3 Movimentos com vínculos

Se obrigarmos um corpo de mover-se ao longo de uma trajetória (curva) fixa (por exemplo, ao longo de uma montanha-russa, ou preso à extremidade de uma haste fina que obriga o corpo de se mover em um círculo vertical), então dizemos que o corpo está fazendo um movimento restringido ou vinculado.

Se o corpo é forçado de mover-se ao longo de uma curva fixa no espaço basta dizer um parâmetro, p. ex. a sua distância *s* de certo ponto fixo, para localizar o corpo. Diz-se que o corpo tem um único grau de liberdade. Um pêndulo ou um ponteiro de relógio de parede são sistemas com um único grau de liberdade, pois dando um ângulo só é suficiente para saber, onde o objeto se encontra.

Para descrever a posição dum objeto sobre uma *superfície*, são suficientes dois coordenadas, por exemplo, os dois parâmetros de superfície de Gauss.

As forças que são responsáveis para os vínculos são chamadas de forças de vínculo, $\mathbf{F_v}$. Elas têm sempre o valor adequado para que a aceleração **a** do corpo seja compatível com o vínculo dado.

No caso de um pêndulo simples (ideal), chamamos a força de vínculo de **T** (tensão no fio). Uma propriedade fundamental das forças de vínculo é o fato de estar sempre perpendicular à superfície de vínculo. Pois, se não for assim, elas poderiam fazer mover o corpo ligado sem a presença de uma força externa, coisa que nunca foi observada.

Uma conseqüência deste fato notável é que uma força de vínculo não pode realizar trabalho. Mais adiante volveremos sobre este ponto.

No caso de vínculos, a Segunda lei de Newton permite escrever

$$\mathbf{F} + \mathbf{F_z} = m\,\mathbf{a} \qquad (3.1\text{-}1)$$

onde **F** é a soma das forças de interação com outros corpos e $\mathbf{F_z}$ é a resultante de todas as forças de vínculo.

3.1 O plano inclinado

Na figura (3.1-1), dois blocos estão ligados por um fio que passa por uma polia (roldana) ideal sem massa e atrito.

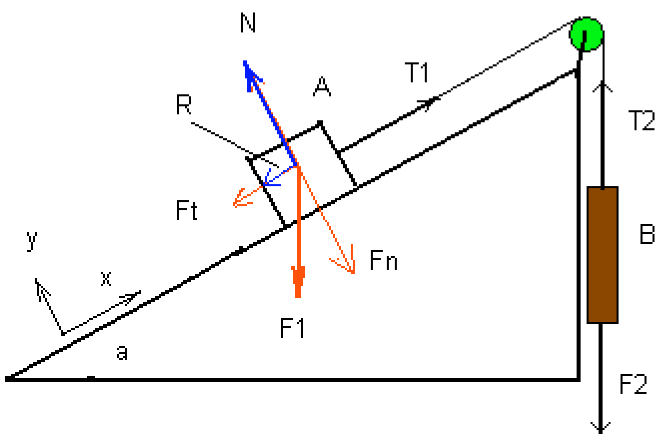

Fig. 3.1-1

A massa do bloco A é m_1, e o coeficiente de atrito cinético entre A e o plano inclinado é de $\mu = 0.5$. O ângulo de inclinação da rampa é igual a 30^o. $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 3.5$ kg.

Queremos descrever o movimento do corpo A que está em interação com três corpos: a Terra, a rampa e um fio.

Suponhamos que o bloco A está subindo pela rampa.

É prático de decompor a força do plano sobre o corpo A nas suas componentes **R** e **N** segundo os eixos x e y (o movimento do bloco terá a direção e sentido de **i**). Durante o movimento, o plano exerce a força de atrito cinético constante **R** sobre o bloco. Se não tiver atrito, a força que o plano faz sobre o bloco seria normal àquele. Como existe atrito entre o bloco e a rampa, o deslizamento faz aumentar a energia térmica do bloco e da rampa. (μ é o coeficiente de atrito cinético entre corpo e o plano, cuja definição você aprendeu no secundário.) A experiência mostra a validade da seguinte expressão

$$\mathbf{R} = -\mu \, N \, \mathbf{v}^o \qquad (3.1\text{-}2)$$

A força de atrito é paralela à superfície e está orientada de modo a se opor ao movimento. $\mathbf{v}^o$ é o vetor unitário da velocidade. O vetor **N** tem o sentido do vetor unitário **j** do eixo y. $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ são as tensões nos fios. $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ são iguais em módulo, T. (Pois, podemos aplicar a terceira lei de Newton e podemos considerar a massa dos fios desprezíveis.) $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são os pesos das massas m_1 e m_2 respectivamente. $\mathbf{F}_n$ e $\mathbf{F}_t$ são as componentes de $\mathbf{F}_1$ segundo os eixos x e y.

Escrevamos a equação (3.1-1) na seguinte forma:

$$\mathbf{R} + \mathbf{N} + \mathbf{F_1} + \mathbf{T_1} = m\,\mathbf{a} \qquad (3.1\text{-}3)$$

A decomposição nas componentes ortogonais dá

$$-\mu\, N\, \mathbf{i} + N\, \mathbf{j} + T\, \mathbf{i} - m_1 g \text{ sen } \alpha\, \mathbf{i} - m_1 g \cos \alpha\, \mathbf{j} = m\, a_x\, \mathbf{i} + m\, 0\, \mathbf{j} \qquad (3.1\text{-}4)$$

o que é equivalente a duas equações escalares

$$-\mu\, N + T - m_1 g \text{ sen } \alpha = m_1\, a_x \qquad (3.1\text{-}5)$$

$$N = m_1\, g \cos \alpha \qquad (3.1\text{-}6)$$

A equação (3.1-5) é a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo x, a (3.1-6) é a segunda lei para as componentes ao longo do eixo y.

Sobre a massa m_2 do corpo B atuam as duas forças $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{T}_2$. O vetor unitário **k** seja dirigido para cima o que significa para o corpo B a seguinte decomposição das forças

$$-m_2\, g\, \mathbf{k} + T\, \mathbf{k} = -\, m_2\, a_x\, \mathbf{k} \qquad (3.1\text{-}7)$$

Resolvamos esta equação para T e em seguida substituimos essa expressão, junto com N da equação (3.1-6), na equação (3.1-5), para obtermos:

$$a_x = g(m_2 - m_1(\mu \cos \alpha + \text{sen } \alpha))/(m_1 + m_2) \qquad (3.1\text{-}8)$$

Se o cálculo numérico der para a_x um valor positivo, então foi correta a nossa suposição sobre a direção do movimento do corpo A. Se o valor de a_x for negativo, teremos de fazer um novo cálculo, tomando a direção do movimento na direção oposta (o sentido da força do atrito será, então, para cima).

Com os valores númericos que acompanham a figura, obtemos para a_x o valor positivo de 1.058 m/s^2. Da (3.1-8) vemos que só para $m_2 > m_1(\mu \cos \alpha + \text{sen } \alpha)$ o corpo A se moverá para cima, o seja para $m_2 > 0{,}933\cdot m_1$.
A força do vínculo tem módulo N = 25,5 Newton, e T = 30,6 Newton.

As equações (3.1-5), (3.1-6) formam um sistema de 2 equações nas incógnitas T, N e a_x. Para resolvê-lo, precisamos de uma terceira equação, precisamente da equação (3.1-7). Nos resolvemos este sistema por meio de uma substituição.

O MuPAD oferece para tal caso a função `linsolve`, cuja aplicação vou mostrar em seguida, na seguinte seção 3.1.1.

3.1.1 Solução com MuPAD

- ```
  reset():
  sol:=linsolve({-mu*N+T-m1*g*sin(a)=m1*ax,
  N=m1*g*cos(a),-m2*g+T=-m2*ax},{N,T,ax}):
  ```
- ```
  op(sol[1])
  ```

$N,\ g \cdot \mathrm{m1} \cdot \cos(a)$

- ```
  op(sol[2])
  ```

$T,\ \dfrac{g \cdot \mathrm{m1} \cdot \mathrm{m2} + g \cdot \mathrm{m1} \cdot \mathrm{m2} \cdot \sin(a) + g \cdot \mathrm{m1} \cdot \mathrm{m2} \cdot \mathrm{mu} \cdot \cos(a)}{\mathrm{m1} + \mathrm{m2}}$

- ```
  op(sol[3])
  ```

$\mathrm{ax},\ -\dfrac{g \cdot \mathrm{m1} \cdot \sin(a) - g \cdot \mathrm{m2} + g \cdot \mathrm{m1} \cdot \mathrm{mu} \cdot \cos(a)}{\mathrm{m1} + \mathrm{m2}}$

- ```
  float(subs(sol[1],g=9.81,m1=3,m2=3.5,mu=0.5,a=30*PI
  /180))
  ```

$N = 25.48712763$

- ```
  float(subs(sol[2],g=9.81,m1=3,m2=3.5,mu=0.5,a=30*PI
  /180))
  ```

$T = 30.63230359$

- ```
  float(subs(sol[3],g=9.81,m1=3,m2=3.5,mu=0.5,a=30*PI
  /180))
  ```

$\mathrm{ax} = 1.057913259$
  ```

As funções **simplify,expand,factor** etc. se aplicam sobre "sol", por exemplo:

- **simplify(sol[3])**

$$ax = -\frac{g \cdot m1 \cdot \sin(a) - g \cdot m2 + g \cdot m1 \cdot mu \cdot \cos(a)}{m1 + m2}$$