

## 3.7 Física num carrossel

Fuer Robert zum abermaligen Geburtstag

### 3.7.1 Movimento retilíneo uniforme observado numa plataforma girante.

Na seção 1.1 estudamos um corpo movendo-se sem atrito com velocidade constante em linha reta num sistema inercial. A equação do movimento (1) foi  $x(t) = v \cdot t + x(t_0)$ . Hoje queremos estudar o mesmo movimento, mas, visto num sistema não-inercial, como, por exemplo, sobre um disco grande girante. Para reduzir o atrito a quase zero, utilizamos um puck com ar ou com gás de  $\text{CO}_2$ .

(Isso é um disco perfurado e com gelo de  $\text{CO}_2$  no furo. Existem também pucks que funcionam com ar comprimido, que sai de pequenos furos dentro do disco. No site <http://educar.sc.usp.br/fisica/indice.html> descreve-se outro tipo de "puck".

"El PUCK de mesa de aire es un disco con un agujero pequeño en el centro, con un tubo (A) en la parte superior, a través del cual se inyecta aire de una pequeña bomba (B). De esa forma es creada una camada de aire entre el disco y la superficie, lo que permite minimizar la fricción entre el disco y la superficie.

Existe una fuerza de fricción entre las moléculas de aire y el disco, pero es tan pequeña que puede ser despreciada. En estas condiciones, el movimiento del disco puede ser considerado libre en cualquier dirección de un plano."

Vamos usar tal carrossel para realizar algumas experiências com o puck. Temos, então, um disco circular que gira horizontalmente no plano-x-y com uma velocidade angular  $\omega$  constante em torno do seu eixo-z. Para o vetor  $\omega$  temos, então,  $\omega = \omega \cdot \mathbf{k}$ .

Neste disco girante fixamos um sistema não-inercial (x,y). O movimento do puck será observado por um observador (ou por uma máquina de filmar, fixa num suporte, que gira com o disco no sentido anti-horário).

Para um observador no solo, o puck se move ao longo do eixo-X, fixo no chão.

O observador em  $(x,y)$  faz o puck deslizar com velocidade inicial  $v_0$  sobre o disco girante, partindo do ponto  $(-R,0)$ . O puck vai mover-se com velocidade constante até o ponto  $(R,0)$ . O observador girante pode receber o puck de novo em  $(R,0)$ , se o tempo  $t_{\text{trans}}$  para atravessar o disco for igual a  $T/2$ , sendo  $T$  o período da rotação do disco.

Isso será possível se  $v_0 = 2R/(T/2) = 4R/T$ . Se a velocidade  $v_0$  for menor do que  $4R/T$ , as trajetórias observadas por um observador no sistema girante serão tanto mais complicadas quanto menor a velocidade  $v_0$ .

Vamos analisar as trajetórias para  $v_0 = 4R/(nT)$ , sendo  $n = 1, 2, 3 \dots$

Para a simulação com MuPAD usaremos as equações (1) do parágrafo 3.6.1 pondo  $\varphi = \omega \cdot t$ . Com  $y = 0$ ,  $x = v_0 t - R$  e  $v_0 = 4R/(nT)$  temos

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t) \cdot \cos(\omega t) \\y(t) &= -r(t) \cdot \sin(\omega t), \quad (1)\end{aligned}$$

onde  $r(t) := (4t/(nT) - 1)R$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Escolhemos  $R = 10 \cdot n \cdot T = 12$ , que significa  $t_{\text{trans}} = 6$ .

O seguinte programa mostra a trajetória para  $n = 4$ :

- ```

reset()://disco girante com animação
R:=10: n := 4:
T:=12/n:
w:=2*PI/T:
r:=t->(t/3-1)*R:
x:=t->r(t)*cos(w*t):
y:=t->-r(t)*sin(w*t):
curva:=plot::Curve2d([x(t),y(t)],t=0..tmax,tmax = 0..6):

plot(curva,Scaling=Constrained)

