2.4 Aplicações das Leis de Newton

2.4.1 Queda de uma esfera através de um fluido

Quando uma esfera de raio R cai com velocidade **v** através de um fluido de densidade ρ , então ela sofre uma força de empuxo exercida pelo fluido. Esta força de Arquimedes é dada por

$$\mathbf{F_a} = - m_{fl}\, g = - 4/3 \cdot R^3 \pi\, \rho\, g\, \mathbf{j} \qquad (2.4\text{-}1)$$

onde **j** é um vetor unitário mostrando para baixo.

A segunda componente da força que o fluido exerce sobre a esfera é a força de atrito do fluido

$$\bar{\mathbf{F}}_r = -C \cdot \frac{A\rho_{fl}}{2} \cdot v|\bar{v}|\hat{v} \qquad (2.4\text{-}2)$$

Escrevemos v |**v**| em vez de v^2, porque $\mathbf{F}_r$ é sempre de sentido oposto ao vetor de velocidade **v**.

A = área frontal do corpo (esfera: $R^2 \pi$).
A é a área de seção do corpo no plano perpendicular à sua velocidade **v**.

C = coeficiente de arraste (é determinado experimentalmente). Nas indústrias automobilística e aeronáutica fala-se também do coeficiente de penetração aerodinámica.

A esfera pode atingir (se a distância de queda for suficientemente grande) uma velocidade-limite constante (velocidade terminal v_e). Este caso ocorre quando a aceleração se torna zero.

As três forças $\mathbf{F}_g$ = m **g**, $\mathbf{F}_a$ e $\mathbf{F}_r$ que atuam no corpo cumprem com a Segunda lei de Newton: $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r = m\,\mathbf{a}$.

De esta última equação obtemos a seguinte equação escalar:

$$m\,g - m_{fl}\,g - 1/2 \cdot C\,\rho\,R^2\,\pi\,v^2 = m\,a \qquad (2.4\text{-}3)$$

Para simplificar a escrita introduziremos as abreviações a seguir:

$$u := 1 - \rho/\rho_c \quad \text{e} \quad v_1^2 = 8\,R\,g\,\rho_c\,/\,(3\,C\,\rho)\,,$$

onde ρ_c é a densidade do corpo. Com essas simplificações obtemos a seguinte equação diferencial -de aspecto inocente- para a aceleração a:

$$a = g(u - (v\,/\,v_1)^2) \qquad (2.4\text{-}4)$$

Com a condição a = 0 achamos para a velocidade terminal o valor

$$v_e^2 = v_1^2 \cdot u = 8/3 \cdot gR/C \cdot (\rho_c - \rho)/\,\rho \qquad (2.4\text{-}5)$$

Também será útil introduzir $x := g\cdot u/\,v_e = g\cdot u^{1/2}\,/\,v_1$. Esperemos que o MuPAD nós possa ajudar com a equação diferencial (2.4-4):

```
• reset():
  assume(u>0,v1>0):
  vel:=ode({v'(t)=g*(u-v(t)^2/v1^2), v(0)=0},v(t)):
  velocidade:=solve(vel):
  simplify(velocidade):
  subs(%,sqrt(1/v1^2)=sqrt(u)/ve)
```

```
{ 1/2 / / 2 g t u \ \ }
{ u | exp| ------- | - 1 | }
{ \ \ ve / / }
{ -------------------------------- }
{ / / 2 g t u \ \ / 1 \1/2 }
{ | exp| ------- | + 1 | | --- | }
{ \ \ ve / / | 2 | }
{ \ v1 / }
```

Enquanto este resultado tem uma aparência ligeiramente assustadora, obtemos com a função **expand** um resultado bem mais nítido:

- **expand(%)**

$$\left\{ \frac{\sqrt{u}\cdot\left(e^{\frac{2\cdot g\cdot t\cdot u}{ve}}-1\right)}{\left(e^{\frac{2\cdot g\cdot t\cdot u}{ve}}+1\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{v1^2}}} \right\}$$

