1 O Movimento dos Corpos

1.1 Movimento em linha reta (movimento retilíneo).

Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que x = x(t) represente a posição do corpo no instante t.

Se o movimento ocorrer com uma velocidade v constante (= movimento uniforme), então, sabemos que *x* está dada a todo momento por

$$x(t) = v \cdot t + x(to) \qquad (1.1\text{-}1)$$

x(to) é a posição do corpo no instante to. Equação (1.1) é chamado de *equação horária*, que é uma função de primeiro grau para um movimento "MRU" (*movimento retilíneo uniforme*).

Para simplificar a escrita, mudemos de notação: escrevamos em vez de x(to) simplesmente xo. No intervalo de tempo compreendido entre t e t+h segundos, o corpo sofre um deslocamento dado por $\Delta x = x(t+h) - x(t)$ metros.

O sistema de unidades adotado na maioria dos países é o Sistema Internacional SI. Neste sistema, o padrão para o comprimento é o metro, para o tempo é o segundo e para a massa o quilograma.

A unidade SI de força é o $kg \cdot m/s^2$, e se chama newton (N). Analogamente, a unidade SI de potência, $kg \cdot m^2/s^3$ = N·m/s = Joule/s, é denominada watt (W).

Bem que se pode calcular a diferença x(t+h) - x(t) facilmente com lápis e papel, nós vamos realizar esta tarefa com um computador utilizando o sistema *MuPAD,* pois estes cálculos simples nós servirão de ingresso fácil ao mundo do *MuPAD.*

```
• x:=t->v*t+x0:expand(x(t+h)-x(t))
```

O gráfico desta função para os valores v = 1 e xo = 2 vemos na seguinte figura:

```
• v:=1:x0:=2: plotfunc2d(x(t),t=-1..10)
```

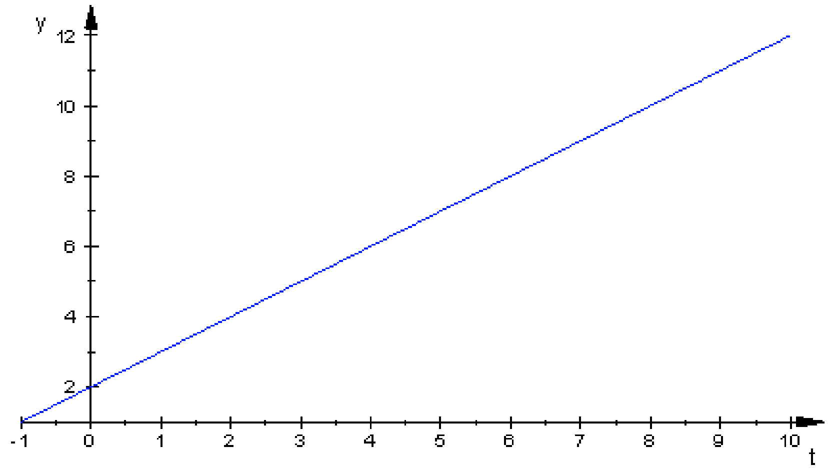

Fig. 1.1-1

O gráfico de *x* é uma reta, com inclinação positiva, se o móvel se desloca no sentido positivo da trajetória.

Agora, a razão incremental de *x* com respeito à variável t é dada pelo seguinte quociente:

$$v = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \qquad (1.1\text{-}2)$$

onde v é a velocidade, com a qual x, a distância percorrida, cresce. h é o intervalo de tempo.

Quando dirigimos um carro, o velocímetro marca, a cada instante, a velocidade.

Nosso modelo matemático, o seja a equação (1.1), corresponde ao caso ideal de uma velocidade constante.

Se pisarmos no acelerador ou no freio, percebemos que a velocidade muda, o que significa que nosso modelo (1.1) deve ser substituido por um modelo mais realista. Em tal situação, a equação (1.2) descreve apenas uma velocidade média v_m que nada nos diz sobre a velocidade do corpo em um dado instante t.

Para obtermos a velocidade instantânea do corpo, calculamos sua velocidade média em intervalos de tempo h cada vez menores. A velocidade instantânea é, então, dada por:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \qquad (1.1\text{-}3)$$

Esse limite da razão incremental é a **derivada** de *x* no instante t. Existem outras notações para a derivada de x(t) com relação a t, como x´(t) ou dx/dt ou outras; a mais comum é, provavelmente, dx/dt.

Por definição temos dt = Δt = h.

A **diferencial** de uma função contínua x no "ponto" t é definida por dx = x'(t)·dt. Como novo modelo para um **movimento acelerado** em linha reta, utilizamos a seguinte função que contém um termo de segundo grau em t:

$$x(t) = b\,t^2 + c\,t + d \qquad (1.1\text{-}4)$$

Esta equação horária é uma função de segundo grau. O parâmetro d é igual a x(0) := xo

A razão incremental calculamos, outra vez, com *MuPAD*:

```
• x:=t->b*t*t+c*t+d:

• expand((x(t+h)-x(t))/h)
```

$c + b \cdot h + 2 \cdot b \cdot t$

Em um intervalo h de tempo muito curto podemos suprimir o termo b·h e nós ficaremos com c + 2·b·t, que é a velocidade num movimento uniformemente variado (acelerado o desacelerado).

Observamos que a variação de velocidade, isto é Δv = v(2) - v(1) = 2b(t_2 - t_1) = 2b·Δt no "MRUV" (movimento retilvneo uniformemente variado) ı diretamente proporcional ao tempo percorrido.

O limite da razão incremental também podemos calcuar com *MuPAD*:

```
• limit((x(t+h)-x(t))/h,h=0)
```

$c + 2 \cdot b \cdot t$

A velocidade instantânea no MRUV é, então, dada por v(t) = c + 2bt.

MuPAD sabe calcular a derivada x'(t) através da função "`diff`" :

```
• diff(x(t),t)
```

$c + 2 \cdot b \cdot t$

Essa derivada podemos obter mais fácil e rápido utilizando o operador "`x'( )`":

- ```
  x:=t->b*t*t+c*t+d:
  x'(t)
  ```

$c+2\cdot b\cdot t$

- ```
  x''(t)
  ```

$2\cdot b$

-até mesmo pudemos calcular, dessa maneira, a segunda derivada.
(Derivadas com maior ordem podem ocorrer numa equação diferencial ordinária.)

Sabemos que a segunda derivada, o seja a derivada da velocidade, é a **aceleração instantânea**.
Nesse modelo, a aceleração instantânea, 2 b, é constante. Normalmente, se designa a aceleração com a letra "a", então, a=2b. O parâmetro c é o valor de v no instante t = 0, isto é, v(o) := v_0 = c.

A equação horaria do MRUV é, então, dada por

$$x(t) = x_0 + v_0\,t + at^2/2 \qquad (1.1\text{-}5)$$

e a velocidade num instante t é dada por

$$v(t) = v_0 + at \qquad (1.1\text{-}6)$$

1.1.1 Queda livre

Na natureza, a experiência mostra que todos os corpos caem com a constante aceleração a = g = 9.8 m/s^2. (Na realidade, o valor desta aceleração da gravidade varia um pouco de ponto a ponto na superfície da Terra. 9.8 m/s^2 é o seu valor médio ao nível do mar.)

No caso da "Queda livre", usamos o eixo y no lugar do eixo x, e escolhemos o sentido para cima como positivo: $y(t) = y_0 + v_0\,t + at^2/2$. Desprezam-se os efeitos da resistência do ar.

Exemplo:

Suponhamos que uma telha cai no instante t = 0 s com velocidade inicial zero de uma altura de 12 m.

Sua posição no instante t é dada por $y(t) = 12\ m + at^2/2$ onde $a = -9.8\ m/s^2$.

A aceleração a é uma **grandeza vetorial** e, como tal, possui módulo, direção e sentido. Sendo a orientação contra a orientação positiva do eixo y, então, deve-se usar o sinal negativo.
A equação $0 = 12\ m -(9.8\ m/s^2)\cdot t^2/2$ nos proporciona $t = (12\ m\cdot 2/9.8\ m/s^2)^{1/2} = 1.5649\ s$ como tempo de caida da telha.

Solução com "`solve`" de *MuPAD*:

```
y(t):=12-9.8*t^2/2:
solve(y(t)=0,t)
```

$\{-1.564921593, 1.564921593\}$

Note como *MuPAD* exibe as soluções em forma de uma lista, encerrada entre chaves. O tempo negativo é somente um resultado matemático, sem significado físico.

Para a velocidade, no instante em que a telha toca no solo, obtemos
$v(1.5649s) = 0 - 9.8m/s^2\cdot 1.5649s = -15.33\ m/s$.
Aqui o sinal negativo indica que a telha está movimentando-se para baixo.
No MRUV há uma maneira de se relacionar a velocidade v com o espaço $\Delta y = y(t)-y_0$.
Pois, de (1.6) obtemos primeiramente $v-v_0 = at$.
Esta expressão junto com $y(t) - y_0 = v_0 t + at^2/2$ nos conduz, através de um cálculo simples, à equação de Torricelli:

$$\mathbf{v^2 = v_0^2 + 2\cdot a(y - y_0)} \qquad (1.1\text{-}7)$$

Aplicando-a ao exemplo anterior, obtemos para a velocidade final
$v2 = 0 - 2\cdot 9.8m/s^2\cdot(0 - 12m) = 235.2\ m^2/s^2$, o seja, o valor absoluto (módulo) de v_{final} é 15.33 m/s.

1.1.2 Lançamento vertical

Consideremos, agora, o "Lançamento vertical" sem resistência do ar. Um projétil é lançado para cima, verticalmente, com a velocidade inicial v_0 . O movimento de subida do corpo será retardado devido ao fato da aceleração da gravidade ser contrária à velocidade.

Na altura máxima (y_{max}), a velocidade será nula. Da equação $v = v_0 + at$ obtemos para o tempo de subida $t_s = -v_0 / a$. Neste instante, ocorre a inversão do movimento. O ponto mais alto é dado por $y_{max} = y_0 + v_0 t_s + t_s^2/2$. *MuPAD* calcula para a altura máxima

- ```
  ymax:=y0+v0*t+a*t^2/2:
  subs(ymax, t=-v0/a)//substituir em ymax o tempo -v0/a
  ```

$$y0 - \frac{v0^2}{2 \cdot a}$$

- ```
  subs(%, a=-g)// "%" é o símbolo para o último resultatdo
  ```

$$y0 + \frac{v0^2}{2 \cdot g}$$

(O comentário depois de "//" é só texto e não tem importância para o cálculo.)

Para simplificar, escolhemos o ponto em que o projétil foi lançado como a origem do eixo *y*. Substituindo $y_o = 0$ e $a = -g$, obtemos $y_{max} = v_0^2/2g$ e $t_s = v_o/g$.

De $y(t) = y_0 + v_0 t + at^2/2$ concluímos, substituindo $y = y_o = 0$ e $a = -g$, que o tempo total del movimento será dado por $2v_o/g = 2t_s$, o seja, o tempo da subida é igual ao tempo da queda.

A velocidade final $v_{final} = -v_o$ obtemos da equação $v = v_0 - gt$, o seja: $t = 2v_o/g$.

A equação de Torricelli segue sendo válida. Substituindo $a = -g$ e $y_o = 0$, obtemos $v^2 = v_0^2 - 2gy$. Note que a grandeza $v^2 + 2gy$ (= v_0^2 = const.) é uma **constante de movimento**, dependendo somente da velocidade inicial. Essa equação demonstra que, enquanto o corpo se move, a soma $v^2 + 2gy$ não varia.

Multiplicando esta grandeza por m/2, obtemos o que mais tarde chamaremos *lei de conservação de energia*:

$$\mathbf{m\, v^2/2 + mgy = E} \qquad (1.1\text{-}8)$$

Exemplo:

Um projétil é lançado para cima, verticalmente, desde uma plataforma ($y_o = 50$m) com velocidade inicial de $v_o = 20$m/s. Usar o *MuPAD*!

a. Quais serão a altura e a velocidade do projétil quando t = 4.08s?

```
g:=9.8:y0:=50:v0:=20:t:=4.08:
y:=t->y0+v0*t-g*t^2/2:
v:=t->v0-g*t:
y(t);
v(t)
```

50.03264

− 19.984

No instante t = 4.08 s, o projétil encontra-se numa altura de 50.03264 m e tem uma velocidade de -19.984 m/s, o seja, o móvel está descendo.

b. Determine o instante em que o projétil atinge o ponto mais alto.

```
g:=9.8:y0:=50:v0:=20:
y:=t->y0+v0*t-g*t^2/2:
solve(diff(y(t),t)=0,t)
```

{2.040816327}

Observe, que *MuPad* também entende a definição de uma função sem que se use o operador "->". Mas, em tal caso, deve-se escrever `diff(y,t)` e não `diff(y(t),t)` Porém, é preferível, usar a notação com a seta. Confira:

```
g:=9.8:y0:=50:v0:=20:
y:=y0+v0*t-g*t^2/2:
solve(diff(y,t)=0,t)
```

{2.040816327}

Então, o tempo de subida até o ponto mais alto é t_s = 2.04082 s

c. Quando retorna o móvel ao nível de lançamento?

Qual a velocidade final?

```
• g:=9.8:y0:=50:v0:=20:
  y:=t->y0+v0*t-g*t^2/2:
  solve(y(t)=50)
```

$\{[t = 4.081632653], [t = 0]\}$

É óbvio que somente o valor t = 4.0816... tem sentido.

Note como MuPAD exibe as soluções em forma de uma lista, encerrada entre chaves.

```
• g:=9.8:y0:=50:v0:=20:
  y:=t->y0+v0*t-g*t^2/2:
subs(diff(y(t),t),t=4.08163)// velocidade
```

-19.999974

O módulo da velocidade final é igual à velocidade inicial.

Agora, veja o seguinte código, onde temos introduzido o operador "op" e o indicador "[1]" para o primeiro elemento da lista das soluções da equação $-gt^2/2 + 20t + 50 = 50$:

```
• g:=9.8:y0:=50:v0:=20:
  y:=t->y0+v0*t-g*t^2/2:
  op(solve(y(t)=50)[1])
```

$t = 4.081632653$

Com o operador "op" - veja a informação sobre o uso de "op" com ajuda de "?op"- podemos tirar o valor numérico do primeiro elemento da lista das soluções e calcular com ele o valor da velocidade final:

```
• subs(diff(y(t),t),%)
```

-20.0

1.1.3 Gramática de *MuPAD*

Existem dois métodos para definir uma função em *MuPAD*.
Suponhamos que uma função está sendo dada por f(x)=2x^2 +3x-10.

O primeiro método consiste em definir a função dada como uma expressão algébrica

1. `f:= 2*x^2+3*x-10`

O segundo método utiliza uma seta como símbolo de atribuição:

2. `f:= x->2*x^2+3*x-10`

Dessa forma, definimos f como processo, que associa a cada entrada `x` uma saída `2*x^2+3*x-10`.

Uma desvantagem de utilizar a primeira definição é o fato de que o valor da função num ponto *x* dado não se pode calcular com a notação `f(x)`, é necessário, neste caso, declarar antes o valor de x ou utilizar a função "`subs`" (substituir).

Seja x = 6, então o valor da função f nesse ponto será 80:

- `f:= 2*x^2+3*x-10:`
- `subs(f,x=6)`

```
80
```

Com x := 6 o valor 6 será atribuido à variável x, onde ":=" é um operador de atribuição e obtém-se o mesmo resultado com o seguinte código:

- `x:=6:`

  `f:=2*x^2+3*x-10`

```
80
```

Para exibir a resposta de um cálculo, pressiona-se a tecla "Enter".
Os dois pontos atrás de uma expressão suprimem a exibição do resultado.

Seja, agora, x = 10, então obteremos:

- ```
  delete x:
  f:= 2*x^2+3*x-10:
  subs(f, x=10)
  ```

220

Com "`delete`" limpamos a última atribuição de um valor.

O resultado do cálculo de uma expressão, terminada por um ponto e vírgula, será exibido na tela.

- ```
  A:=PI*r^2: C:=2*PI*r:
  subs(A,r=2.5);
  subs(C,r=2.5)
  ```

$6.25 \cdot \pi$

$5.0 \cdot \pi$

Com "`float(%)`" você obtém os valores aproximativos. Compare também o "Anexo".

Com `DIGITS := n` podemos arredondar os valores para n caracteres. (Anexo) Através do comando "`?DIGITS`" <Enter> o *MuPAD* abre o "Help Browser" que explica a definição do termo `DIGITS` e oferece exemplos do seu uso. Assim lemos:

"`DIGITS` -quantidade de dígitos significativos de um número ponto flutuante" (= número decimal).

Através de "?expand" <Enter> você vai saber que esta função desenvolve (expande) uma expressão algébrica. Esta expansão será refeito com a função "`factor`".

Vejamos:

- ```
  expand((a+b)^2);
  factor(%)
  ```

$2 \cdot a \cdot b + a^2 + b^2$

$(a + b)^2$
  ```

O símbolo "%" representa o último resultado.

A função "`plotfunc2d`" permite a visualização de uma função de uma variável real em 2D. A função "`plotfunc3d`" permite a visualização de funções de duas variáveis reais em 3D.

Exemplos:

- `f:=x^2/10:`
  `plotfunc2d(f, x=-2..2)`

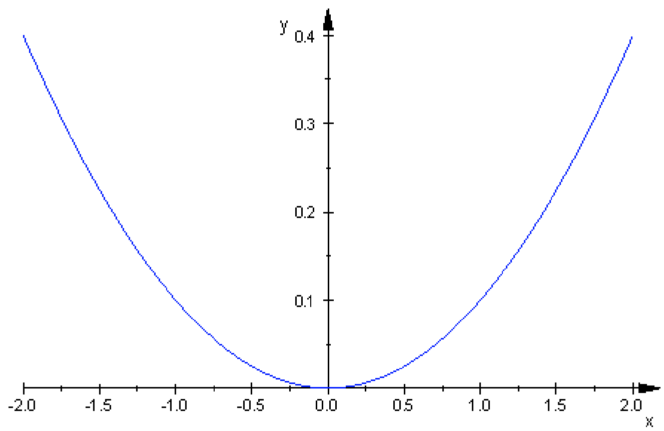

Fig. 1.1-2

- `z:=(x^2+y^2)/2:`

  `plotfunc3d(z,x=-2..2,y=-2..2)`

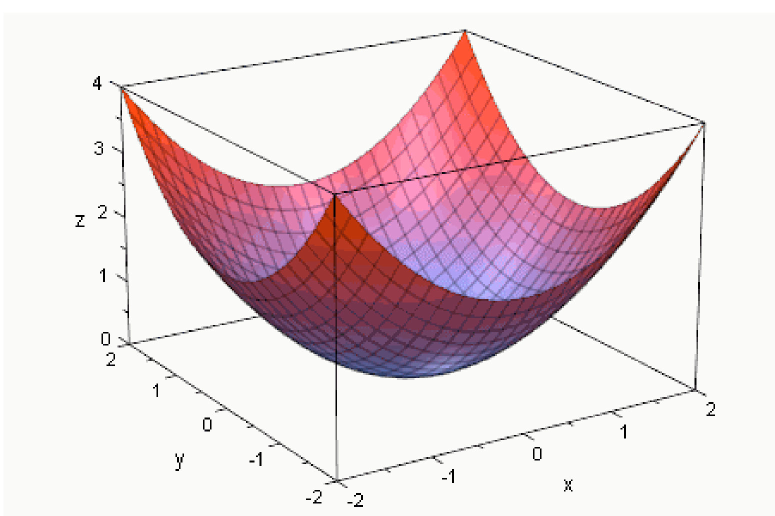

Fig. 1.1-3

1.1.4 Exercícios

Nesta seção encontram-se também as novas funções "`divide`", "`simplify`" e "`numeric::solve`".

1. Quais são os valores de $f(x) = x^4/4 - 4x^3/3 - 7x^2/2 + 20x + 11$ no ponto $x = 3$?

2. Determine a derivada da função f nos pontos x= -2, 1, 5.

3. Simplificar $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10)/(x-1)$ e escreva o resultado como produto.

4. Resolver a equação $x^2 - 3x - 10 = 0$.

5. Traçar o gráfico da função f para valores de *x* entre -3 e 6.

6. Determinar os valores de x onde f(x) = 0.

Buscar as soluções reais com ajuda de um gráfico apropriado.

(Não existe nenhuma solução exata. As soluções numéricas encontram-se por meio da função "`numeric::solve(f=0,x)`".

Se se define `g:= numeric::solve(f = 0, x)`, então `g[n]` dará a solução x_n .) Assim, as diferentes soluções podem ser diretamente tiradas da lista das soluções.

7. Quais são as soluções da equação $x^3 - 35x^2 - 206x + 240 = 0$?

Respostas:

1. O valor da função f no ponto x = 3 é dado por 23.75, pois:

```
f:=x->x^4/4-4*x^3/3-7*x^2/2+20*x+11:
f(3)
```

$$\frac{95}{4}$$

```
float(%)
```

23.75

2. Denominaremos g a derivada de f:

- `f:=x->x^4/4-4*x^3/3-7*x^2/2+20*x+11:`
  `diff(f(x),x)`

$x^3 - 4 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 20$

- `g:=%`

$x^3 - 4 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 20$

- `subs(g,x=-2)`

10

- `subs(g,x=1)`

10

- `subs(g,x=5)`

10

Então, nos pontos x = -2, 1, 5 a derivada tem o mesmo valor 10.

3. Com "`divide`" podemos fazer uma divisão entre polinômios:

- `divide((x^3-4*x^2-7*x+10),(x-1))`

$x^2 - 3 \cdot x - 10,\ 0$

O zero indica que não há resto.

Também com "`simplify`" pode-se fazer a divisão:

- `simplify((x^3-4*x^2-7*x+10)/(x-1))`

$x^2 - 3 \cdot x - 10$

- `factor(%)`

$(x + 2) \cdot (x - 5)$

4. Para a solução usamos a função "solve"

- `solve(x^2-3*x-10=0,x)[1]`

-2

- `solve(x^2-3*x-10=0,x)[2]`

5

5. Gráfico

- `f:=x->x^4/4-4*x^3/3-7*x^2/2+20*x+11:`

  `plotfunc2d(f(x),x=-3..6)`

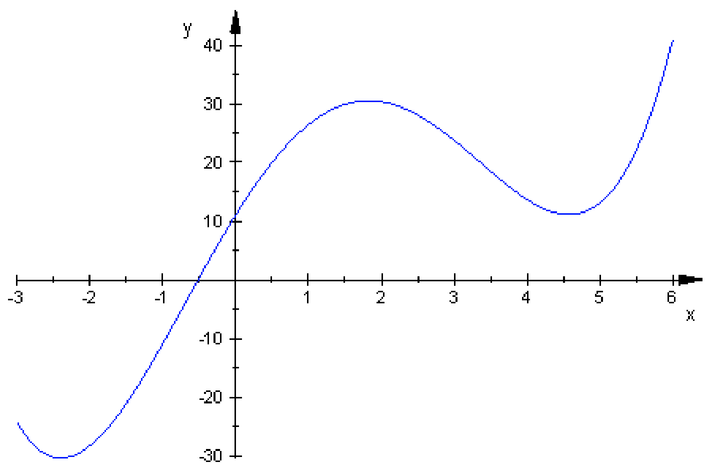

Fig. 1.1-4

6. Zeros da função f:

- `numeric::solve(f(x)=0,x);`

$\{-0.5137244473, -3.639657308, 4.743357545 + 1.016232079 \cdot i, 4.743357545 - 1.016232079 \cdot i\}$

- `f:=x^4/4-4*x^3/3-7*x^2/2+20*x+11:`

  `g:=numeric::solve(f=0,x)`

$\{-0.5137244473, -3.639657308, 4.743357545 + 1.016232079 \cdot i, 4.743357545 - 1.016232079 \cdot i\}$

```
g[1]
```

-0.5137244473

- `g[2]`

-3.639657308

- `g[3]`

$4.743357545+1.016232079\cdot i$

- `g[4]`

$4.743357545-1.016232079\cdot i$

7. Com `subs(f, x = -6)` determinamos se x = - 6 é uma solução válida da equação dada.

- `f:=x^3-35*x^2-206*x+240:`

  `solve(f=0,x)`

$\{-6, 1, 40\}$

- `subs(f,x=-6)`

0

- `subs(f,x=1)`

0

- `subs(f,x=40)`

0

1.1.5 **Anexo** (Exercícios adicionais)

Exemplo 1:

Dada uma temperatura em graus Celsius (C). Para obtermos a temperatura em graus Fahrenheit (F), nós servimos da seguinte fórmula:

$$F= 9C/5 + 32$$

Esta equação tem a mesma estrutura que a equação (1.1-1). F(20) seria a temperatura em graus Fahrenheit para 20 graus Celsius.
A fórmula em *MuPAD* será `F:= C->9C/5+32,` e *MuPAD* proporciona para F(20) um valor de 68 graus Celsius.

- ```
  F:=C->9*C/5+32:
  F(20)
  ```

```
68
```

Pode-se definir a função F também mediante `F:= 9C/5+32`, más o valor de F no "instante" C=20 será então dado por a função "`subs`" (substituir).

- ```
  F:=9*C/5+32:
  subs(F,C=20)
  ```

```
68
```

É fácil fazer um gráfico da função F para o intervalo de -20 graus Celsius até 100 graus Celsius:

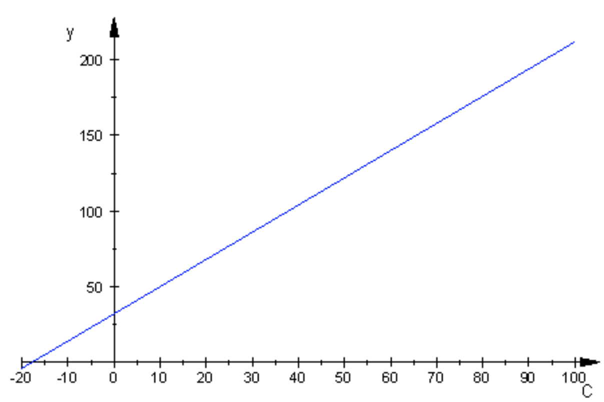

Fig. 1.1.5

Quando se utiliza a definição da função sem seta, então deve-se escrever na função `plotfunc2d` F ao invés de F(C).

Exemplo 2:

Voltemos ao primeiro método de definir funções no *MuPAD*, utilizando como exemplo

$A = \pi \cdot r^2$ para calcular a área de um círculo com raio r. O comprimento de sua circunferência é dado por $C = 2\ \pi\ r$. As fórmulas $A = \pi \cdot r^2$ e $C = 2\ \pi\ r$ são "Expressões algébricas", r é a variável das expressões.

Com o seguinte código vamos calcular os valores de A e C para r= 2.5.

(Note que o valor da constante "Pi" pode ser obtido em *MuPAD* com on nome PI.)

```
• float(PI);
  A:=PI*r^2:
  C:=2*PI*r:
  subs(A,r=2.5);
  subs(C,r=2.5)
```

3.141592654

$6.25 \cdot \pi$

$5.0 \cdot \pi$

2.5 é o valor numérico da variável r, e $6.25 \cdot \pi$ (= 19.63 ...) é o valor numérico da expressão indicada por A. O valor numérico da expressão $C = 2\ \pi\ r$ é $5.0 \cdot \pi$ (= 15.709...).
Para obter o valor aproximativo decimal, fazemos uso da função "float". Esta função produz de padrão, por default, um resultado com largura de 10 caracteres. Com `DIGITS` := n podemos arredondar os valores para n caracteres.

```
• A:=PI*r^2:
  C:=2*PI*r:
  DIGITS :=5:
  float(subs(A,r=2.5));
```

```
float(subs(C,r=2.5))
```

19.635

15.708

Apenas adicione o seguinte código para obter o gráfico de A e C para valores de r entre 0 e 5:

```
A:=PI*r^2:
C:=2*PI*r:
plotfunc2d(A,C,r=0..5)
```

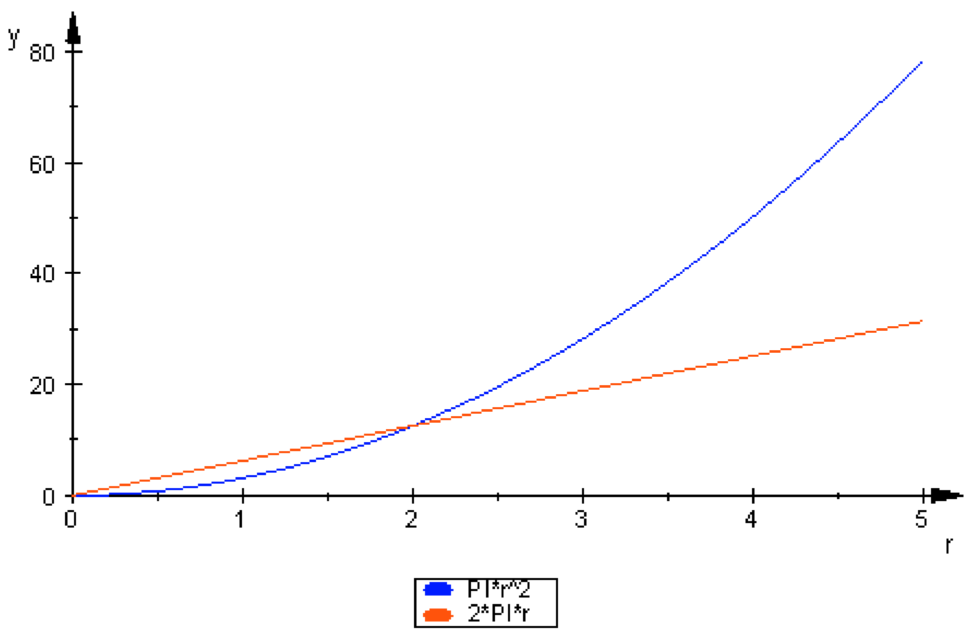

Fig. 1.1.6