total, tem momento angular constante relativamente a seu centro de massa.

## 4.2.2 Decomposição do momento angular

Com freqüência é conveniente decompor o momento angular total em relação a um ponto fixo O no momento angular relativo ao CM (referencial C) e no momento angular da massa total do sistema que se supõe concentrada no CM, ou seja:

$$\mathbf{L} = \sum m_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i) + \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c \quad := \mathbf{L}_{\text{int}} + \mathbf{L}_{\text{ext}} \quad (8)$$

$\mathbf{r}_c$  e  $\mathbf{v}_c$  são posição e velocidade do CM em relação ao ponto O,  $\mathbf{r}'_i$  e  $\mathbf{v}'_i$  são posição e velocidade da partícula i em relação ao CM. O é um ponto fixo no laboratório que pode ser considerado um sistema inercial (referencial L).

O primeiro termo à direita dá o momento angular *interno* (o **spin**) relativo ao CM. O segundo termo é o momento angular *externo* relativo ao ponto O no referencial L. Chama-se  $\mathbf{L}_{\text{ext}} = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c$  também de *momento angular orbital*. No caso do átomo de hidrogênico, o momento angular do átomo consta do spin e do momento angular orbital do elétron.

A figura 4.2.2 mostra o caso de duas partículas. O vetor posição da massa  $m_2$  em relação à massa  $m_1$  é o vetor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 := \mathbf{r}_{12}$  que aponta da partícula 1 à 2. Os vetores  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  tem a soma zero:  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ , eles formam um *par de vetores*.

O momento interno é  $\mathbf{L}_{\text{int}} = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2$ , onde  $\mathbf{p}'_1 = m_1 \mathbf{v}'_1$  e  $\mathbf{p}'_2 = m_2 \mathbf{v}'_2$ . Com a *massa reduzida* do sistema de duas partículas, designada por  $\mu$  e definida por  $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$ , podemos chegar a uma forma muito simples para o vetor  $\mathbf{L}$ .

Com  $\mathbf{P}' = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = \mathbf{0}$  obtemos

$$\mathbf{L}_{\text{int}} = \mu(\mathbf{r}_1' \times \mathbf{v}_1' - \mathbf{r}_1' \times \mathbf{v}_2' - \mathbf{r}_2' \times \mathbf{v}_1' + \mathbf{r}_2' \times \mathbf{v}_2') = \mu[(\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1') \times (\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1')]$$

Introduzindo os vetores  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ , obtemos, finalmente, a expressão

$$\mathbf{L}_{\text{int}} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (9)$$

O momento angular interno de um sistema de duas partículas é, então, igual ao momento angular de uma partícula fictícia de massa  $\mu$  e vetor posição  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  que se move com a velocidade  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ .

Na expressão (9) não aparecem mais coordenadas com respeito ao referencial C, somente encontramos quantidades relativas.

Se quisermos calcular o momento angular interno do sistema elétron-próton no átomo de hidrogênio, então  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  significam vetor-posição e vetor-velocidade do elétron medidos em relação ao próton.  $\mu$  é a massa reduzida das duas partículas. Desde que a massa  $m_1$  do próton é 1836 vezes maior do que a massa  $m_2$  do elétron, resulta  $\mu \approx m_2$ . Isso podemos ver facilmente, notando que  $\mu = m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2) = m_2 / (1 + m_2/m_1)$ .

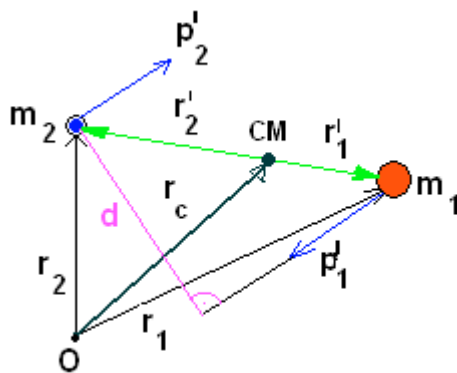


Fig.4.2-2

O sistema Terra-satélite artificial tem  $\mu \approx m_{\text{satélite}}$ , já que a massa  $m_1$  da Terra é muito maior do que a massa  $m_2$  do satélite.