Aqui usamos nossas abreviações $v_e = v_1 \cdot u^{1/2}$ e $x := g \cdot u / v_e = g \cdot u^{1/2} / v_1$. Obtemos então

$$v = v_e \cdot \frac{e^{2xt}-1}{e^{2xt}+1} \qquad (2.4\text{-}6)$$

Agora vamos dividir esta expressao por e^{xt} para obter

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e \cdot \frac{e^{xt} - e^{-xt}}{e^{xt} + e^{-xt}} \qquad (2.4\text{-}7)$$

Esta forma já é aceitável, mas há quem prefere a forma com uma função hiperbólica

$$\mathbf{v = v_e \cdot tgh(x \cdot t)} \qquad (2.4\text{-}8)$$

A funçaõ **tgh** (*tangente hiperbólica*) é definida pela razão entre o senh e cosh onde

senh $x := (e^x - e^{-x}) / 2$ e cosh $x := (e^x + e^{-x})/2$.

Exemplo: Vamos introduzir valores numéricos:

Uma esfera de raio R = 4 mm cai com velocidade inicial 0 através de agua, que tem uma densidade de ρ = 1000 kg/m^3. A densidade da esfera é de ρ_c = 7800 kg/m^3. Para C escolhemos um valor de 0.4 e g = 9.81 m/s^2.

- `expand(%)`

$$\left\{\frac{\sqrt{u}\cdot\left(e^{\frac{2\cdot g\cdot t\cdot u}{ve}}-1\right)}{\left(e^{\frac{2\cdot g\cdot t\cdot u}{ve}}+1\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{v1^2}}}\right\}$$

- `subs(%,u=0.871794872, g=9.81*m/s^2,t=0.25*s,v1=1.428453709*m/s,ve=1.3337466*m/s)`

$$\left\{\frac{0.933699562\cdot\left(e^{3.206121648}-1\right)}{\left(e^{3.206121648}+1\right)\cdot\sqrt{\frac{0.4900807656\cdot s^2}{m^2}}}\right\}$$

- `float(%[1])`

$$\frac{0.8609905038}{\sqrt{\frac{0.4900807656\cdot s^2}{m^2}}}$$

- `simplify(%)`

$$\frac{1.229885079}{\sqrt{\frac{s^2}{m^2}}}$$

Parece que MuPAD precisa ajuda, pois não quer calcular a raiz.
A velocidade da esfera depois de 0.25 s é de 1.22988 m/s.

A fórmula (2.4-8) proporciona um valor idêntico:

- ```
  v := ve * tanh(g*u*t/ve);
  subs(v,u=0.871794872,
  g=9.81*m/s^2,t=0.25*s,v1=1.428453709*m/s,ve=1.33374
  66*m/s);
  float(%)
  ```
  ```

$$ve \cdot \tanh\left(\frac{g \cdot t \cdot u}{ve}\right)$$

$$\frac{1.3337466 \cdot \tanh(1.603060824) \cdot m}{s}$$

$$\frac{1.229885076 \cdot m}{s}$$

Para a distância percorrida fazemos o seguinte cálculo:

- **reset():**

  assume(x>0,ve>0):

  alt:=ode({y'(t)=ve*((exp(2*x*t)-1)/(exp(2*x*t)+1)), y(0)=0},y(t)):

  altura:=solve(alt);

```
{                      2                          }
{  ve ln(exp(t x)  + 1)    ve ln(2)               }
{  -------------------- - -------- - t ve         }
{           x                x                    }
```

- **expand(%)**

$$\left\{\frac{ve \cdot \ln((e^{t \cdot x})^2 + 1)}{x} - \frac{\ln(2) \cdot ve}{x} - t \cdot ve\right\}$$

- **simplify(%[1])**

$$-\frac{ve\cdot\left(\ln(2)-\ln\left(e^{2\cdot t\cdot x}+1\right)+t\cdot x\right)}{x}$$

- **eval(subs(%,u=0.871794872,g=9.81,ve=1.3337466,t=0.25,x=g*u/ve))**

0.1975226069

Vale a pena de reescrever a solução $-\frac{ve\cdot\left(\ln(2)-\ln\left(e^{2\cdot t\cdot x}+1\right)+t\cdot x\right)}{x}$ da seguinte maneira: - ve · ln (2/(e^{2xt}+1)· e^{xt}) /x = - ve· ln(1/cosh(xt)) /x = ve$^{2\cdot}$ ln(cosh(xt))/(gu).
Então a distância caída será

$$y = v_e^{\,2}\ln(\cosh(\frac{gu}{v_e}\cdot t))/(g\cdot u) \tag{2.4-9}$$

O cálculo com MuPAD nos dá o resultado já conhecido :

