2 As Leis de Newton

2.1 Massa e Força

No ano de 1687 foi publicado -com o imprimatur de S. Pepys- a *Philosophiae naturalis principia mathematica* de Isaac Newton (1643-1727).

As três Leis (*leges*) de Newton encontram-se já nas primeiras páginas das *Principia*:

> **Lex I**: *Todo corpo permanece no estado de repouso ou do movimento retilíneo uniforme* (MRU)*, a menos que seja obrigado a modificar seu estado pela ação de forças agindo sobre ele.*
>
> **Lex II**: *A modificação do movimento* (motus) *é proporcional à força motriz atuante e ocorre na direção em que esta força atua.*
>
> **Lex III**: *A toda ação corresponde uma reação igual e de sentido oposto, ou, as ações mútuas de dois corpos entre si são sempre iguais e dirigidas em direções opostas.*

Cabe anotar que a formulação moderna da segunda lei, a saber $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ ou $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$, não aparece na obra de Newton. Ele tampouco explica o que são, exatamente, *inércia, força* ou *massa*.

Dizendo: *inércia é a propriedade geral da matéria de permanecer em repouso ou* MRU, *quando não atuam forças ou quando a resultante é nula,* não basta para desenvolver uma mecânica prática. É preciso saber, como *medir* inércia, força e massa.

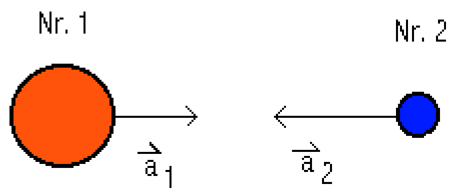
2.1.1 Definição da Massa inercial

O físico austríaco Ernst Mach (1838-1916) fez um profundo análise das Leis de Newton. Mach considerava dois corpos esféricos (dois "pontos materiais") que estão em interação mútua, por exemplo por meio de uma mola.

Para corpos e interações diferentes, Mach media as velocidades e as acelerações dos corpos.

(Tais experimentos fazemos, hoje em dia, no laboratório de física com ajuda de fotografias estroboscópicas. Para reduzir o efeito do atrito podemos deixar os corpos mover-se, no laboratório, sobre uma fina cama de ar. Podemos falar de um movimento sobre uma mesa horizontal e perfeitamente lisa.)

Diz-se que dois corpos *interagem* quando eles empurram ou puxam um ao outro -ou seja, quando uma força age sobre cada corpo devido ao outro corpo.



Dois corpos em interação.
Suas acelerações são $\mathbf{a}_1$ *e* $\mathbf{a}_2$.
O corpo menor recebe uma maior aceleração do que o corpo maior.

Fig. 2.1-1

De tais experimentos e observações, Mach podia deduzir os dois seguintes resultados fundamentais:

1a. *Em todo instante, os dois corpos têm acelerações* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ opostas:

1b. *Os vetores das acelerações estão sobre uma reta que passa por os centros dos corpos.*

2. *Em todo instante, o quociente dos módulos das acelerações é igual a uma constante*:

$$\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2|} = const := m_{21} \qquad (2.1\text{-}1)$$

> A aceleração é uma grandeza vetorial, que possui módulo, direção e sentido. Uma grandeza vetorial pode ser apresentada em negrito: **a, g, v**. Uma outra opção consiste em representar o vetor por meio de uma seta desenhada sobra a grandeza.

Os dois resultados são independentes do jeito da interação. Diferentes tipos de interação produzem, geralmente, diferentes acelerações, mas *o quociente dos módulos* não depende do jeito da interação entre os corpos.

Portanto, o quociente dos módulos das acelerações só pode ser uma propriedade intrínseca do *sistema* dos dois corpos. (Uma coleção de dois ou mais corpos é chamada de *sistema*.)

O segundo resultado de Mach fornece uma *Definição* dinámica do que chamaremos de **massa inercial** m_{21} do corpo Nr. 2 com relação ao corpo Nr. 1.

Mach demonstrou que podemos também atribuir uma massa inercial a um corpo só. Somente é preciso, escolher um dos dois corpos como corpo padrão e *definir* a sua massa como $\mathbf{m_1 = 1\ kg}$.

Um corpo Nr. n terá a massa inercial de

$$m_n = \frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_n|} \cdot 1\text{kg} \qquad (2.1\text{-}2)$$

Podemos medir a massa de qualquer corpo, medindo sua aceleração e a aceleração do corpo padrão -utilizando qualquer mecanismo de interação entre os dois corpos. (Você sabe que tal procedimento seria complicado de mais e que existem métodos mais simples para a medição de massa, por exemplo por meio de uma balança de braços iguais ou com uma balança de mola.)