É muito interessante que também a segunda lei de Newton se deixa formular para a massa fictícia  $\mu$ . Pois as equações do movimento das duas massas, a saber

$$m_1 \cdot d^2\mathbf{r}_1/dt^2 = -\mathbf{F} \quad \text{e} \quad m_2 \cdot d^2\mathbf{r}_2/dt^2 = \mathbf{F},$$

tomam, com  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , a forma  $m_2 \cdot d^2\mathbf{r}_2/dt^2 = (m_1 + m_2) \mathbf{F}/m_1$  que conduz imediatamente à equação

$$\mathbf{F} = \mu \cdot d^2\mathbf{r}/dt^2 \quad (10)$$

Podemos interpretar esta equação como a lei de movimento da massa  $\mu$  com respeito a um sistema de coordenadas fixada em  $m_1$ .

A força entre as partículas tem a forma de uma **força central**, ou seja  $\mathbf{F} = F(r) \cdot \mathbf{r}^o$ , onde  $\mathbf{r}^o$  é um vetor unitário com sentido e direção do vetor  $\mathbf{r}$ .  $\mathbf{F} = F(r) \cdot \mathbf{r}^o$  é a força que  $m_1$  exerce sobre  $m_2$ , e  $r$  é a distância entre  $m_1$  e  $m_2$ .  $F(r)$  pode ser de tipo gravitacional:  $F(r) = -G \cdot m_1 m_2 / r^2$ . (Não devemos cometer o erro de usar  $\mu$  em vez de  $m_2$ !)

A meta de um cálculo, normalmente numérico, é a determinação do vetor  $\mathbf{r}$  em função do tempo. Uma vez calculado  $\mathbf{r}$ , falta determinar os vetores  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ . Este problema podemos resolver por meio das equações

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c - m_2 \mathbf{r} / (m_1 + m_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c + m_1 \mathbf{r} / (m_1 + m_2) \quad (11)$$

Com ajuda da figura 4.2-2, podemos estabelecer as seguintes equações para os vetores-posição no sistema C:

$$\mathbf{r}'_1 = -\mu \mathbf{r} / m_1; \quad \mathbf{r}'_2 = \mu \mathbf{r} / m_2; \quad \mathbf{r}'_1 = -m_2 \mathbf{r}'_2 / m_1 \quad (12)$$

As relações (10) e (12) dão as equações do movimento no sistema do CM

$$m_1 \cdot d^2\mathbf{r}'_1/dt^2 = -\mathbf{F} \quad (13)$$

$$m_2 \cdot d^2\mathbf{r}'_2/dt^2 = \mathbf{F} \quad (14)$$

Basta resolver a equação diferencial (14), pois com  $\mathbf{r}'_1 = -m_2 \mathbf{r}'_2 / m_1$  obtemos  $\mathbf{r}'_1$ .

### 4.2.3 A segunda lei de Kepler

Consideremos, outra vez, a equação  $\mathbf{L} = \text{const.}$  para o caso de duas partículas. Uma triste consequência desta lei da conservação do momento angular é, como vimos, o fato de as partículas nunca poderem sair do plano do seu movimento e de nunca poderem mudar o sentido do seu movimento.

Foi o matemático e astrônomo polonês Johannes **Kepler** (1571-1630), que dedicou grande parte da sua vida ao estudo do movimento do sistema especial de duas partículas "Sol -Planeta", que conseguiu formular três leis que descrevem o movimento dos planetas:

**Primeira lei** (lei das órbitas):

Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.

**Segunda lei** (lei das áreas):

O segmento de reta que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais, ou seja, a taxa  $dA/dt$  com que o segmento varre áreas  $A$  é constante.

