

4 As Leis de Conservação

Temos que voltar ao capítulo 2, onde falamos sobre a interpretação da mecânica Newtoniana pelo físico austríaco Ernst Mach. Um ponto central nessa interpretação ocupam os conceitos de *interação* e de *massa*. Enquanto a interação depende do mecanismo com o qual dois corpos se estão influenciando mutuamente, a massa é uma grandeza completamente independente da interação.

Das leis de Mach podem-se deduzir algumas afirmações que contêm varias limitações para os movimentos dos corpos interagindo mutuamente.

Estes restrições são independentes da interação. Em vez de restrições ou limitações nas formas de movimento fala-se, geralmente, da conservação de certas grandezas, por exemplo da conservação do **momento linear** (ou quantidade de movimento, que é, por certo, um termo bem antiquado, como em alemão *Bewegungsgroesse*) ou do **momento angular** e da **energia**.

Na mecânica de Mach, estas leis de conservação não têm a condição de princípios, pois são meramente conseqüências das experiências de Mach. As grandezas de conservação nos permitem predizer o desenvolvimento temporal de um sistema de massas em interação mútua, sem tomar em conta o modo específico da interação.

O valor numérico dessas grandezas depende unicamente das condições iniciais.

Enquanto as leis de conservação do momento linear e do momento angular têm validade completamente geral, a lei da conservação da energia tem validade para somente alguns interações especiais, a saber, para as interações conservativas.

4.1 A lei da conservação do momento linear e o centro de massa

Partimos da primeira lei experimental de Mach, a saber, da lei 1a:

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \quad (1)$$

Estamos considerando dois corpos, C_1 e C_2 , que encontram-se numa certa região do espaço em interação mútua (não existem outros corpos nesta região, ou seja, C_1 e C_2 formam um sistema isolado). Devido à Eq. (1) temos

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2 \quad \text{ou}$$

$$m_1 d\mathbf{v}_1/dt = -m_2 d\mathbf{v}_2/dt \quad (2)$$

Ao integrar isso entre os tempos t' e t'' , resulta

$$m_1 \int_{t'}^{t''} \frac{d\bar{\mathbf{v}}_1}{dt} dt = -m_2 \int_{t'}^{t''} \frac{d\bar{\mathbf{v}}_2}{dt} dt$$

ou seja,

$$m_1 \mathbf{v}_1(t'') + m_2 \mathbf{v}_2(t'') = m_1 \mathbf{v}_1(t') + m_2 \mathbf{v}_2(t') \quad (3)$$

Isso significa que o vetor $\mathbf{P} := m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ é independente do tempo e do jeito da interação. \mathbf{P} depende só das condições iniciais e não pode ser alterado pela interação. O vetor \mathbf{P} é o **momento linear** do sistema e a Eq. (3) é chamada de lei da conservação do momento linear. Em palavras:

O momento linear de um sistema isolado é constante no tempo e não depende do mecanismo da interação.

Os momentos particulares $\mathbf{p}_1 := m_1 \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{p}_2 := m_2 \mathbf{v}_2$ não são, em geral, conservados, só sua soma vetorial é constante no decorrer do tempo. Eq. (3) também tem um significado físico se t' for um instante antes da interação começar e t'' um instante depois de ela terminar.

Se ambos os corpos estão no instante t' *em repouso* em relação a um sistema inercial, então temos $m_1 \mathbf{v}_1(t') = m_2 \mathbf{v}_2(t') = \mathbf{0}$ e em cada instante depois vale

$$\mathbf{P} := m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (4)$$

Esta equação tem a mesma forma da Eq. (1) e pode, conseqüentemente, ser usada para definir e determinar a massa inercial.

