1 O Movimento dos Corpos

1.2 Movimento em linha reta com atrito ($v'(t) = - r\cdot v(t)$)

Revisão

Você viu até agora os conceitos de **velocidade instantânea** (ou simplesmente **velocidade**) e de **aceleração instantânea**.

A *velocidade* é a derivada primeira (em relação ao tempo t) da função posição x(t), o seja, v em qualquer instante é a declividade da curva posição - tempo do móvel.

Velocidade escalar é o módulo da velocidade com a unidade metros por segundo. (A velocidade lida no velocímetro de um carro é a escalar, que se traduz em inglês por *speed*. A velocidade instantânea possui sinal. O sinal positivo indica que o corpo está se movendo no sentido positivo do eixo *x*.)

A *aceleração* instantânea a é a derivada primeira da velocidade v em relação ao tempo t, ou também: é a derivada segunda da sua posição x(t) em relação ao tempo, com a em metros por segundo ao quadrado.

Graficamente, a aceleração em qualquer ponto é a declividade da curva velocidade-tempo naquele ponto.

(Para obter pontos de máximo ou de mínimo de uma função, o seja pontos críticos c, basta resolver a equação f '(c) = 0. É claro, que a função f deve ser derivável neste ponto. Por tal ponto extremo passa uma reta tangente horizontal.)

Existem funções com um ponto crítico em x = c, que não é ponto de máximo nem de mínimo local para f. Veja o caso de uma partícula que se desloca ao longo do eixo *x* segundo a equação $x(t) = (t-2)^4/4$.

As derivadas de esta função são zero para $x = 2$, mas a velocidade não tem valor extremo neste ponto, como podemos ver analisando o gráfico de v(t).

- ```
  x:=t->(t-2)^4/4:
  plotfunc2d(x'(t),t=-1..6)
  ```

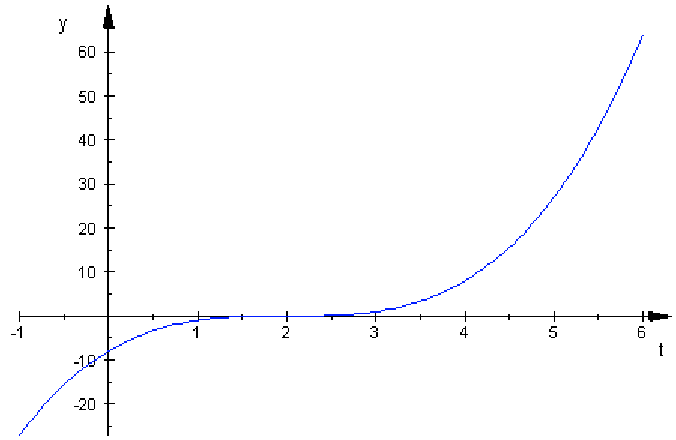


Fig. 1.2-1

Os movimentos de "Queda livre" e de "Lançamento vertical" são casos especiais do *vôo de queda livre*.

As formulas que descrevem o *vôo de queda livre* (durante tal movimento, a única força que age sobre o móvel é a força gravitacional) são reunidas no seguinte quadro:

$a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$
$y(t) = y_0 + v_0 t - gt^2/2$
$v(t) = v_0 - gt$
$v^2 + 2g(y - y_0) = v_0^2$
a aceleração é negativa e portanto para baixo

Nos cálculos com *MuPAD* omitimos, geralmente, as unidades, mas sempre deve-se observar que elas são consisitentes.

Vale a pena gastar alguns minutos no estudo do seguinte
  ```

Problema:

Um lançador arremessa uma maçã para cima ao longo de um eixo *y*, com uma velocidade escalar (ou simplesmente *velocidade*) inicial de 15 m/s.

1. Quanto tempo a maçã leva para atingir a sua altura máxima?
2. Qual é a altura máxima da maçã acima do seu ponto de lançamento? (Pode-se tomar $y_0 = 0$.)
3. Quanto tempo a maçã leva para atingir um ponto 6,0 m acima do seu ponto de lançamento? (Existem dois tempos, pois a maçã passa o ponto duas vezes, uma vez ao subir e outra ao descer.)

Problema Resolvido por *MuPAD*:

```
• reset()://libera todas as variáveis de valores atribuidos
g:=9.8:
y0:=0:
v0:=16:
y:=y0+v0*t-g*t^2/2:
t1:=solve(diff(y,t)=0,t) //tempo para subir
{1.632653061}
• subs(y,t=t1[1])//altura máxima
13.06122449
• t2:=solve(y=6,t)// tempo para atingir 6 m
{0.4322088841, 2.833097238}
    • t2_1:=t2[1]// tempo para atingir 6m pela primeira vez
0.4322088841
```

- ```
  subs(y,t=t2_1)// teste
  ```

  6.0

- ```
  t2_2:=t2[2]// tempo para atingir 6m pela segunda vez
  ```

2.833097238

- ```
  subs(y,t=t2_2)// teste
  ```

6.0

1.2.1 Decaimento do Movimento com atrito (v'(t) = -r·v(t))

Os casos com aceleração ou velocidade constantes são, matematicamente, bem simples. Entretanto, em muitas situações não é admissível supor que a aceleração é constante, e nossos cálculos podem estar em grande desacordo com o movimento real se não tomamos em consideração a resistência do meio no qual o corpo se move.

Quando um corpo se desloca através de um fluido (ar, água, óleo etc., -um fluido é um gás ou um líquido, o seja, qualquer substância que pode fluir), o corpo experimenta uma força de arrasto (em inglês *drag*).

Em casos muito simples, se pode supor que a aceleração do corpo é diretamente proporcional à velocidade, o seja a = -rv. Para gotas de chuva que vêm de grandes alturas (por exemplo de 1000 m), supomos, porém, a seguinte lei: a = - g - rv.

Suponha que você dirige um barco em linha reta num lago tranqüilo. De repente, o motor para por falta de gasolina.

O que você vai fazer? Seguramente, você marcará posicão x_0 e velocidade v_0 no instante t_0 do acidente.

Claro que você se sente como se estivesse realizando um experimento importante e anota sua posição em função do tempo. Os dados experimentais serão marcados como pontos coordenados (x,t) num papel já preparado. Você quer conhecer o tipo de movimento do seu barco "desgasolinado" .
  ```

Sua idéia fundamental é comparar suas medicões com os cálculos de *MuPAD*, que você pretende fazer depois de voltar para sua casa.

O ponto de partida para os cálculos é a equação a = v'(t) = -rv(t). A constante r toma conta da resistência do fluido.

(r = **constante de decaimento** no caso da radioatividade.)

O seja, você precisa de uma função do tempo v(t) tal que sua derivada primeira é diretamente proporcional a esta função. Ou seja, derivando-a uma vez relativamente ao tempo, tornamos a encontrar a mesma função, com a diferença de um coeficiente multiplicativo. (Tais funções existem: por exemplo, a função exponential.)

O *MuPAD* sabe como ajudar-lhe através da função "`ode`", que quer dizer **O**rdinary **D**ifferential **E**quation, o seja, Equação Diferencial Ordinária.

> Uma EDO -olha, que coincidência!- é uma equação que envolve uma função incógnita, v = v(t), e suas derivadas, em nosso caso somente v'(t). Uma solução para uma Equação Diferencial é uma função que satisfaz identicamente a equação.
> A solução mais geral possível que admite uma Equação Diferencial é denominada solução geral, enquanto que outra solução é chamada uma solução particular.

Sabe-se que a solução geral de nossa equação v'(t) = - rv(t) é a função v(t) = v0 $e^{-r\,t}$, e é a base exponencial (2,718...), r é a constante de resistência do fluido.

Para obter este resultado com ajuda do *MuPAD* é necessário fornecer a Equação Diferencial e as condições iniciais. Estas informações colocamos entre chaves { }. Também devemos inserir a função que se pretende buscar, em nosso caso v(t). (Com "`vel`" designamos a ED, "`velocidade`" é o nosso nome da solução.)

- ```
  vel:=ode({v'(t)=-r*v(t),v(0)=v0},v(t)):
  velocidade:= solve(vel)
  ```

$\{v0 \cdot e^{-r \cdot t}\}$

Como vemos, o *MuPAD* determinou a solução geral da equação

$$v'(t) = -rv(t) \qquad (1.2\text{-}1)$$

Como uma verificação, achamos a derivada da equação

$$v(t) = v0 \cdot e^{-r\,t} \qquad (1.2\text{-}2)$$
  ```

- ```
  velocidade[1];// v(t)
  diff(%,t);// v'(t)
  ```

$v0 \cdot e^{-r \cdot t}$

$-r \cdot v0 \cdot e^{-r \cdot t}$

Então obtemos v'(t) = -rv(t) , que é nossa Equação Diferencial original.

Para obter a posição em função do tempo, resolveremos a equação $v = x'(t) = v0 \cdot e^{-rt}$:

- ```
  pos:=ode({x'(t)=v0*exp(-r*t),x(0)=0},x(t)):
  posicao:= solve(pos)
  ```

$\left\{\frac{v0}{r} - \frac{v0 \cdot e^{-r \cdot t}}{r}\right\}$

- ```
  factor(%[1])
  ```

$-\frac{v0 \cdot (e^{-r \cdot t} - 1)}{r}$

Este resultado podemos expressar como:

$$\mathbf{x = \frac{v_0}{r}\left(1 - e^{-r \cdot t}\right)} \qquad (1.2\text{-}3)$$

O termo e^{-rt} é unitário para t = 0 e diminui rapidamente com o tempo. Quando t tende a zero, então a posição tende a um valor limite de $\mathbf{x_{lim} = v0/r}$**.**

(Esta relação presta-se para determinar r, utilizando valores experimentais para v0 e x_{lim} .)

A equação (1.2-2) nos diz que a velocidade chegará à metade do seu valor inicial, isto é v = v0/2 depois de t = **ln(2)/r** segundos. No *Anexo* falamos mais detalhadamente sobre este tempo de *valor médio* (ou tempo de *meia-vida*).

A constante **τ := 1/r**, que possui dimensão de tempo, é chamado de **constante de tempo.**
  ```

```
• v0:=10: r:=0.1:
  v :=t-> v0*exp(-r*t):
  DIGITS:=2:
  tmedio:=float(ln(2)/r):
  print("Tempo de meia-vida = ", tmedio, " segundos");//tempo
  de meia-vida
  curva:=plot::Function2d(v(t),t=0..40):
  plot(curva, GridVisible=TRUE,
  AxesTitles = ["tempo(s)",
  "vel(m/s)"],Header="Barco")
```

```
"Tempo de meia-vida = ", 6.9, " segundos"
```

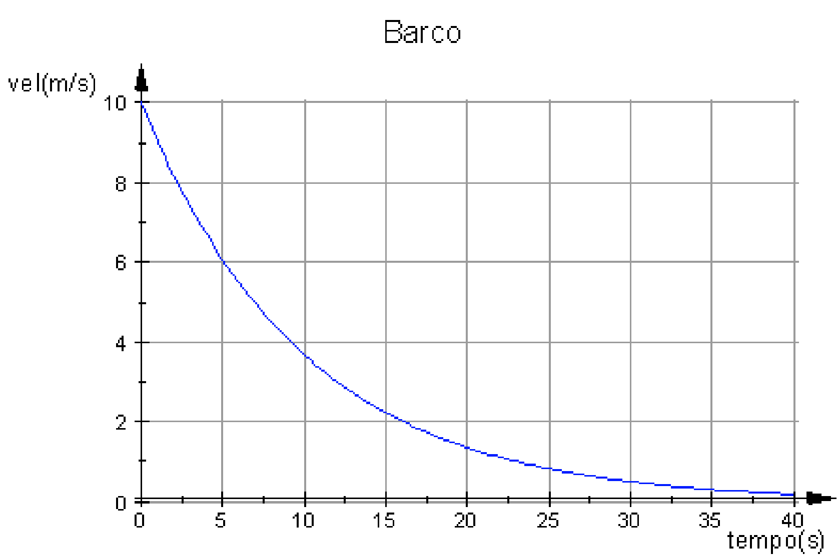


Fig. 1.2-2

Observe que, segundo este gráfico, a velocidade do barco vai diminuir exponencialmente, sem chegar ao valor zero. Não podemos dizer que é isto o que se observa na realidade.

Conclusão: O modelo matemático **a = v'(t) = -r· v(t)** é só uma aproximação para descrever o comportamento de um barco sem gasolina.

1.2.1 Mais Gramática de MuPAD e Exercícios

Na última figura podemos ver que se pode também agregar um título ("`Haeder`") ao gráfico. Com `GridVisible=TRUE` e `AxesTitles =` temos a opção de colocar linhas de grade e títulos nos eixos.

Na guia do *MuPAD*, escolha uma das muitas opções sugeridas para seu gráfico.

Imagine que você quer traçar duas curvas em cores diferentes, ou está planejando colocar pontos no gráfico, o que você deve fazer? O que você pretende fazer é colocar vários objetos gráficos dentro de uma representação gráfica só.

Para tais casos, o *MuPAD* oferece amplos recursos gráficos na sua "graphics library". Com "`?plot`" você pode se informar sobre o conteúdo dessa "livraria gráfica".

Exemplos:

Primeiramente vamos desenhar o gráfico da função f(x) = sen(x) para valores de x entre 0 e 2π radianos (1 radiano ≈ 57,30 graus, então 2π radianos ≈ 6,28·57,30 = 359,84 graus. O valor exato é 1 rad := 180/π graus). Não esquece que o gráfico só aparece depois de invocar a função "`plot` ( )".

(Observe que as funções trigonométricas têm em *MuPAD* os símbolos "sin, cos, tan, cot".)

- `f := plot::Function2d(sin(x), x = 0..2*PI):`

  `plot(f)`

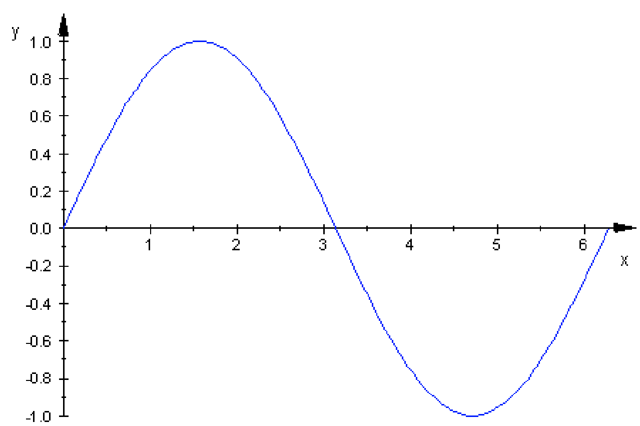


Fig. 1.2-3

O seguinte gráfico consta de dois objetos gráficos (sen(*x*) e cos(*x*)). A função f1 = sen(x) aparece em verde (Green) e a função f2 = cos(*x*) vai ser traçado em azul (Blue).

- ```
  f1 := plot::Function2d(sin(x), x = 0..2*PI, Color =
  RGB::Green):

  f2 := plot::Function2d(cos(x), x = 0..2*PI, Color =
  RGB::Blue):
  ```
- ```
  plot(f1, f2)
  ```

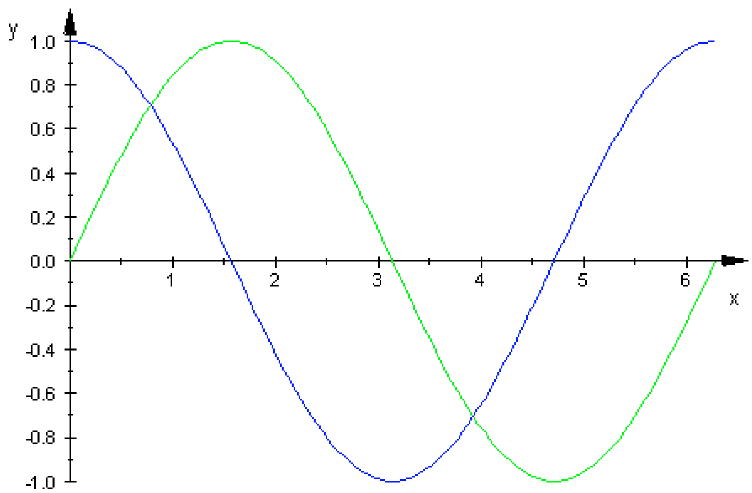


Fig. 1.2- 4

Agora agregamos um ponto e duas retas ao gráfico do barco sem gasolina.

- ```
  v0:=10: r:=0.1:

  DIGITS:=3:

  tmedio:=float(ln(2)/r):

  v_0:=float(v0/2):

  v:=t->v0*exp(-r*t):

  p1:=float(v(tmedio)):

  f1 := plot::Function2d(v(t), t = 0..40):
  ```
  ```

```
l1:=plot::Line2d([0,v_0],[tmedio,v_0],Color = RGB::Blue):

l2:=plot::Line2d([tmedio,0],[tmedio,v_0],Color =
RGB::Green):

p := plot::Point2d([tmedio,p1], Color = RGB::Blue):

info1:=plot::Text2d("Ponto T1/2",[tmedio,p1],

HorizontalAlignment = Left):

plot(f1,l1,l2,p,

AxesTitles = ["t/s","vel(m/s)"],Header="Vel. do
barco",info1)
```

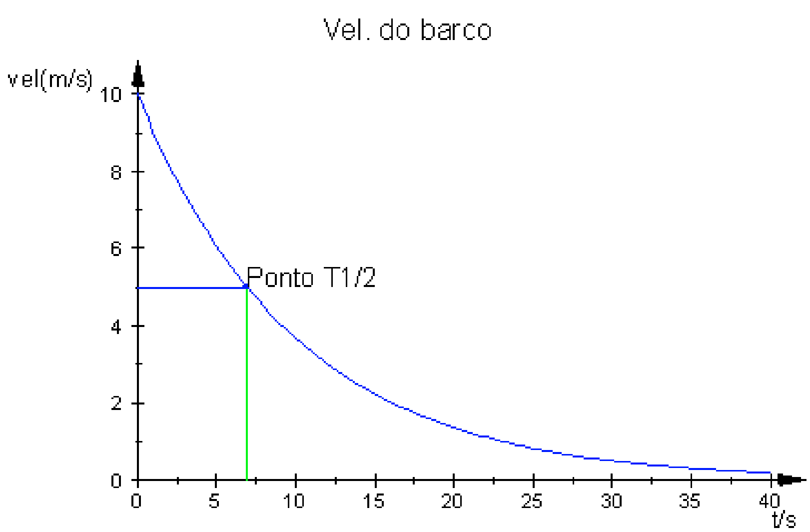


Fig. 1.2- 5

Exercícios :

Embora as soluções estejam apresentadas na sequência, sugiro que você tente resolver os problemas sem ver as soluções.

1. Mostre que também com `plotfunc2d` se pode representar várias funções no mesmo gráfico; por exemplo f(x) = cos(2x^2), g(x) = sen(4x^2), h(x) = sen(x)·cos(x) para valores de x entre 0 e 2.

2. Fazer um gráfico da reta tangente no ponto de valor-médio da última curva da seção anterior. (A equação da reta tangente à curve y = f(x) no ponto (c,f(c)) é dada por **t(x) = f'(c)(x-c)+f(c))** . (O tamanho do ponto pode-se regular com `PointSize = n*unit::mm`, por exemplo n= 3.)

3. Calcular e traçar a reta tangente ao gráfico de f(x) = $(x - 2)^2/2 + 2$ (parábola) no ponto (3, f(3)).

   Agregar linhas de grade e também um título. Que efeito tem o comando `TicksNumber = High` ?

Respostas:

- `plotfunc2d(cos(2*x^2), sin(4*x^2), sin(x)*cos(x), x=0..2)`

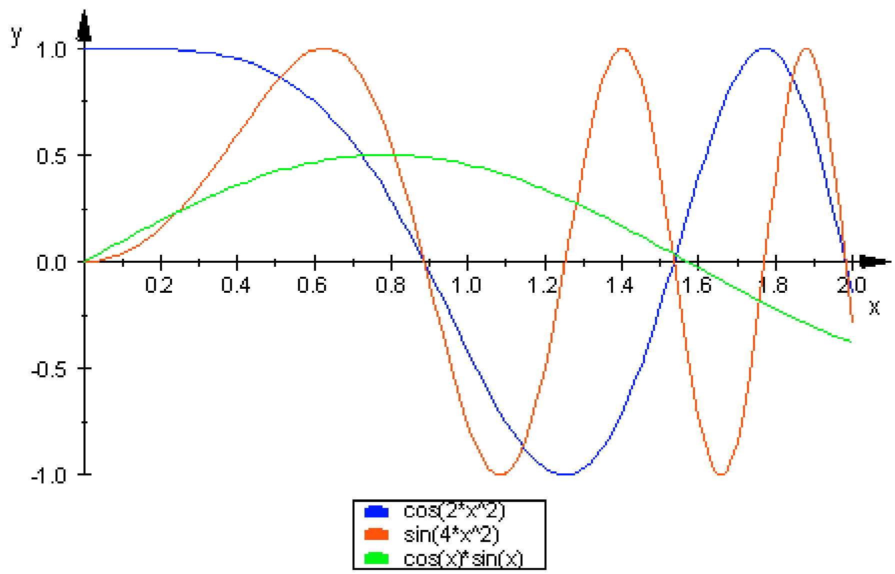


Fig. 1.2- 6

2.

- `v0:=10: r:=0.1:`

  `DIGITS:=3:`

  `tmedio:=float(ln(2)/r):`

```
v_0:=float(v0/2):

v:=t->v0*exp(-r*t):

tang:=v'(tmedio)*(t-tmedio)+v(tmedio):

tfin:=float(tmedio-v(tmedio)/v'(tmedio)):

p1:=float(v(tmedio)):

f1 := plot::Function2d(v(t), t = 0..40):

f2 := plot::Function2d(tang(t),t=0..tfin,Color=RGB::Red):

l1:=plot::Line2d([0,v_0],[tmedio,v_0],Color = RGB::Blue):

l2:=plot::Line2d([tmedio,0],[tmedio,v_0],Color =
RGB::Green):

p := plot::Point2d([tmedio,p1],

Color = RGB::Black,PointSize=3*unit::mm):

info1:=plot::Text2d("Ponto T1/2",[tmedio,p1],

HorizontalAlignment = Left):

plot(f1,f2,l1,l2,p,

AxesTitles = ["t/s","vel(m/s)"],Header="Vel. do
barco",info1)
```

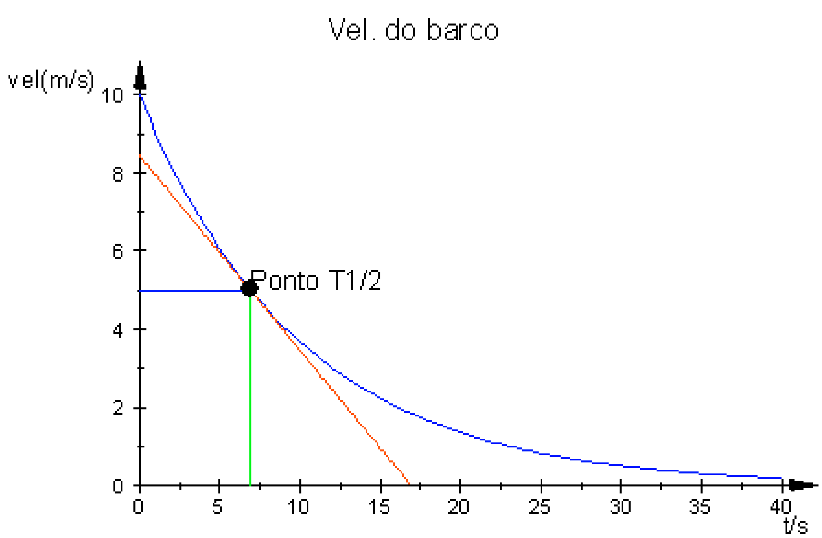
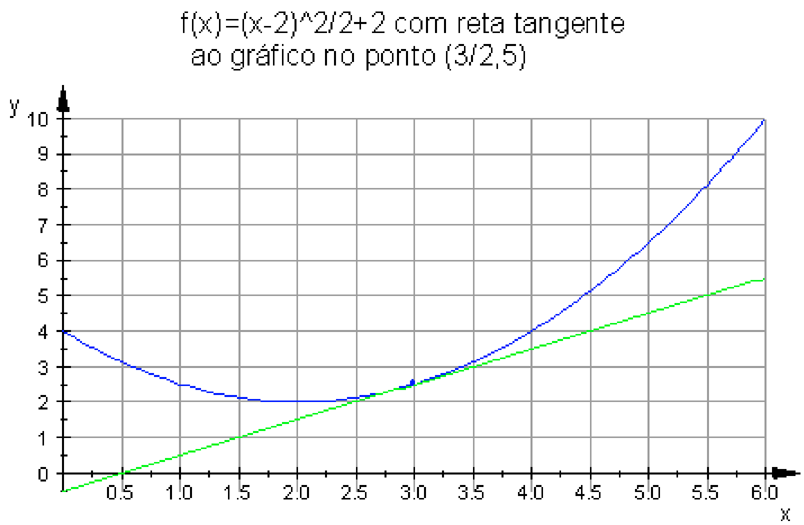


Fig. 1.2-7

3.

```
• reset():
  f:=x->(x-2)^2/2+2:
  c:=3:
  c1:=float(f(c)):
  t1 :=f(c)+f'(c)*(x-c)://tangente no ponto (c;c1)
  f1 := plot::Function2d(f(x), x = 0..6):
  g := plot::Function2d(t1(x),x=0..6,Color=RGB::Green):
  p := plot::Point2d([c,c1], Color = RGB::Blue):
  plot(f1,g,p,GridVisible=TRUE,TicksNumber=High,
  Header="f(x)=(x-2)^2/2+2 com reta tangente
  ao gráfico no ponto (3/2,5)")
```



1.2-8

1.2.3 Anexo

A **E**q. **D**iferencial v'(t) = -r·v(t) pertence ao grupo das ED da forma geral df /dt = ± r·f. Esse tipo de ED encontra-se freqüentemente em outros lugares da Física. Como exemplo, podemos citar seu uso para descrever o processo de descarregamento de um capacitor. Como um outro exemplo, mencionamos a desintegração radiativa, onde r é chamado *constante de decaimento*.

Suponha que um capacitor esteja totalmente carregado a uma carga q0 em t = 0s. Neste instante, o capacitor começa se descarregar através da resistência R. Como varia agora com o tempo a carga q(t) no capacitor?

A ED que descreve q(t) é parecida com a equação v'(t) = -rv(t), pois temos q'(t) = - rq(t), onde a constante da "fricção elétrica" é definida por r := 1/RC, sendo R a resistência do resistor através do qual se realiza o descarregamento.

C é a capacitância do capacitor. Comparando com o que já vimos acima, a carga no capacitor variará de acordo com a equação (1.2), o seja, segundo $q = q0 \cdot e^{-t/RC}$*, em* que q0 é a carga inicial.
Quando a carga no capacitor será a metade do seu valor inicial, o seja, quando temos q = q0/2?

Precisamos resolver a equação $q0/2 = q0 \cdot e^{-t/RC}$ para t manualmente ou por meio de *MuPAD.*

Manualmente: Após cancelarmos q0, percebemos que o tempo t que procuramos está embutido dentro de uma função exponencial. Para tirarmos o símbolo t, tomamos os logaritmos naturais de ambos os membros da equação (O logaritmo natural é a função inversa da função exponencial.)

Encontramos

$$\ln\frac{1}{2} = \ln\left(e^{-t/RC}\right) = -\frac{t}{RC}$$

ou

$$\mathbf{t = (-\ln(1/2)) \cdot RC \approx 0{,}69 \cdot RC := 0{,}69\ \tau}$$

A constante **τ = RC** é chamada de **constante de tempo capacitiva**.

O Produto RC possui dimensão de tempo. Isso deve ser assim, porque o argumento de uma exponencial tem que ser adimensional.

MuPAD: Deve-se indicar para *MuPAD* que t >=0 e que q0, C *e* R são positivos.

- ```
  assume(t>=0):assume(R>0):
  assume(C>0):assume (q0>0):
  solve(q0/2=q0*exp(-t/(R*C)),t)
  ```

$\{\ln(2) \cdot C \cdot R\}$

- ```
  float(op(%,1))
  ```

$0.6931471806 \cdot C \cdot R$

Tudo isso se aplica sem problemas ao caso de nosso 'barco sem gasolina', só deve-se substituir q, q0, RC para x, x0,1/r. Se escrevemos v'(t) = dv/dt = -rv(t) na forma dv/v = -rt, então podemos obter os resultados anteriores por meio de integração:

$$\int_{v_o}^{v} \frac{dv}{v} = -r \cdot t$$

que fornece ln(v/vo) = -r· t ou $v = v_o\, e^{-rt}$ *.*

Outra integração entre zero e t

$$x = \int_0^t v_0 \cdot e^{-rt} dt$$

proporciona a equação (1.3)

$$x = \frac{v_0}{r}(1 - e^{-rt})$$

Nas proximas seções, vamos também ver como *MuPAD* consegue fazer integrações.

Considere, por último, o *comportamento térmico* de corpos, que nós leva outra vez a uma equação do tipo df/dt = -r·f. Sabe-se que objetos quentes e frios se esfriam ou aquecem até a temperatura do ambiente ao seu redor.

Se a diferença de temperatura ΔT entre um objeto e o seu ambiente ($\Delta T = T_{obj} - T_{amb}$) não é muito grande, a taxa de resfriamento ou de aquecimento do objeto (que é a velocidade do cambio de ΔT) é proporcional, aproximadamente, a esta diferença de temperatura ΔT; ou seja,

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -A \cdot \Delta T$$

onde A é uma constante. O sinal negativo aparece porque ΔT diminui com o tempo se ΔT for positivo e aumenta, se ΔT for negativo.

Esta equação é conhecida como a *lei de resfriamento de Newton*.

Se em algum instante t = 0 a diferença de temperatura for ΔT_o *,* então ela será

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

em um instante posterior t.

Para você pensar:

Qual seria um modelo matemático para o processo de emagrecimento de uma pessoa? (A pérdida de peso ΔP pode-se modelar como no caso do resfriamento de Newton. No começo, ΔP é grande, mas vai diminuir no transcurso do tempo.)