**Terceira lei** (lei dos períodos):

O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita.

Lendo bem estas leis, notamos que a segunda lei e a parte da primeira que se refere a um movimento planar devem ser conseqüências da lei da conservação do momento angular.

Olhemos à seguinte figura, que ilustra o problema análogo do sistema "Terra-satélite".

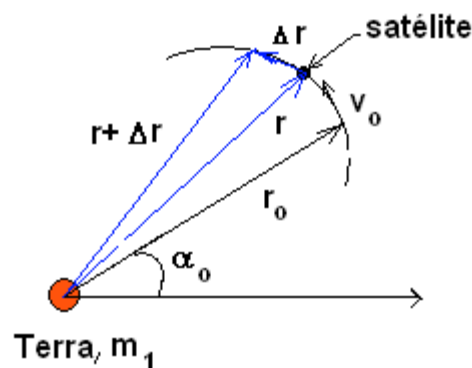


Fig.: 4.2-3

No instante  $t = 0$ , o satélite estava na posição  $\mathbf{r}_0$  e teve a velocidade  $\mathbf{v}_0$ . De  $\mathbf{L}_c = \text{const.}$  podemos deduzir que o vetor relativo  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  se encontra sempre no plano definido pelos vetores  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{v}_0$ . No intervalo de tempo  $\Delta t$ , o vetor  $\mathbf{r}$  varre a área  $\Delta A$  que tem, aproximadamente, a forma de um triângulo, ou seja

$$\Delta A \approx [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})]/2 = (\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r})/2, \text{ veja o parágrafo 2.2.3 sobre o produto vetorial.}$$

Para  $\Delta t \rightarrow 0$ , o área do triângulo se torna igual à área  $\Delta A$  varrido pelo satélite. Podemos escrever

$\mu d\bar{A}/dt = \mu (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt)/2 = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} /2 = \mathbf{L}_c /2$ , ou seja:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{1}{2\mu} \overline{\mathbf{L}_c} = \text{const.} \quad (15)$$

Esta equação exprime matematicamente a segunda lei de Kepler.

A parte da primeira lei que se refere à forma elíptica da órbita não se pode deduzir da lei  $\mathbf{L} = \text{const.}$ . Somente se introduzirmos uma força da forma  $\mathbf{F} = F(r) \cdot \mathbf{r}^0$  como  $F(r) = -k/r^n$ , ou seja, uma força central, obtém-se com  $n = 2$  e  $k > 0$  órbitas elípticas com o centro da força em um dos focos.

(Para  $n = -1$  e  $k > 0$ , isso é o caso do oscilador harmónico, obtém-se também órbitas elípticas, mas o centro da força fica, neste caso, no centro da elipse. Veja capítulo 6.)

As leis de Kepler serão tema do capítulo 5. Aqui queria só mostrar o vínculo da primeira e da segunda lei com a lei da conservação do momento angular.

Para terminar esta seção, consideramos o caso de **uma partícula só** que se move uniformemente ao longo de uma reta.

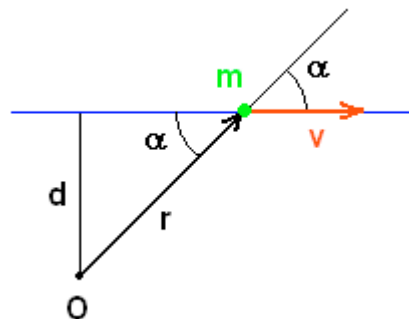


Fig.: 4.2-4

Poder-se-ia pensar que tal partícula não está efetuando rotação nenhuma e que, por isso, não pode ter momento angular. Mas temos que ver que o vetor posição sim gira com respeito ao ponto fixo O. Se a partícula for chegando de  $-\infty$  para ir a  $+\infty$ , o ângulo  $\alpha$  vai variar de  $180^\circ$  até  $0^\circ$ .