```

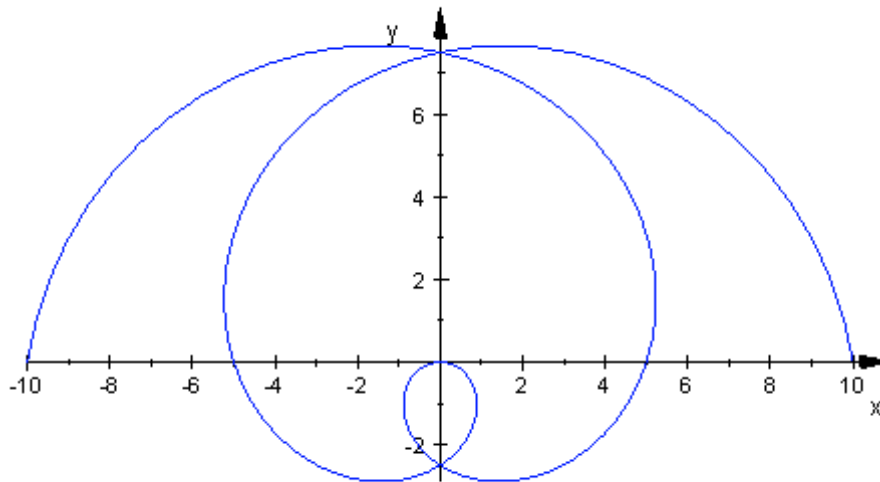


Fig. 3.7-1

Com a função `plot::Scene2d` fazemos gráficos para varios valores de  $n$ , no caso, para  $n = 1, 2, 5$  e  $6$

- `reset() //disco girante, várias curvas`  
`R:=10:`  
`valores_n:=[1,2,5,6]:`  
`T:=12/n:`  
`w:=2*PI/T:`  
`r:=t->(t/3-1)*R:`  
`x:=t->r(t)*cos(w*t):`  
`y:=t->-r(t)*sin(w*t):`  
  
`curvas:=plot::Scene2d(plot::Curve2d(subs([x(t),y(t)],`  
`n=valores_n[i]),Color=RGB::Red,t=0..6))$i=1..4:`  
  
`plot(curvas,Scaling=Constrained)`

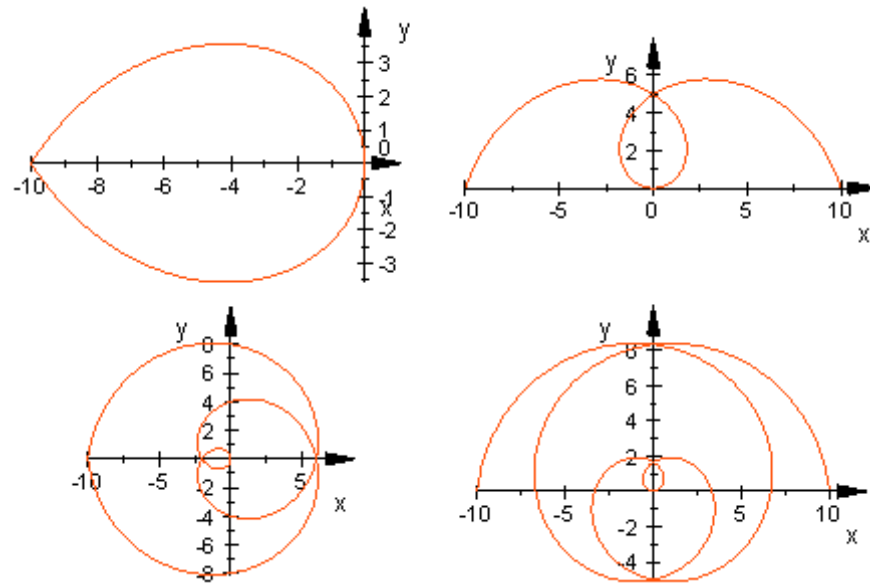


Fig. 3.7-2

Vemos que, para  $n = \text{par}$ , as curvas são abertas e, para  $n = \text{ímpar}$ , fechadas.

Trajatórias parecidas foram fotografadas e publicadas por Steyn-Ross, A.-Ivey, D.G. *Frames of Reference revisited*. Am. J. Phys. **60**, 1069.

### 3.7.2 Com lápis e papel

Neste parágrafo vamos descrever o movimento do puck, partindo da equação geral (6) desenvolvida na seção 3.5.

Vimos que  $\mathbf{a}_{\text{abs}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

Ou seja

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{a}_{\text{abs}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1)$$

No caso do puck sobre o disco girante, não existe interação entre o puck e outros corpos (não há atrito).

Um observador inercial no chão mede para o puck  $\mathbf{v} = \text{constante}$  e, então,  $\mathbf{a}_{\text{abs}} = \mathbf{0}$ .

A aceleração de Coriolis e a aceleração centrífuga são

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_c &= -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} = 2\omega v_y \mathbf{i} - 2\omega v_x \mathbf{j} \\ \mathbf{a}_{\text{cf}} &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega^2 x \mathbf{i} + \omega^2 y \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2)$$

Substituindo estes termos na equação (1), obtemos duas equações escalares

$$a_x = 2\omega v_x + \omega^2 x, \quad a_y = -2\omega v_x + \omega^2 y \quad (3)$$

Estas são as equações (9) que já encontramos em 3.6.3 (não temos escritos os acentos). Queremos, agora, encontrar a solução deste sistema de equações diferenciais acopladas.

