

2.5 Aplicações das Leis de Newton

2.5.1 Trajetória de uma bola de tênis que gira

A resistência do ar facilmente pode competir com o peso dos objetos lançados nele, por exemplo, no caso de uma bola de tênis, golfe ou beisebol. As velocidades são, às vezes, tão grandes que se deve tomar a força de atrito do ar proporcional ao quadrado da velocidade, ou seja

$$F_r = \frac{1}{2} C A \rho v^2 \quad (2.5-1)$$

compare com a (2.4-2). ρ = densidade do ar.

As equações a resolver são

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_r \cos \alpha = -F_r \frac{v_y}{v} \quad (2.5-2)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg - F_r \sin \alpha = -mg - F_r \frac{v_x}{v}$$

Para uma bola de beisebol, o coeficiente de arraste é cerca de $C=0.3$.

A velocidade inicial do beisebol pode alcançar 50 m/s^2 . Jogadores experientes sabem dar à bola um giro (efeito da bola) para produzir uma força adicional para cima (empuxo) devido ao efeito de Magnus, veja mais adiante onde falamos disso. Este tipo de empuxo chama-se de "lift" ou força de sustentação, puxando a bola para cima.

O sistema (2.5-2) não tem solução analítica, pois trata-se de dois equações diferenciais, dita de "segunda ordem", acopladas por meio da velocidade v . Para resolvê-lo numericamente, fazemos, utilizando (2.5-1), uma pequena transformação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -rvv_x = -r\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - rvv_y = -g - r\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y \quad (2.5-3)$$

O coeficiente de atrito, r , é dado por $r := C \rho A / (2 m)$

Para incluir também a força de sustentação, utilizamos uma expressão de forma análoga à (2.5-1) com um coeficiente C_L de lift:

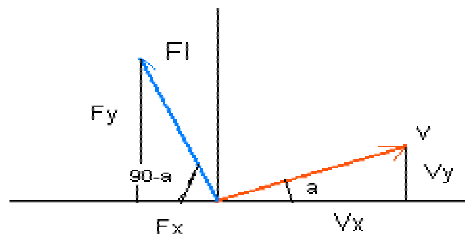
$$F_L = C_L \rho A v^2 / 2 \quad (2.5-4)$$

Os coeficientes C e C_L dependem da velocidade v , da revolução da bola, e do material da superfície dela.

Em geral, temos de determinar tais coeficientes experimentalmente.

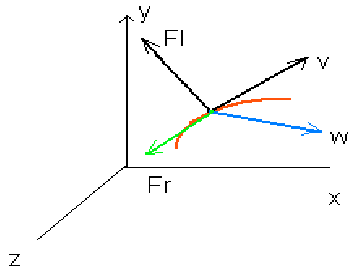
A força F_L está perpendicular ao vetor da velocidade (e ao eixo de rotação da bola). Suas duas componentes são dadas por

$$F_{Lx} / F_L = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha = v_y/v \quad \text{e} \quad F_{Ly} / F_L = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha = v_x/v$$



Usando estas equações, junto com alguns valores numéricos, podemos escrever um programa para MuPAD, usando a função **`numeric::odesolve2`**

Fig. 2.5- 1



O vetor F_L da força de sustentação está perpendicular ao vetor v da velocidade e ao eixo de rotação da bola. No nosso cálculo fica v no plano-xy e w mostra na direção do eixo z.

Fig. 2.5-2

O seguinte programa mostra uma animação com dois diferentes valores do coeficiente de atrito (primeiramente escolhemos $C_L = 0$).

Para poder representar duas curvas simultaneamente, é preciso escrever o sistema (2.5-3) duas vezes. Os módulos para a solução numérica são chamados de IVP1 e IVP2. IVP = Initial Value Problem (problema de condições iniciais) -o nome poderia ser outro! Cada módulo obtém os seus valores de C e C_L . Parâmetros que servem para os dois módulos ficam no começo do programa.

O vetor Y em $Y := \text{numeric}::\text{odesolve2}(\text{ivp})$ vai conter as soluções, a saber: $Y(t)[1] = x(t)$, $Y(t)[2] = y(t)$, $Y(t)[3] = x'(t)$ e $Y(t)[4] = y'(t)$. Sempre devemos respeitar a ordem das funções na lista "fields".

No gráfico conectamos, no instante t , o ponto $(x(t-dt), y(t-dt))$ com o ponto seguinte, $(x(t), y(t))$ por uma pequena linha. O incremento no tempo, dt , e o número máximo de pontos a usar temos na linha $dt:=0.05:imax1:=120:imax2:=100$:A quantidade de pontos pode ser diferente para as diferentes curvas. Você deve brincar com os parâmetros, para ver os efeitos resultantes. Este programa vai servir-nos em muitas situações, por exemplo também no estudo dos movimentos das planetas.

Se você tira a linha $VisibleAfter = t$, então vai ver as curvas traçadas sem animação, o seja, as bolas não vão mover-se, que tristeza!

Para informar-se sobre as diferentes funções, não hesite em usar "? função"!

Note que $(x(t-dt), y(t-dt)) = (Y(t-dt)[1], Y(t-dt)[2])$; $(x(t), y(t)) = (Y(t)[1], Y(t)[2])$:

```
plot::Line2d([Y(t - dt) [1], Y(t - dt) [2]], [Y(t) [1], Y(t) [2]])
```

```

• reset():
g:=9.81: rho:=1.29://densidad do ar
R:=0.0037: m:=0.15://raio e massa da bola
r1:=rho*R^2*PI/(2*m):
a:=60*PI/180://a = ângulo do lançamento (60°)
x0:=0:y0:=0://posição inicial
v0:=45://velocidad inicial m/s
vx0:=v0*cos(a)// coordenada-x de v0
vy0:=v0*sin(a):
//Sistema das equações diferenciais com valores
iniciais
c:=0.3:cl:=0.0:
IVP1:={x'(t)=-
r1*sqrt(x'(t)^2+y'(t)^2)*(c*x'(t)+cl*y'(t)),
      y'(t)=-g+r1*sqrt(x'(t)^2+y'(t)^2)*(cl*x'(t)-
c*y'(t)),
x(0)=x0,x'(0)=vx0,
y(0)=y0,y'(0)=vy0}:
fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp1:=numeric::ode2vectorfield(IVP1, fields):
Y1 := numeric::odesolve2(ivp1): Y1(6.535);

[96.53464527, 0.02593486059, 9.81384723, -
27.49023508]

c:=0.5:cl:=0.0:

```

```

IVP2:={x'(t)=-
r1*sqrt(x'(t)^2+y'(t)^2)*(c*x'(t)+c1*y'(t)),
  y'(t)=-g+r1*sqrt(x'(t)^2+y'(t)^2)*(c1*x'(t)-
c*y'(t)),
x(0)=x0,x'(0)=vx0,
y(0)=y0,y'(0)=vy0}:
//lista das soluções, chamada de "fields"
fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp2:=numeric::ode2vectorfield(IVP2, fields):
Y2 := numeric::odesolve2(ivp2): Y2(6.00588);

[75.9061706, -0.0001408615829, 7.23749789, -
23.97649682]

```

- //Animation

```

dt:=0.05:imax1:=200:imax2:=180:
plot(
plot::Point2d(Y1(t)[1], Y1(t)[2],
Color = RGB::Blue,
VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm
) $ t in [i*dt $ i = 0..imax1],
plot::Point2d(Y2(t)[1], Y2(t)[2],
Color = RGB::Green,
VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm
) $ t in [i*dt $ i = 0..imax2],

```

```

plot::Line2d([Y1(t - dt)[1], Y1(t - dt)[2]],
[Y1(t)[1], Y1(t)[2]], Color = RGB::Red,
VisibleAfter = t)
$ t in [i*dt $ i = 1..imax1],
plot::Line2d([Y2(t - dt)[1], Y2(t - dt)[2]],
[Y2(t)[1], Y2(t)[2]], Color = RGB::Blue,
VisibleAfter = t)
$ t in [i*dt $ i = 1..imax2]):

```

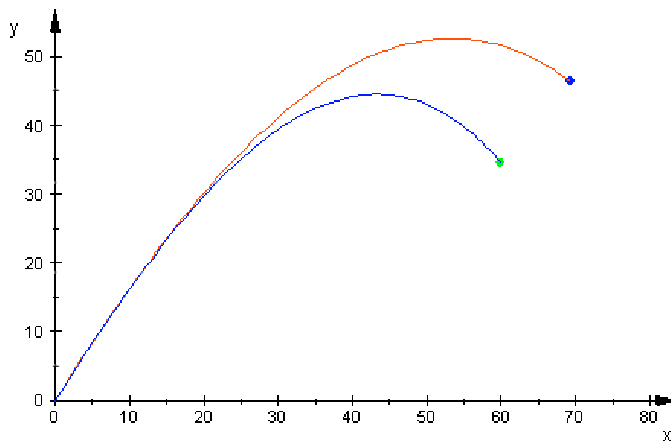


Fig. 2.5-3

A curva superior tem $C = 0,3$, a inferior $C = 0,5$. O coeficiente de lift é 0; ângulo = 60° , $v_0 = 45$ m/s, $R = 0.037$ m (Baseball), $m = 0.15$ kg. Para $t = 6.00588$ s obtemos uma distância máxima de 75,9062 m ($C = 0,5$). A altura neste momento é -0.0001408 m, o seja a bola acaba de tocar o solo. A altura máxima da trajetória é de 44,5 m. Com $C = 0.3$ m obtemos $x_{\max} = 96.5$ m e uma altura máxima de 52,7 m.

Para ver o efeito da força de sustentação, escolhemos $C = 0.3$ e dois valores para C_L , a saber $C_L = 0.8$ e $C_L = 1.0$. Além disso: $v_0 = 60$ m/s, $a = 10^\circ$, $R = 0.041$ m e $m = 0.15$ kg.

A seguinte figura mostra que estes valores para o "spin" são bastante exagerados, mas eles dão trajetórias além de interessantes.

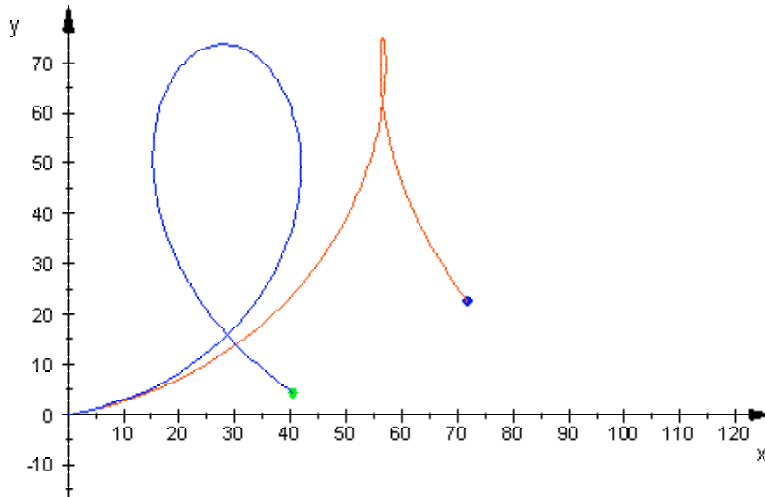


Fig. 2.5-4

2.5.2 Uma bola de tênis e um avião

Suponhamos, que uma bola se está movendo no plano-xy da esquerda à direita. Uma camada fina de ar próxima a uma bola que gira, gira junto com ela. Se a bola gira no sentido anti-horário, o ar se move mais rápido no topo da bola, o seja a pressão no topo é menor do que a pressão na parte de baixo dela, e existe uma força resultante para cima sobre a bola. (Regra: Maior velocidade, menor pressão. As linhas de força são mais densas no topo da bola do que na parte inferior dela.) Essa é a chamada força de Magnus. Gustav Magnus, físico alemão, investigava em 1835 a força de empuxo, que acabamos de descrever, e dava uma explicação do seu origem, até agora válida.

O perfil da asa de um avião é desenhado de tal modo que a velocidade do ar seja maior na superfície superior da asa do que na inferior, o que produz uma pressão maior na parte inferior do que na superior. Isso ocasiona uma força resultante para cima.

Quando a velocidade do avião cai abaixo de certa velocidade crítica, a asa perde todo o empuxo e o avião despenca. Um bom piloto sabe, eventualmente, fazer uma manobra apropriada para reativar a força de sustentação.

O "único" que o piloto deve fazer, é restabelecer a diferença de pressão entre topo e parte inferior das alas.

Já no ano 1910 dizia J.J. Thomson (The dynamics of a golfball. *Nature* 85, 1910, p. 2151-2157): *The spinning golfball is, in fact, a very efficient heavier-than-air flying machine; the lifting force may be many times the weight of the ball.*

"J.J." utilizou para suas demonstrações a força F_L de Lorentz sobre elétrons em movimento num campo eletromagnético. As trajetórias que se deixam produzir são mais exóticas dos que podemos ver numa cancha de tênis.