No instante da maior aproximação ao centro O, a distância d será mínima e  $\alpha$  exatamente  $90^\circ$ .

A distância vertical d, denominada **parâmetro de impacto**, tem muita importância na descrição dos problemas sobre choques entre duas "partículas", veja seção 5.1. Pode-se tratar de uma aproximação ("choque") de um elétron do núcleo de um átomo ou, também, de um acercamento de um meteoro da Terra.

O momento angular da partícula com relação ao ponto O é  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ , veja Eq. (4), e tem o módulo  $|\mathbf{L}| = m r v \sin \alpha = m v d$ , visto que  $d = r \sin \alpha$ . Temos, assim,

$$d = \frac{|\mathbf{L}|}{m \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{L}|}{|\mathbf{p}|} \quad (16)$$

O vetor velocidade-angular da partícula vem dado por (veja "Com Lápis e Papel"):

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} / r^2 \quad (17)$$

que nos permite escrever

$$|\mathbf{L}| = m |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = m r^2 \cdot \omega. \quad (18)$$

A grandeza  $I := m r^2$  chama-se de **momento de inércia**.

Veremos mais adiante que o momento de inércia é a inércia que o corpo apresenta para a rotação. A determinação do momento de inércia é um tema comum nos cursos de cálculo. Na próxima seção, vamos dedicar-nos, entre outras coisas, ao cálculo do momento de inércia para vários sistemas de partículas.

### 4.2.3 O momento de inércia de um sistema de partículas

Imaginemo-nos que as partículas estejam ligadas por meio de hastes finas de massas desprezíveis a um eixo que se move com velocidade angular  $\omega = d\phi/dt$ . Fazemos a suposição que o eixo de rotação esteja orientado ao longo do eixo-z. Temos, então  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \cdot d\phi/dt$ , sendo  $\mathbf{k}$  o vetor unitário do eixo-z. Todas as partículas estão movendo-se em círculos paralelos ao plano-xy. O momento angular na direção-z é, para uma partícula só,

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\varphi \cdot d\varphi/dt = m r^2 \omega \mathbf{k}, \text{ ver 3.4.9}$$

(Ajuda: Seja  $\mathbf{r}$  perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$ , ou seja,  $\mathbf{r} = r(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j})$ . Então

$$\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\varphi = r(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) \times (-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}) = r(\cos^2\varphi(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - \sin^2\varphi(\mathbf{j} \times \mathbf{i})) = r\mathbf{k}$$

Então temos, neste caso,

$$\mathbf{L} = m r^2 \omega \mathbf{k} \quad (19)$$

$r$  é a distância vertical da partícula do eixo de rotação.

Somando os momentos angulares  $\mathbf{L}_{iz} = m_i r_i^2 \omega \mathbf{k}$  de todas as partículas, obtemos como momento angular total com respeito ao eixo-z

$$\mathbf{L}_z = I_z \cdot \omega \mathbf{k}, \quad (20)$$

onde  $I_z := \sum m_i r_i^2$  é o momento de inércia do sistema de partículas.

Para o torque das forças externas  $\mathbf{M}_{\text{ext}} = d\mathbf{L}/dt$  temos, agora,

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = I \cdot d\omega/dt \quad (21)$$

Vê-se, então, que o torque necessário para dar a um sistema de partículas uma certa velocidade  $\boldsymbol{\omega}$  é tanto maior quanto maior é o momento de inércia, daí vem o nome. O momento de inércia desempenha na rotação um papel análogo ao da massa na translação.

Podemos considerar um **corpo rígido** que gira ao redor de um eixo fixo com velocidade angular  $\omega$  como um sistema de um número muito grande de partículas. Cada partícula do corpo percorrerá um círculo cujo raio é a sua distância até o eixo de rotação. O momento de inércia do corpo em relação ao eixo será  $I := \sum m_i r_i^2$ . Sendo o corpo um contínuo, esta soma precisa ser substituída por uma integral:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV, \quad (22)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa do corpo e  $dV$  é um elemento de volume.