```
g:=9.81*m/s^2:u:=0.871794872:
ve:=1.3337466*m/s:t:=0.25*s:
y:=ve^2*ln(cosh(u*g*t/ve))/(g*u);
```

$0.1975226069\cdot m$

Depois de 0.25 segundos, a esfera caiu 0.1975 m através da água sem alcançar a velocidade terminal v_e = 1.3337466 m/s, pois sua velocidade é só 1.22989 m/s. O seguinte programa mostra que e esfera deve cair, pelo menos, meio metro para atingir a velocidade final.

```
reset():
esfera:=proc(t0,passos)
local t,y,v,tabela;
```

```
begin
g:=9.81:
u:=0.871794872:
ve:= 1.3337466:
x:=u*g/ve:
DIGITS:=6:
t:=t0:
tabela:=array(0..passos, 1..3):
for t from 0 to passos do
v:=float(ve*tanh(x*t/10)):
y:=float(ve^2*ln(cosh(x*t/10))/(g*u)):
tabela[t,1]:=float(t/10):
tabela[t,2]:=v:
tabela[t,3]:=y:
end_for:
return(tabela)
end_proc:
esfera(0,5)
```

t	v	y
0.0,	0.0,	0.0
0.1,	0.754544,	0.0401171
0.2,	1.1432,	0.13799
0.3,	1.27802,	0.260341
0.4,	1.31805,	0.390551
0.5,	1.32938,	0.52304

No programa anterior, usando um array, não foi possível mudar o incremento do valor "default" 1 a outro valor, foi por isso que dividimos os expoentes por 10. Se se usa, porém, um simples "print", pode-se variar o incremento (o "stepwidth") a 0.1 como vemos no seguinte programa.

```
• reset():
esfera:=proc(t0,passos)
local t,y,v;
begin
g:=9.81:
u:=0.871794872:
ve:= 1.3337466:
x:=u*g/ve:
DIGITS:=6:
t:=t0:
print("t "," y "," v "):
for t from t0 to passos step 0.1 do
v:=float(ve*tanh(x*t)):
y:=float(ve^2*ln(cosh(x*t))/(g*u)):
print(t,y,v):
end_for:
end_proc:
esfera(0,1)
```