Exemplo:

Para medir a massa inercial (ou simplesmente a *massa*) m de qualquer corpo dado, colocamos o corpo em interação com o corpo padrão, não importa a maneira de interação. Suponha que o corpo, de massa m desconhecida, está acelerado a 0.2 m/s^2. Suponha que determinamos que o corpo padrão possui uma aceleração de 1 m/s^2.

A relação (2.1-2) nos diz que:

$$m = \frac{1 m\,s^{-2}}{0.2 m\,s^{-2}} \cdot 1kg = 5kg$$

Coloquialmente, falamos só da *massa* de um corpo, mas, como vamos ver um pouco mais adiante, devemos falar mais corretamente da *massa inercial*. Existe outro tipo de *massa*, a saber, a *massa gravitacional*. Nós vamos ver que as duas massas são na prática iguais.
No sistema SI, a massa é medida em quilograma (kg).

(Quanto maior a massa, maior a força necessária para gerar uma dada aceleração. Portanto, a massa determina a inércia do corpo, daí o nome *massa inercial*.)

Agora podemos reescrever o resultado **1a** como $m_2\, \mathbf{a}_2 + m_3\, \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ ($kgms^{-2}$). Esta equação ainda não toma em conta o resultado **1b**, a saber, o fato de que os dois vetores de aceleração estão sobre a reta que passa por os centros das duas esferas.

Este resultado experimental significa que tanto $m_2\, \mathbf{a}_2$ quanto $m_3\, \mathbf{a}_3$ são paralelas ao vetor $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$.
O seja, o ângulo entre ($\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$) e $\mathbf{a}_2$ assim como entre ($\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$) e $\mathbf{a}_3$ é zero.
Com a ajuda do *produto vetorial* chegaremos à seguinte equação:

$$\mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{r}_3 \times m_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \qquad (2.1\text{-}3)$$

O produto vetorial, também conhecido como produto cruz, de **a** e **b** é lido como "a cruz b".

A demonstração da equação (2.1-3) pode-se fazer da seguinte maneira:

$$1{:}\ (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{a}_2 m_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{a}_2 m_2 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_2 m_2 = \mathbf{0}$$

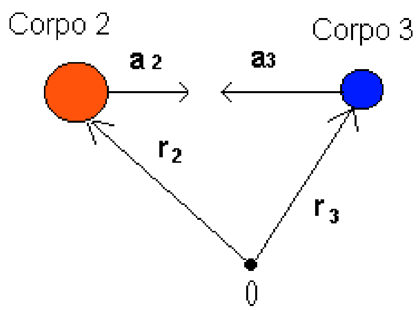
$$2{:}\ (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{a}_3 m_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{a}_3 m_3 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_3 m_3 = \mathbf{0}$$

Tomando em conta a equação $m_2\, \mathbf{a}_2 + m_3\, \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$, obtemos

$$1'{:}\ -\mathbf{r}_3 \times \mathbf{a}_3 m_3 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_2 m_2 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{r}_3 \times m_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

$$2'{:}\ \mathbf{r}_3 \times m_3\mathbf{a}_3 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$$

A grandeza **M** := **r** x m**a** é chamado de *torque*.



O*s vetores da aceleração estão sobre a reta que passa por os centros dos corpos 2 e 3*.

O vetor $\mathbf{a}_2$ tem a orientação do vetor $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$,

O é um ponto fixo.

$$\mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{r}_3 \times m_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$$

Fig. 2.1- 2

Aliás, uma força é chamada de *central* quando age ao longo da linha que une os dois corpos em interação.

(Somente quando falarmos da *Quantidade de Movimento Angular* volveremos ao resultado vetorial (2.1-3).)

2.1.2 Definição da Força

A importância da interpretação das Leis de Newton por Ernst Mach existe, entre outras coisas, no fato de que se pode definir o conceito de *força* sem o uso de termos vagos como "*algo* que causa um movimento ou uma deformação".

Nós estamos em busca de uma grandeza que mede a intensidade de uma interação entre dois corpos.

Primeiramente, Poder-se-ia pensar na aceleração como candidato útil, mas com esta eleição não podemos ter êxito, já que as acelerações de ambos os corpos são, geralmente, diferentes.

Mas se utilizarmos o produto m**a** como medida da intensidade da interação, então, é claro, que este procedimento vai funcionar, pois, segundo a equação experimental $m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$, temos $m_2 \cdot a_2 = m_3 \cdot a_3$, se tomarmos os valores absolutos das acelerações.

Definição:

O produto $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$ é chamada de *força* que o corpo 2 experimenta por estar em interação com o corpo 3.
O produto $\mathbf{F}_3 = m_3\mathbf{a}_3$ é chamada de *força* que o corpo 3 experimenta por estar em interação com o corpo 2.

Desta maneira, baseia-se a noção de *força* no conceito de *massa*, o seja, ao contrário do que as pessoas geralmente fazem.

No sistema SI, a unidade de intensidade de força denomina-se *Newton* (símbolo **N**).
A equação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ nos diz que $1\mathbf{N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$.

Qualquer força é, segundo Newton, parte da interação de dois corpos.
O seja: somente existem forças interativas.

Com a definição segundo Mach, surgirá, *automaticamente*, a tercera Lei, a Lex **III**, de Newton.
Veja só: a relação $m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ se reescreve agora como $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$, ou $\mathbf{F}_2 = - \mathbf{F}_3$, que não é outra coisa do que a formulação matemática da **Terceira Lei de Newton**.

"*Quando dois corpos interagem, a força provocada por um dos corpos sobre o outro é sempre igual em módulo, possui a mesma direção pero sentido contrário à força que o outro corpo exerce sobre ele.*"

Muitas vezes fazemos uso da seguinte formulação lacônica:
"*A toda ação corresponde uma reação igual e de sentido oposto.*"

É importante lembrar que as "forças de ação e reação" sempre atuam em corpos diferentes.
Se elas atuassem no mesmo corpo, então não haveria nenhuma força resultante sobre aquele corpo e nenhum movimento acelerado.

O sistema de dois corpos é, obviamente, um sistema além de simples. O que devemos fazer quando um corpo (um ponto material) se encontra em interação com dois ou mais corpos?

Aqui não serve nenhuma resposta filosófica, trata-se de uma questão empírica, devemos fazer experimentos adicionais, pois a resposta a esta pergunta não sai dos resultados até agora apresentados.

Agora, as experiências revelam que, quando um corpo experimenta mais de uma força, então a força **F** que os corpos C_1, C_2, ... C_n fazem conjuntamente sobre o corpo C (*corpo-de-prova*) é a soma vetorial das forças $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, ... $\mathbf{F_n}$. Ou seja, se n forças atuam simultaneamente sobre um corpo de massa inercial m, então, ele vai receber uma aceleração tal como se uma força só da intensidade

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + ... + \mathbf{F_n} \qquad (2.1\text{-}4)$$

estivesse atuando sobre o corpo dado. **F** é denominada *força resultante*.

A equação (2.1-4) exprime o denominado *princípio da superposição de forças.*
O princípio da superposição de forças vale em todas as situações da vida diária.
A seguinte formulação da segunda lei de Newton é a base da mecânica newtoniana:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \qquad (2.1\text{-}5)$$

Se a força resultante sobre o corpo for nula, a aceleração do corpo seria zero e tanto as forças quanto o corpo estariam em **equilíbrio.** Em tal caso, o corpo continua a se mover com velocidade constante ao longo de uma linha reta ou ficará em repouso. Esta conclusão inmediata da segunda lei de Newton é a **primeira lei de Newton** ou a Lex I. (Poder-se-ia esperar que valesse a recíproca, isto é, que a primeira lei implicasse a segunda. No entanto, o método de Mach demonstra que a Lex I é uma simples consequência da Lex II.)

A primeira lei de Newton não é válida em todos os sistema de referência. Um sistema de referência no qual ela é verdadeira é chamado de **sistema de referência inercial.** (Nele também são válidas as outras leis de Newton.)

Um observador que não é seguro se deve aplicar as leis de Newton, o seja, uma pessoa que não sabe se se encontra num referencial inercial, pode fazer um primeiro teste, observando, se um corpo isolado (isto é, livre da ação de outros corpos) mantém uma velocidade constante. Se tal corpo mudar de velocidade, então o sistema é não-inercial e nosso observador não deve aplicar as leis de Newton. (O observador não é capaz de achar uma força que cause a aceleração observada.)

Se o observador sim quer usar a segunda lei num referencial não-inercial, que possa ser útil, ele tem de usar um truque: ele deve introduzir uma "força fictícia" $\mathbf{F}^* = -m\,\mathbf{a}^*$, onde $\mathbf{a}^*$ é a aceleração do sistema não-inercial. **a** é a aceleração de m no sistema não-inercial.

A segunda lei deve-se escrever como **F** + **F*** = m**a.** Esta força fictícia é chamada de **força inercial**.
A "força centrífuga" é uma força fictícia, e ela não tem nada a ver com uma força de interação que sempre está ligada a um corpo real. Para forças fictícias não pode ser válida a tercera lei de Newton.

2.1.3 Movimento circular uniforme.

Um corpo encontra-se em repouso num sistema de referência que está girando uniformemente. Por exemplo, uma plataforma que gira ao redor do seu eixo central como um carrossel -ou um disco de música girando em torno de um eixo vertical que coincide com o eixo do toca-discos.

A aceleração do disco em rotação com respeito a um sistema inercial, por exemplo um laboratório, está dada por $\mathbf{a} = -v^2\, \mathbf{r^o}/r$ ($\mathbf{r}^o$ é o vetor unitário que mostra do centro da rotação ao objeto de massa m.) Para a força fictícia temos $\mathbf{F}^* = mv^2\mathbf{r^o}/r$, onde v é a velocidade do objeto no sistema inercial.

A força $\mathbf{F}^* = mv^2\mathbf{r^o}/r$ chama-se de *força centrífuga*.

A força **centrípeta** é a resultante de todas as forças que atuam sobre a massa m. O adjetivo indica a direção e o sentido da força: ela está sempre dirigida para o centro de rotação. Se o corpo estiver ligado ao centro de rotação por meio de uma corda, então será a corda a que produz a força necessária para manter o corpo em repouso na plataforma giratória (= sistema não-inercial.)

Visto desde o laboratório (= sistema inercial), o corpo está movendo-se com velocidade constante vem uma trajetória circular de raio r.
A tração da corda **T** é dirigida para dentro do círculo ao longo do eixo radial r.

Se você está orbitando em torno da Terra num ônibus espacial, então a única força atuante sobre você é a força gravitacional. Tanto você quanto o ônibus espacial estão em movimento circular uniforme e possuem acelerações dirigidas para o centro do círculo. A **força gravitacional** é a força centrípeta causando esta aceleração. Se a força gravitacional é a única força que atua sobre um corpo, então o corpo encontra-se num "estado sem peso", e é por isso que você vai flutuar na cabine. (A expressão "estado sem peso" não corresponde à situação real, pois a atração que a Terra exerce sobre você certamente não desapareceu, na verdade é apenas um pouco menor do que se você estivesse na superfície da Terra, ou seja, o seu peso permanece praticamente inalterado.)

Se você comparar uma maçã que cai, com um satélite que está orbitando em torno da Terra, não deve pensar que sobre o satélite estão atuando duas forças, enquanto sobre a maçã atua somente uma força. A razão para as diferentes trajetórias são as diferentes condições iniciais. Em certo instante, o satélite teve uma certa velocidade tangencial, enquanto a maçã estava simplesmente caindo para Terra.

Uma maçã que repousa em cima do tampo de uma mesa não encontra-se num "estado sem peso", pois, sobre ela atuam duas forças e não só a força gravitacional (o seu peso). O tampo da mesa também exerce uma força, perpendicular, sobre a maçã. A força resultante das duas forças é nula (se diz as vezes: *as duas forças "se cancelam"*). O que deve-se dizer é que tanto as forças quanto a maçã estão em **equilíbrio.**

A aplicação correta da segunda lei sempre pede um registro de todas as forças que agem *sobre* o corpo em questão. Portanto, deve-se achar todos os corpos que encontram-se em interação com o corpo sob consideração.

2.1.4 Interação Gravitacional

Existe na natureza uma interação particular chamada **gravitação.** Para caracterizar a intensidade dessa interação, atribuimos a cada porção de matéria uma *carga gravitacional* ou *massa gravitacional*, m'. A força **F** associada à interação gravitacional entre dois corpos deve ser proporcional à massa gravitacional de cada corpo. A determinação da dependência da força **F** com a distância r é um problema muito difícil, pois, exige um arranjo experimental muito sensível, porque a interação gravitacional é extremamente fraca.

Tais experiências foram feitas, por exemplo, por Cavendish (1731-1810), Eötvös (1848-1919) e Dicke(1916).
Os resultados dessas experiências permitem concluir que a interação gravitacional é atrativa e varia inversamente com o quadrado da distância entre os dois corpos.

Portanto escrevemos, para a força de gravitação, a expressão

$$\mathbf{F} = G\frac{m'_1 \cdot m'_2}{r^2} \qquad (2.6)$$

A constante G é uma constante de proporcionalidade e deve ser determinada experimentalmente.
O valor de G no sistema SI é $G = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ (= Constante da gravitação)

A equação (2.6) é a *lei da gravitação de Newton*. Newton utilizou as leis de *Kepler* e deduziu delas a sua fórmula.
(As três leis de Kepler foram descobertas experimentalmente.)

Das experiências, feitas por Eötvös e Dicke, podemos deduzir que a massa gravitacional, m', é proporcional à massa inercial, m, portanto a razão

$$k = \frac{m'}{m} \qquad (2.1\text{-}7)$$

deve ser a mesma para todos os corpos. Isso foi comprovado com bastante precisão ($1:10^{11}$).

Com uma escolha apropriada das unidades para m', podemos fazer a razão m'/m igual a um, e portanto, utilizar o mesmo número para a massa gravitacional e a massa inercial. Isso foi feito.

No futuro, usaremos o termo "massa" tanto para a massa inercial como para a massa gravitacional, pois os dois são indistingüíveis.