#### 4.2.4 Com lápis e papel

a.

Para demonstrar a Eq. (6), partimos da relação  $d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/dt = d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$  e escrevemos

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{r}_1 \times m_1 \bar{v}_1 + \bar{r}_2 \times m_2 \bar{v}_2) =$$

$$= \mathbf{v}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{v}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$$

já que  $\mathbf{v}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ , e devido à Eq. (3) temos  $\mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ .

O que sobra é  $d\bar{L}/dt = \mathbf{0}$ .

b.

Resta, agora, demonstrar a fórmula (17):  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}/r^2$ .

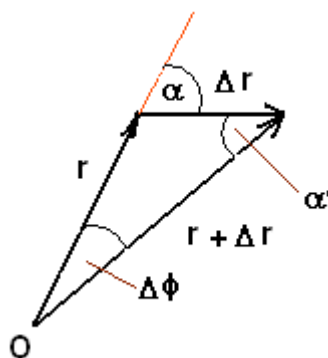


Fig.: 4.2-5

Sabendo-se que  $\omega = \Delta\phi/\Delta t$ , pode-se escrever  $\omega \approx AB/(r \cdot \Delta t) = |\Delta r| \cdot \text{sen} \alpha' / (r \cdot \Delta t)$ . Quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos para o módulo de  $\boldsymbol{\omega}$  a expressão  $\omega = d\phi/dt = \text{sen} \alpha \cdot v/r$ .

O vetor  $\boldsymbol{\omega}$  está perpendicular aos vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$ , ou seja  $\boldsymbol{\omega} \approx \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ .

O fator de proporcionalidade deve ser  $1/r^2$ , para que  $\omega = d\phi/dt = v \cdot \text{sen} \alpha / r$ . ( $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|/r^2 = r \cdot v \cdot \text{sen} \alpha / r^2 = v \cdot \text{sen} \alpha / r$ ). Fica, assim, demonstrada a relação  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}/r^2$ .

### 4.2.5 Dois exemplos para o momento angular

- a. O momento angular da Terra relativo ao Sol.  
(Para simplificar, consideramos uma órbita circular. Os valores numéricos são aproximados.)

A massa da Terra é  $6 \cdot 10^{24}$  kg e sua distância média ao Sol é  $1,5 \cdot 10^{11}$  m.

O período da revolução da Terra em torno do Sol é  $T = 3 \cdot 10^7$  s.

A velocidade angular média da Terra em torno do Sol é, então,

$\omega = 2\pi/T = 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ . Assim, o momento angular da Terra relativo ao Sol é

$L = mr^2\omega = 2,7 \cdot 10^{40} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$  (= J·s).

(Para nosso fim, não faz sentido manter todos os algarismos no resultado.)

- b. O momento angular para um elétron relativo ao núcleo num átomo de hidrogênio.

$m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $r = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ ,  $\omega = 4,1 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$

Destes dados obtemos para o momento angular do elétron, relativo ao núcleo, o valor  $L = mr^2\omega = 1 \cdot 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .

Considere -e medite sobre!- a tremenda disparidade nos valores do momento angular entre os objetos do cosmos.

O valor de L para o elétron no átomo de hidrogênio é designado pelo símbolo  $\hbar$  (lê-se agá cortado) e é usado como unidade do momento angular de partículas atômicas. O valor de  $\hbar$ , com 6 algarismos significativos, é  $\hbar = 1.05459 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ .

A grandeza  $h = 2\pi \cdot \hbar$  é denominada constante de **Planck**. (Max Planck, físico alemão, 1858-1947, foi um homem de grandes qualidades humanas. M. Planck é lembrado como o fundador da teoria quântica. Foi premiado com o Nobel de física em 1918.) No site <http://www.geocities.com/guri.geo/coment.htm> você pode ler sobre Max Planck, sobre algarismos significativos ... e sobre muitos outros assuntos.