```
"t ", " y ", " v "
0, 0.0, 0.0
0.1, 0.0401171, 0.754544
0.2, 0.13799, 1.1432
0.3, 0.260341, 1.27802
0.4, 0.390551, 1.31805
0.5, 0.52304, 1.32938
0.6, 0.656168, 1.33253
0.7, 0.789474, 1.33341
0.8, 0.92283, 1.33365
0.9, 1.0562, 1.33372
1.0, 1.18957, 1.33374
```

Ao especificar o "looping" é necessário identificar um ponto inicial, t0, um ponto final, passos (= número de repetições), e uma variável de controle (step 0.1). (Em DELPHI o laço **for ..to** é menos flexível do que em outras linguagens no sentido de não ser possível especificar um incremento diferente de um. Há porém, como vimos, quase sempre um artifício com o qual podemos contornar a ausência de um incremento diferente de um no comando **for .. do**.)

2.4.2 Com lápis e papel

Vamos, agora, integrar a equação (2.4-4): $a = g(u-(v/v1)^2)$ sem fazer uso do computador. Para simplificar o cálculo, utilizaremos mais alguns abreviações, a saber:

$$k := 1/2 \cdot C\, \rho\, \pi\, R^2\,, \quad r := k/m$$

Assim obtemos $v_1^2 = g / r$ e a equação (2.4-4): $a = g(u-(v/ v1)^2)$ torna-se

$$a = r\,(v_e^2 - v^2) \qquad (2.4\text{-}10)$$

Separando as variaveis, obtemos (veja também abaixo)

$$\int r\,dt = \frac{1}{2v_e}\int\left(\frac{1}{v_e+v}+\frac{1}{v_e-v}\right)dv$$

Integrando, temos:

$$rt = \frac{1}{2v_e}\left[\ln\left|\frac{v_e+v}{v_e-v}\right| - \ln C_0\right] = \frac{1}{2v_e}\ln\left|\frac{v_e+v}{C_0(v_e-v)}\right|$$

Em seguida obtemos

$$\frac{v_e+v}{v_e-v} = C_0\cdot e^{2v_e rt} \qquad (2.4\text{-}11)$$

Se para $t = 0$ a velocidade é v_0, resulta para a constante de integração o valor

$$C_0 = (v_e + v_0) / (v_e - v_0)$$

Em geral, $v_0 = 0$ e, então, $C_0 = 1$. Se admitimos $v_0 = 0$, a velocidade v pode ser calculada pela (2.4-11):

$$v_e + v = v_e\cdot e^{2v_e rt} - v\cdot e^{2v_e rt}$$

daquí obtemos nossas velhas equações (2.4-6,7,8).

Para integrar a (2.4-8) utilizamos a regra $\int tgh(ax)\,dx = 1/a \cdot \ln(\cosh(ax))$. Sem problemas chegamos outra vez à (2.4-9)

$$y = v_e^2 \ln(\cosh(\frac{gu}{v_e}\cdot t))/(g\cdot u)$$

Para integrar a (2.4-10) tivemos que fazer uma redução em *frações parciais*. Caso você precisar ajuda nessa matéria, pode apoiar-se sobre MuPAD, pois aqui há uma função denominada `partfrac` que resolve tais problemas:

- **partfrac(1/(ve^2 - v^2),v)//frações parciais**

$$\frac{1}{2\cdot ve\cdot(v+ve)}-\frac{1}{2\cdot ve\cdot(v-ve)}$$

- **int(%,v)// integração**

$$\frac{\ln(v+ve)}{2\cdot ve}-\frac{\ln(v-ve)}{2\cdot ve}$$

- **simplify(subs(%,ln(v-ve)-ln(v+ve)=ln((v-ve)/(v+ve)))**

$$-\frac{\ln\left(\frac{v-ve}{v+ve}\right)}{2\cdot ve}$$

2.4.3 A lei de Stokes (1851)

O coeficiente de arraste de um corpo C depende do fluido, da velocidade e da forma do corpo. Estes fatores estão reunidos numa famosa relação que é chamado de *número de Reynolds*. Este número é definido por

$$R_e = \rho\, Lv/\, \eta \qquad (2.4\text{-}12)$$

ρ é a densidade do fluido e L é uma dimensão típica para o corpo. L seria o diâmetro D ao tratar-se de uma esfera ou de um tubo capilar. R_e é adimensional.

O parâmetro η é a viscosidade do fluido. A viscosidade é uma grandeza com dimensão de força vezes tempo dividido por área. No SI a sua unidade é N· s/ m^2. Uma outra unidade muito usada é o *centipoise*, definido por **1 cP = 10^{-3} Ns/m^2.** Dez "Poises", 10 P, são 1 Ns/m^2. O valor de η para água de 20° C é 1cP = 0.01P = 0.001 Ns/m^2 . Glicerina (20°C): η = 1.5 Ns/m^2 = 1500 cP = 15 P.

A dependência de C de R_e é muito complicada. Quero mencionar somente dois intervalos para R_e com os valores de C correspondentes:

para $0 < R_e < 1$ pode-se tomar $C=24/R_e$