Multiplicamos a segunda equação por  $i$ , e depois somamos as duas equações. Obtemos, desta forma, a seguinte equação diferencial ordinária, linear e homogênea de segunda ordem:

$$d^2z/dt^2 + 2\omega dz/dt - \omega^2 z = 0 \quad (4)$$

(Se uma ED tem apenas uma variável independente, então ela é uma *equação diferencial ordinária*, EDO. A ordem de uma ED é a mais alta ordem de derivação que aparece na equação. Uma EDO é dita *linear* se a função e suas derivadas aparecem linearmente na equação.  $d^2z/dt^2 + 2\omega dz/dt - \omega^2 z^2 = 0$  não seria linear. Uma *solução* de uma EDO é uma função da variável independente que satisfaz identicamente a equação. Uma ED possui uma família de soluções e não apenas uma. A solução mais geral possível é denominada *solução geral*, enquanto que outra solução é chamada uma *solução particular*. Alertamos que não todas as equações diferenciais possuem soluções.

Obter soluções para equações não lineares é difícil, porém existem algumas equações que mesmo sendo não lineares, podem ser transformadas em equações lineares, por exemplo as equações de Bernoulli e Riccati.)

O melhor que podemos fazer para encontrar uma solução da equação (4), é supor que ela tem a forma  $z = e^{\alpha t}$ . Ao tomar esta substituição, obtemos a seguinte equação *característica* para  $\alpha$ :

$$\alpha^2 + 2\omega\alpha i - \omega^2 = (\alpha + i\omega)^2 = 0 \quad (5)$$

Esta equação tem duas raízes iguais:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

Isso significa que a equação (4) tem duas soluções independentes:

$$z_1(t) = e^{-i\omega t} \quad \text{e} \quad z_2(t) = t \cdot e^{-i\omega t} \quad (6)$$

A solução *geral* de (4) tem a forma

$$z(t) = c_1 \cdot e^{-i\omega t} + c_2 t \cdot e^{-i\omega t} \quad (7)$$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são definidas pelas condições iniciais  $z(0)$  e  $dz/dt |_{t=0}$ :

$$z(0) = x(0) + i y(0) = -R, \text{ ou seja: } c_1 = -R.$$

Derivando (7), obtemos  $dz/dt|_{t=0} = c_2 + \omega R i$ , e comparando com  $v(0) = v_x(0) + v_y(0) \cdot i$ , temos  $c_2 = v_x(0)$  e  $v_y(0) = \omega R$ .

Com estes valores obtemos para a trajetória do puck a seguinte equação:

$$z(t) = (-R + v_x(0) t) \cdot e^{-i\omega t} \quad (8)$$

A equação de Euler nos proporciona a seguinte forma real de (8)

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_x(0) - R) \cos(\omega t) \\ y(t) &= -(v_x(0)t - R) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (9)$$

Com essas duas equações temos encontrado a trajetória do puck no sistema não-inercial (x,y). Se realizarmos a experiência de tal forma que o tempo para cruzar o diâmetro do disco girante fosse um múltiplo inteiro de  $T/2$ , ou seja  $v_x(0) := v_o = 4R/(nT)$ , resultam de novo as equações (1).

Este tratamento do problema do puck mostrou a utilidade dos números complexos na mecânica. Quero acrescentar algumas palavras adicionais sobre as funções complexas.

A equação de Euler  $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$  com  $\varphi := \omega t$  define uma função complexa, onde  $\omega$  é um número real, A função exponencial  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \cdot \sin \omega t$  tem as seguintes propriedades (o asterisco marca o conjugado):

$$(e^{i\omega t})^* = e^{-i\omega t}$$

$$e^{i\omega_1 t} \cdot e^{i\omega_2 t} = e^{i(\omega_1 + \omega_2) t}$$

$$|e^{i\omega t}|^2 = 1$$

$$d/dt(e^{i\omega t}) = i\omega \cdot e^{i\omega t}$$

$$\int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} \cdot e^{i\omega t} + C$$

Podemos definir, em forma geral, uma função complexa  $z(x)$  da variável real  $x$  como sendo uma função da forma

$$z(x) = u(x) + i v(x),$$

onde  $u(x)$  e  $v(x)$  são funções reais ordinárias.

A função complexa  $z(x)$  pode ser derivada e integrada em relação ao argumento real  $x$ . As regras para estas operações são exatamente assim, como se espera:

$$dz/dx = du/dx + i \cdot dv/dx$$

$$\int_a^b z(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

Note, que a derivada de  $z(x)$  é, também, uma função complexa de  $x$ , enquanto a integral definida de  $z(x)$  entre os limites  $a$  e  $b$  é um número complexo. É possível definir uma função complexa  $w(z)$  em relação a uma variável complexa  $z = x + iy$ . As regras para calcular as derivadas e as integrais são análogas às regras do caso real.