Suponha que C_1 e C_2 estão sobre uma mesa sem atrito (uma mesa "de ar" horizontal produz uma fina camada de ar entre ela e o corpo, reduzindo o atrito a quasi 0) em interação por meio de uma mola, que ao início é mantida comprimida por meio de um fio. Quando queimamos o fio, os corpos serão acelerados enquanto a mola tem contato com os corpos. Depois de terminar a interação, podemos medir comodamente as velocidades dos corpos e usar Eq. (4) para determinar a massa do corpo C_1 em relação à massa do corpo C_2 -ou vice versa. Note que não se pode usar Eq. (1) para determinar m se não existe interação, pois em tal caso \mathbf{a} é zero.

4.1.1 O centro de massa

O centro de massa (CM) de nosso sistema isolado está definido pelo vetor

$\mathbf{r}_c := (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/M$, onde M é a massa total, ou seja $M := m_1 + m_2$.

O CM possui alguns propriedades interessantes que devemos conhecer. Primeiro notamos que sua velocidade $d\mathbf{r}_c/dt = \mathbf{P}/M$ é um vetor constante, já que \mathbf{P} é constante. Em palavras:

O centro de massa de um sistema isolado mantém-se em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

Isso quer dizer que o CM move-se com velocidade constante ao longo de uma reta cuja equação vem dada por $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_{c,o} + \mathbf{v}_{c,o}t$. Se os corpos no começo estão em repouso, o CM permanecerá em repouso, independentemente da interação.

Suponhamos que os dois corpos estão sobre patins, puxando-se mutuamente por uma corda. Eles acabarão encontrando-se na posição do CM do sistema. O CM não pode mover-se, pois C_1 e C_2 encontram-se inicialmente parados. O CM permanecerá em repouso enquanto C_1 e C_2 se aproximam um do outro.

Um sistema referencial (x',y',z') que se move com o CM ao longo da reta do CM é um sistema inercial, já que $\mathbf{v}_{c,o}$ é constante. (x',y',z') é chamado de referencial do centro de massa ou **referencial C**. Relativamente a esse referencial C, o CM está em repouso, ou seja $\mathbf{P}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2'$.

Esse referencial C é importante porque muitas experiências que executamos no nosso sistema L do laboratório podem ser *analisadas* mais facilmente no referencial C. Nas experiências de colisões entre partículas microscópicas, por exemplo entre dois prótons, utiliza-se sempre o referencial C para analisar os resultados obtidas no laboratório (ver capítulo 5). Fala-se, tecnicamente, de experiências de "scattering" (= espalhamento).

4.1.2 Sistema de partículas e forças externas

A introdução do CM simplifica enormemente os problemas com mais de duas partículas. $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ é a massa total de um sistema composto de n partículas.

\mathbf{F}_{ik} é a força de interação entre as partículas i e k , \mathbf{F}_j é uma força que vem do lado de fora do sistema. Se o sistema for um avião, então todas as "partículas" internas vão sofrer a força gravitacional entre elas e a Terra, que é considerado como um corpo externo.

Sabemos que $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, já que todas as forças internas ocorrem em pares de ações e reações iguais e opostas. A soma de todas as forças internas é, por isso, identicamente nula. As forças internas não produzem qualquer variação no impulso linear total. Mas as forças externas podem variar o impulso linear total de nosso sistema.

A soma vetorial das forças externas que atuam no sistema é \mathbf{F}_{ext} e temos

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{a}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{v}}_i = \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} \quad (5)$$

$d\bar{\mathbf{P}}/dt$ é a taxa de variação no tempo do impulso linear do sistema.

Para o CM do sistema temos $\mathbf{r}_c = \sum m_i \mathbf{r}_i / M$ e $\mathbf{v}_c = d\mathbf{r}_c/dt$. A seguinte equação (6) é a segunda lei de Newton generalizada para um sistema de massas, ou seja a equação do movimento de M .

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = M \cdot \frac{d\bar{\mathbf{v}}_c}{dt} = M \cdot \bar{\mathbf{a}}_c \quad (6)$$

A equação (5) é uma forma alternativa da segunda lei do movimento generalizado.

A equação (6) afirma que a resultante das forças externas sobre qualquer sistema de massas é igual à massa total do sistema vezes a aceleração do CM. Esta lei expressa o chamado princípio do movimento do CM.

O CM se move como se fosse uma partícula de massa igual à massa total do sistema e sujeito à força externa aplicada ao sistema.

4.1.3 Movimento de um foguete

Um foguete com a massa M tem a velocidade $\mathbf{V}_0 := \mathbf{v}$ em relação a um sistema inercial (por exemplo, com boa aproximação, a Terra). Durante um intervalo de tempo Δt o foguete ejeta a massa (de gases) $\Delta m = -\Delta M$.

A massa de gas ejetada tem em relação ao sistema inercial a velocidade \mathbf{V} e em relação ao foguete \mathbf{v}_r . Sabemos que $\mathbf{V} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}$, ver Eq. (4) na seção 3.5 com $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. O impulso linear do foguete é $\mathbf{P}(t) = M\mathbf{v}$. No instante $t + \Delta t$, o sistema (foguete + massa ejetada) tem um impulso linear de $\mathbf{P}(t+\Delta t) = (M+\Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + \mu\Delta t \mathbf{V}$, onde

$$\mu := -\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} > 0$$

é a taxa com a qual o foguete perde massa. Supõe-se que o combustível é queimado à taxa constante. $T = m/\mu$ é o tempo para queimar o combustível m tudo. O termo $\mu\Delta t \mathbf{V}$ é o impulso linear dos produtos de exaustão liberados durante o intervalo de tempo Δt .

A variação do impulso linear no intervalo de tempo Δt é

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}(t+\Delta t) - \mathbf{P}(t) = M\Delta\mathbf{v} + \mathbf{v}\Delta M + \Delta M\Delta\mathbf{v} - \Delta M\mathbf{V} \quad (7)$$

Juntamente com $\Delta t \rightarrow 0$ vale também $\Delta\mathbf{v} \rightarrow 0$, e para a equação (5) obtemos a seguinte forma especial:

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} = M \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} + \bar{\mathbf{v}} \frac{dM}{dt} - \frac{dM}{dt} \bar{\mathbf{V}} \quad (8)$$

\mathbf{F}_{ext} é a força externa que atua no foguete. Se consideramos um movimento vertical com \mathbf{v} dirigido para cima, temos $\mathbf{F}_{\text{ext}} = -Mg\mathbf{j}$. Para a velocidade $\mathbf{v}_r = \mathbf{V} - \mathbf{v}$ vale $\mathbf{v}_r = -v_r\mathbf{j}$, ou seja, \mathbf{v}_r é dirigida para baixo. v_r é o módulo da velocidade de saída dos gases com relação ao foguete.

(Estamos desprezando a resistência do ar e a variação da gravidade com a altitude. Além disso, vamos supor que o lançamento será feito no pólo norte, para evitar problemas devido à rotação da Terra.)

Se introduzirmos a força da propulsão (o *empuxo*) do foguete $\mathbf{F}_{\text{prop}} = \mathbf{v}_r \cdot dM/dt = -\mu \mathbf{v}_r$, podemos escrever

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{tr}} = M \cdot d\mathbf{v}/dt = M \cdot \mathbf{a} \quad (9)$$

Esta "primeira equação do foguete" tem a seguinte forma escalar:

$$a = d^2y/dt^2 = -g + \mu v_r/M \quad (10)$$

A constante característica do foguete μ podemos determinar por meio de $\mu = m/T$, onde m é a massa total do combustível e T o tempo necessário para a queima de todo o combustível.

Se M_0 é a massa total do foguete no início ($t = 0$), então sua massa no instante $t < T$ será

$$M(t) = M_0 - \mu t \quad (11)$$

pois $\mu = (M_0 - M(t))/t$. Após da fase de propulsão, quando todo o combustível é consumido, começa a "coasting phase" do foguete, durante a qual este se comporta como uma bala, disparada verticalmente para cima.

Para ser lançado da superfície da Terra, um foguete tem que obrigatoriamente possuir uma aceleração inicial $\mu v_r/M_0$ maior do que $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Essa exigência da aceleração não é atendida no tempo $t = 0$, somente após o foguete ter expulso suficiente massa, ele pode, eventualmente, ser lançado da superfície da Terra por seus próprios meios.

Agora vamos integrar a equação (10) com (11) para obter uma expressão para a velocidade no instante t . Obtemos, assim, a seguinte equação para $t < T$:

$$v(t) = v_0 - gt + v_r \cdot \ln(M_0/M(t)) \quad (12)$$

Esta é a chamada segunda equação do foguete. \ln é o logaritmo natural (neperiano). Para determinar a velocidade final, ou seja, v no momento quando todo o combustível é consumido, substituímos t por T e $M(t)$ por $M_{\text{final}} = M_0 - m$:

$$v_{\text{final}} = v_0 - gT + v_r \cdot \ln(M_0/M_{\text{final}}) \quad (13)$$

Para obter uma equação que caracteriza o motor do foguete, trasladamo-nos numa região do espaço sem ar e sem atração gravitacional. Suponha que o foguete seja lançado de uma nave espacial já no espaço sideral, onde podemos desprezar qualquer força gravitacional.) Escolhendo $v_0 = 0$ e $g = 0$, assim como $r := M_0/M_{\text{final}}$, resulta a seguinte equação importante do foguete:

$$v_{\text{final}} = v_r \ln r \quad (14)$$

A velocidade final depende, então, da razão $r := M_0/M_{\text{final}}$ e da velocidade da massa expelida (vel. de exaustão). A velocidade final excederá a velocidade dos gases expelidas quando $r > 2,718$. Vejamos o seguinte

Exemplo:

O foguete *Blue Streak* teve como combustível 26 500 kg querosene e 61 500 kg de oxigênio líquido. O corpo do foguete teve 6 200 kg e o "payload" foi 10 500 kg. A velocidade de exaustão foi de $v_r = 2490$ m/s.

(Massa inicial total: $M_0 = 104\,700$ kg, combustível total $m = 88\,000$ kg.)
O tempo de queima de todo combustível foi $T = 180$ s.

Calcular: r , v_{final} (com $g = 0$ e $g = 9,81$ m/s²), μ , aceleração de propulsão. Fazer a integração da equação (10) com MuPAD.

Solução:

$$r = M_0/(M_0 - m) = 6,27. \quad v_{\text{final}} = v_{\text{max}} = v_r \ln r = 4571 \text{ m/s.}$$

$$\text{Tomando em conta } g = 9,81 \text{ m/s}^2: v_{\text{final}} = v_0 - gT + v_{\text{max}} = 2805 \text{ m/s}$$

$$\mu = m/T = 489 \text{ kg/s.}$$

(Note, que a velocidade final do foguete pode ser maior do que a velocidade dos gases de exaustão v_r !)

$$a_{\text{prop}} = \mu v_r/M_0 = 11,6 > 9,81!$$

- ```

reset() //foguete
v0:=0:y0:=0:
M0:=104700:u:=489:vr:=2490:
vel:=ode({v'(t)=-g + (u*vr)/(M0-u*t),v(0)=v0},v(t)):
velocidade:=solve(vel):
Simplify(float(subs(%,t=180,g=0)));//velocidade

alt:=ode({y'(t)=-g + (u*vr)/(M0-u*t),
y'(0)=v0,y(0)=y0},y(t)):
altura:=solve(alt):
Simplify(float(subs(%,t=180,g=0))//altura

{4573.852915}//velocidade após 180 s e g =0

{292183.9128}// altura

```

```

Simplify(float(subs(% , t=180 , g=9.81))) ;
Simplify(float(subs(% , t=180 , g=9.81)))

{2808.052915} // velocidade após 180 s com g=9.91 m/s2
{133261.9128} // altura em metros

```

Gráfico com `plot::Function2d` e com  $g = 9,91 \text{ m/s}^2$

- ```

reset() // foguete
v0:=0:y0:=0:DIGITS:=6:
vel:=ode({v'(t)=-g + (u*vr)/(M0-u*t), v(0)=v0}, v(t)):
velocidade:=solve(vel):
V:=Simplify(op(%)):
velo:=plot::Function2d(V(t), t=0..180):
alt:=ode({y'(t)=-g + (u*vr)/(M0-u*t), y'(0)=v0, y(0)=y0}, y(t)):
altura:=solve(alt):
A:=Simplify(op(%)):
M0:=104700:u:=489:vr:=2490:g:=9.81:
alto:=plot::Function2d(A(t)/100, t=0..180, Color=RGB::Red):
plot(velo, alto, GridVisible=TRUE, AxesTitles=["t(s)", "v/y"],
Header="Foguete com g = 9.81m/(s*s)
vermelho = y(m)/100 , azul = v(m/s)")

```

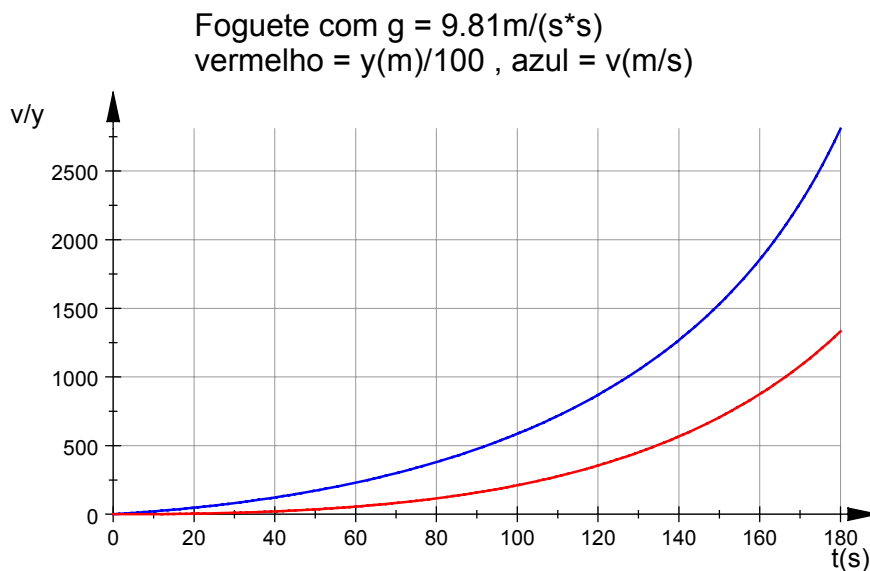


Fig.: 4.1-1

O gráfico da altura y geramos numericamente. Uma solução analítica para y podemos produzir com a função `int` do MuPAD, por exemplo ($c:= M_0/u$):

```
int(ln(1-t/c), t)
```

$$t \cdot \ln\left(\frac{c-t}{c}\right) - t - c \cdot \ln(t-c)$$

Mas não é fácil obter uma forma "compacta" como por exemplo a seguinte

$$y(t) = \frac{v_r M_0}{\mu} \left[\frac{M_0 - \mu t}{M_0} \ln\left(\frac{M_0 - \mu t}{M_0}\right) + \frac{\mu t}{M_0} \right] - \frac{gt^2}{2} \quad (15)$$

Num caso como este, é preferível fazer a integração da equação (12) manualmente.

O programa a seguir é uma nova aplicação dum programa que já foi usado no caso do pêndulo na seção 3.2:

- `reset():// gráfico animado`

```

DIGITS:=5:
M0:=104700:u:=489:vr:=2490:g:=9.81:
v0:=0:y0:=0:
IVP:={y'(t)+g-(u*vr)/(M0-u*t)=0,y'(0)=v0,y(0)=y0}:
fields:=[y(t),y'(t)]:
ivp:=numeric::ode2vectorfield(IVP, fields):
Y := numeric::odesolve2(ivp):
print(Unquoted,"t/s"," y/km "," v/m/s");
for i from 0 to 200 step 20 do
print (i,Y(i)[1]/1000,Y(i)[2]):
end_for;

```

```

//Animação
dt:=1:imax:=200:
plot(
plot::Point2d(t,Y(t)[1]/1000, Color = RGB::Blue,
VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,PointSize = 2*unit::mm)
$ t in [i*dt $ i = 0..imax],
plot::Line2d([t-dt,Y(t - dt)[1]/1000],[t,Y(t)[1]/1000],
Color = RGB::Red,GridVisible=TRUE,
VisibleAfter = t) $ t in [i*dt $ i = 1..imax],
AxesTitles=["t/s","y/km"],Header="Foguete com g =
9.81m/(s*s)")

```

```

t/s, y/km , v/m/s
0, 0.0, 0.0
20, 0.43991, 47.981
40, 2.096, 122.54
60, 5.5613, 230.17
80, 11.584, 380.09
100, 21.137, 586.02
120, 35.539, 869.64
140, 56.682, 1268.3
160, 87.509, 1855.3
180, 133.26, 2808.1
200, 206.25, 4809.7

```

Os últimos valores são inaceitáveis, já que depois de 180 segundos o foguete não tem mais combustível. A velocidade final de 2808 m/s será a velocidade inicial para a fase sem propulsão.

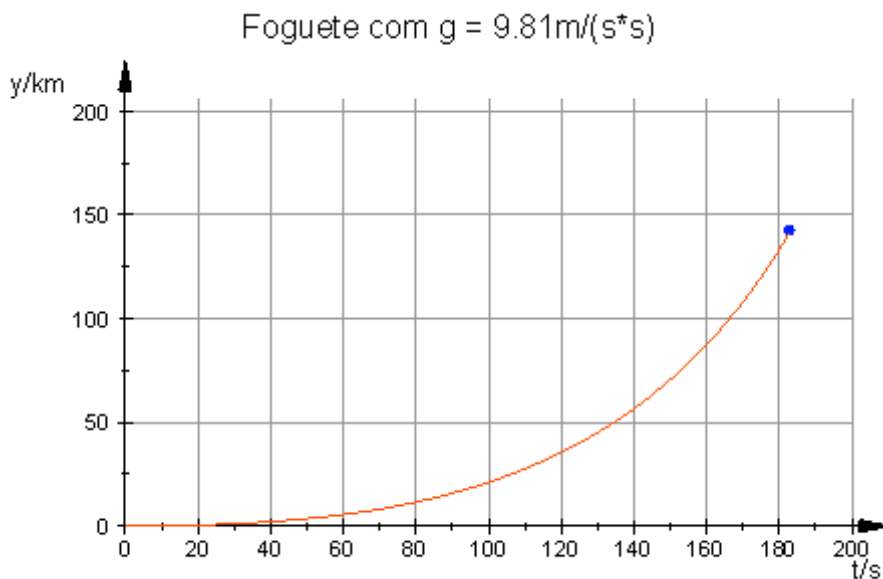


Fig.: 4.1-2

Pelo que acabamos de ver, a velocidade v_r é o parâmetro essencial para definir o ganho de velocidade do foguete. Uma fórmula prática nos permite de calcular um valor aproximado para v_r

$$v_r \approx 0.25 (\text{Temp. dentro da câmara de combustão} / \text{massa molecular})^{1/2}$$

A *Blue Streak* teve uma temperatura de combustão de 3200°C ou seja de 3473 K . A massa molecular relativa das gases ejetadas foi de 31. Assim obtemos para v_r um valor aproximado de $2,65 \text{ km/s}$, o que corresponde bastante bem ao valor experimental de 2490 m/s .

Vemos que a temperatura da câmara de combustão é importante para a potência do motor do foguete. O desenvolvimento de materiais capazes de resistir a temperaturas extremamente altas é o item mais importante na tecnologia corrente de foguetes. O ideal seria uso de fótons num refletor de popa muito possante. Mas ainda falta a tecnologia necessária para realizar tal sonho.