para $400 < R_e < 3\cdot 10^5$ o valor de C é 0.5.

A viscosidade podemos definir pela lei de Stokes, que dá a força de atrito para esferas que estão movendo-se a baixa velocidade através de um fluido. Para $R_e < 1$ podemos substituir a (2.4-2), que é uma lei quadrada em v, por uma lei linear em v:

$$\vec{F}_r = -6\pi\eta\left|\vec{v}\right|R\hat{v} \qquad (2.4\text{-}13)$$

(**j** mostra para baixo.) Da $\mathbf{F_a} + \mathbf{F_r} + \mathbf{F_g} = m\,\mathbf{a}$ (Newton II) obtemos

- $-4/3\cdot R^3 \pi \rho g - 6 \pi \eta v R + 4/3\cdot R^3 \pi \rho_c g = m a$ (2.4-14)

Quando o movimento se torna uniforme, isto é, quando $a = 0$ e $v = v_e$, temos

$$6 \pi \eta v_e R = 4 R^3 \pi g (\rho_c - \rho)/3$$

Extraindo η, obtemos com a seguinte equação uma possibilidade para a medição da viscosidade

$$\eta = \frac{2}{9}\cdot\frac{R^2 g}{v_e}(\rho_c - \rho) \qquad (2.4\text{-}15)$$

No caso particular em que $\rho \ll \rho_c$, tem-se para a velocidade-terminal

$$v_e \approx \frac{2}{9}\cdot\frac{R^2 g}{\eta}\cdot\rho_c \qquad (2.4\text{-}16)$$

Na célebre experiência para determinar a massa do elétron, Millikan media a carga elétrica de pequenas gotas de óleo observando o valor do campo elétrico vertical necessário para equilibrar o peso das gotas.

Para determinar a massa m das gotas, Millikan observava a sua velocidade terminal de queda no ar (sem campo elétrico) e utilizava (2.4-16) para determinar primeiramente o raio da gota. Com os valores de ρ_c , η , g e v_e ele podia calcular a massa da gota:
$m = 4/3\cdot R^3 \pi \rho_c$.
Substituamos valores numéricos: $\rho_c = 920$ kg/m^3 (óleo), $\eta = 1,82\cdot 10^{-5}$ Ns/m^2 ,
$v_e = 7,14\cdot 10^{-5}$ m/s. Com esses dados obtemos:

$R^2 \approx (7,14\cdot 10^{-5}\ m\cdot s^{-1}\cdot 9\cdot 1,82\cdot 10^{-5}\ Nsm^{-2})/(2\cdot 9,81\ ms^{-2}\cdot 920\ kgm^{-3}) = 0,006479\cdot 10^{-10}$ m^2
ou seja: $R = 0,08049\cdot 10^{-5}$ m, daí a massa da gota será $m = 2.01\cdot 10^{-15}$ kg.

Agora vamos introduzir uma constante de resistência r para o fluido. Definimos

$$r := \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta}{\rho_c R^2} \qquad (2.4\text{-}17)$$

Da Segunda Lei de Newton obtemos, agora, para a aceleração **a = g· u -r· v**, equação que já estudamos detalhadamente no capítulo **1.3** com u := 1 - ρ / ρ $_c$ = 1, pois não havia fluido (= ar). A velocidade final em tal caso é v_e = g· u/r = g/r. (No capítulo 1.3 tivemos **j** orientado para cima, o seja v_e = -g/r).

Fechou-se, assim, o nosso estudo básico do movimento através de um fluido. Falta, contudo, um análise do movimento real de bolas de tênis, golfe e beisbol. A isso dedicamos o capítulo 2.5.

O capítulo atual quero suplementar com alguns comentários sobre a determinação do coeficiente de arraste C e sobre a medição da viscosidade.

1. **Determinação do coeficiente de arraste para esferas.**

   Para determinar C deixamos cair uma esfera de aço (R ≈ 5mm-8mm, ρ_c = 7860 kg/m^3) num cilindro de vidro (altura ≈ 40 cm) recheado de água.

Com duas fotocélulas e um relógio eletrónico medimos o tempo que a esfera gasta para cair de uma altura y (p. ex. 25 cm) partindo do repouso.

Utilizando a equação (2.4-9)

$$y = v_e^2 \ln(\cosh(\frac{gu}{v_e} \cdot t))/(g \cdot u)$$

e (2.4-5) $\qquad v_e^2 = v_1^2 \cdot u = 8/3 \cdot gR/C \cdot (\rho_c - \rho)/\rho$

calculamos com um valor aproximado de C um valor "teórico" de y. Comparando-o com a distância real, sabemos se o valor de C é correto ou se devemos mudá-lo. Este cálculo temos de repetir várias vezes, até obter um valor satisfatório para C. O cálculo mesmo faremos com MuPAD:

```
• reset():
  c:=0.4:
  t:=0.236:
```

```
r:=0.008: g:=9.81:rho:=1000:
rhoc:=7861:
u:=1-rho/rhoc;
ve:=sqrt(8*g*r*(rhoc-rho)/(3*c*rho)):
y:=ve^2*ln(cosh(g*u*t/ve))/(g*u);
```

2. Medição da viscosidade

Um método simples para determinar o coeficiente de viscosidade η consta de medir a quantidade de fluido que passa em certo intervalo de tempo por um tubo de pequeno diâmetro (capilar).

A equação que governa o movimento de um fluido dentro de um tubo é conhecida como equação de Hagen-Poiseuille:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{r^4}{L} \cdot (P_1 - P_2) \qquad (2.4\text{-}18)$$

Q = taxa de escoamento em m^3/s (vazão em volume); tipicamente de 0.5 cm^3/s para nossos experimentos com capilares.
r = raio do tubo
L = comprimento do tubo
P_1 - P_2 = diferença de pressão entre os extremos do tubo [(Po+ρgh) - Po = ρgh]
Po = pressão atmosférica

A velocidade média v do fluido é $\Delta V/\Delta t \cdot 1/A = \Delta x \cdot A/\Delta t \cdot 1/A = \Delta x/\Delta t$

Para o número de Reynolds, obtemos

$R_e = D\, \rho\, v/\eta = D\, \rho/\eta \cdot \Delta V/\Delta t \cdot 4/(D^2\, \pi) = 4\rho/(\eta D\, \pi) \cdot \Delta V/\Delta t = 455$

onde usamos $\eta = 0.001$ Ns/m^2.

A lei de H.-P. é só válida para escoamento laminar (= não-turbulento) que sucede quando $R_e < 2300$. Então, a equação de H.-P. pode ser aplicada ao caso do fluxo num tubo capilar.

O sangue fluindo através das artérias (canais sanguíneos) não é exatamente um escoamento laminar, mas sim podemos aplicar, também neste caso, o fato de que a taxa de escoamento do sangue é fortemente dependente do raio da artéria, pois é proporcional à quarta potência do raio.

O colesterol no sangue ou qualquer obstrução das artérias tem como conseqüência uma redução do raio das artérias. Um decréscimo relativamente pequeno no raio da artéria significa uma drástica diminuição na taxa de escoamento!

Isso significa que o coração tem de aumentar enormemente o seu esforço para bombear a quantidade de sangue que o corpo segue reclamando.

Para a medição de η de água conectamos um tubo capilar (L = 45 m, D = 1,4 mm) horizontalmente a um cilindro recheado de água. O nível de água no cilindro devemos manter sempre na mesma altura h (20 cm). Medimos a taxa de escoamento, Q, cinco vezes e calculamos a média.

Sendo $P_1 - P_2 = \rho\, g\, h$, obtemos da (2.4-18)

$$\eta = \frac{\pi}{8Q} \cdot \frac{r^4}{L} \cdot \rho g h$$

O valor de η para água de 20^o é 0.001 Ns/m^2 = 1cP.
Para o sangue, o coeficiente de viscosidade é de cerca de 4cP.
Nota-se, que o coeficiente de viscosidade para os líquidos decresce quando se eleva a temperatura. No caso os gases, η cresce com o aumento de temperatura.

A viscosidade dos óleos decai de forma muito pronunciada com a temperatura. Esta é a principal razão pela qual um carro frio tem baixo desempenho.

Pesquisando na **Internet**, você vai encontrar mais de 2300 referências sob "número de Reynolds".
Uma biografia, em português, de Reynolds e de outros físicos famosos pode ler em
http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person.htm

Sobre viscosidade tem um lindo artigo no site
http://www.if.ufrj.br/teaching/fis2/hidrodinamica/viscosidade.html

Em espanhol, você pode estudar "Física com ordenador" no site
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm