7.3 Laplace-Transformation

7.3.1 Einführung

Ein sehr nützliches Werkzeug für das Lösen von linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind die *Laplace-Transformierten* von Funktionen. (*P. S. Laplaçe*, 1749-1827, studierte 1782 als Erster die nach ihm benannte Transformation. Aber die Techniken, die heutzutage benutzt werden, wurden ungefähr hundert Jahre später von dem englischen Ingenieur *O. Heaviside,* 1850-1925, entwickelt.)

Der Gebrauch von "Transformierten" ist vielen –hinreichend alten- Personen seit ihrer Schulzeit bekannt, denn die Logarithmentafel wurde von ihnen in dem gleichen Geist benutzt wie bei dem Umhang mit den Tabellen der Laplace-Transformierten. Ich werde diese Behauptung kurz erläutern.

Aufgabe: Berechne $x = 9{,}862^{3{,}48}$.

In den guten alten Zeiten (wann genau war das?) hat man die eigentliche Aufgabe zuerst "transformiert", also umgeschrieben:

$$\log x = 3{,}48 \cdot \log 9{,}862$$

Der Gebrauch der Funktion *log* transformiert das komplizierte Ausgangsproblem, nämlich die Potenzierung einer Zahl, in eine einfache Multiplikation. Dazu benötigt man natürlich eine Tabelle, die uns sagt, was log 9,862 ist. Jeder besaß damals eine Logarithmentafel und fand darin log 9,862 = 0,99396. Damit ergibt sich schon mal, dass log x = 3,4586 ist. Jetzt müssen wir uns nur noch von "log" befreien, um x alleine zu erhalten. Das machte man mit derselben Tabelle, denn dort konnte man den "Antilogarithmus" aufsuchen und fand x = *anti* log 3,4586 = 2875. (Die Multiplikation von 3,48 und 0,99396 wurde ebenfalls logarithmisch durchgeführt: log 3,48 + log 0,99396 = 0,5389 → log x = 3,4586 → x = 2875) (Mit Taschenrechner: anti log 3,4586 = 10^x(3,4586))

Ähnlich sind die Schritte, die wir beim Lösen von Differenzialgleichungen mithilfe einer Tabelle für *Laplace-Transformierte* tun müssen:

1. Transformation der Differenzialgleichung
2. Lösung der transformierten Gleichung
3. Inverse Transformation des Zwischenergebnisses

7.3.2 Laplace-Transformierte

Immer, wenn wir es mit zeitabhängigen Funktionen zu tun haben, wenn es sich also um Bewegungen, Geschwindigkeiten, Kräfte, Spannungen, Ströme usw. handelt, ist es sinnvoll, sich zu fragen, ob das folgende uneigentliche Integral unsere Rechenarbeit nicht vereinfachen könnte:

$$F(s) \coloneqq L\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

L{f} steht für "*Laplace-Transformierte von f* ". L{f} ist eine Funktion und L{f}(s) ist der Funktionswert von F = L{f} an der Stelle s. Der Funktionswert wird als uneigentliches Integral berechnet. Dabei hängt L{f}(s) von s ab und nicht von der Integrationsvariablen t. Eine ausführliche Berechnung des Integrals folgt unten in 7.3-8.

Die drei oben erwähnten drei Schritte lauten jetzt

1. Benutze die Beziehung (1), um das Problem für die Funktion f(t) in ein einfacheres mit der Funktion F(s) umzuwandeln (zu transformieren).
2. Löse das einfachere Problem, und bestimme F(s).
3. Kehre zurück zur Funktion f(t).

Die Analogie mit dem Potenzierungsproblem mithilfe der Logarithmusfunktion log ist offensichtlich: log entspricht F. Um f(t) zu finden (entspricht x), müssen wir die Transformation invertieren, d.h. wir müssen $L^{-1}\{F\} = f$ finden, wobei die Funktion $L^{-1}\{F\} = f$ die *inverse Laplace-Transformierte* von F ist.

Ehe wir mit den LT ein *Anfangswert-Problem* lösen können, brauchen wir noch einen Satz, der uns sagt, wie man die *Laplace-Transformierte* einer *Ableitung* f´ finden kann. (MuPAD, hat eine Tafel der wichtigsten *Laplace-Transformierten* "eingebaut".)
Der Satz lautet wie folgt: *Wenn f eine Laplace-Transformierte hat und eine stetige Ableitung f´ -und wenn auch f´ eine Ableitung hat, so gilt*

$$L\{f'\}(s) = s\,L\{f\}(s) - f(0)$$

Ein (einfacher) Beweis steht z.B. in T.M. Creese - R.M. Haralick, *Differential Equations for Engineers*, 1978 McGraw-Hill,Inc., p. 198

Weitere Sätze über höhere Ableitungen siehe unten 7.3-8

Beispiel 1

Nach C.H. Edwards – D.E. Penney, *Differential Equations and Boundary Value Problems*, second Edition, 2000 Prentice-Hall, Inc., p.458

Löse das folgende Anfangswertproblem mit der homogenen Differenzial-gleichung

y'' - y' - 6y = 0;   y(0) = 2; y'(0) = -1

Lösung

Wir schreiben für jeden Term getrennt die LT:

L{ y''(t)} - L{ y' (t)} - 6 L{y(t)} = 0

Die LT der ersten Ableitung ist L{y' (t)} = s L{y(t)} – y(0) = s F(s) –y(0) = s F(s) –2
Die LT der zweiten Ableitung ist L{ y'' (t)} = s^2F(s)-sy(0)- y' (0) = s^2F(s)-2s+1

Die transformierte Gleichung lautet damit:

[s^2F(s)-2s+1] – [sF(s) –2] – 6[F(s)] = 0

Ausgerechnet ergibt sich (s^2 - s - 6)F(s) – 2s + 3 = 0

Oder: F(s) = (2s-3)/(s^2-s-6) = (2s-3)/[(s-3)(s+2)]

Daraus folgt mithilfe der Partialbruchzerlegung, dass es zwei Konstanten A und B gibt, so dass

(2s-3)/[(s-3)(s+2)] = A/(s-3) + B/(s+2)

Multipliziert man beide Seiten mit (s-3)(s+2), so folgt: 2s – 3 = A(s+2) + B(s-3)

Mit s = 3 ergibt sich A = 3/5; s = -2 liefert B = 7/5.

Damit ergibt sich dann $F(s) = L\{y(t)\} = \frac{\frac{3}{5}}{s-3} + \frac{\frac{7}{5}}{s+2}$

Für die Inverse gilt (vgl. 7.3-9) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$ - und damit folgt:

$$y(t) = \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{7}{5}e^{-2t}$$

Das ist die Lösung des oben gestellten Anfangswertproblems.

Mit MuPAD erhalten wir dieselbe Lösung:

```
• reset():
  diffgl:=y''(t)-y'(t)-6*y(t)=0://Anfangswertproblem
  transform::laplace(diffgl, t, s):
  subs(%,y(0)=2,y'(0)=-1,transform::laplace(y(t),t,s)=Y):
  L1:=solve(%,Y):
  L2:=op(op(L1([1])[1])):
  L:=op(L2,2);
  y(t):=transform::invlaplace(L,s,t)
```

```
       2 s - 3
   ---------------
   (s + 2) (s - 3)

7 exp(-2 t)   3 exp(3 t)
----------- + ----------
     5             5
```

Beispiel 2

Hier ist eine kleine Abwandlung des 1. Beispiels:

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Anfangsbedingungen: $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Lösung:

$$y(t) = e^{2t}/3 + 2e^{-t}/3.$$

Bei MuPAD schreiben wir:

- ```
  reset():
  diffgl:=y''(t)-y'(t)-2*y(t)=0:
  transform::laplace(diffgl, t, s):
  subs(%,y(0)=1,y'(0)=0,transform::laplace(y(t),t,s)=Y):
  L1:=solve(%,Y):
  L2:=op(op(L1([1])[1])):
  L:=op(L2,2);
  y(t):=transform::invlaplace(L,s,t)
  ```

Ergebnis:

```
        s - 1
   ---------------
   (s + 1) (s - 2)

2 exp(-t)    exp(2 t)
--------- + --------
    3           3
```

also dasselbe Ergebnis wie angegeben. Wir stellen fest, dass das Hauptmerkmal der LT-Methode darin liegt, die Lösung einer Diff.Gl. auf die Lösung einer algebraischen Gleichung zurückzuführen.

Die *nicht homogenen* Diff.Gln. werden genauso behandelt wie die homogenen. Es ist nicht nötig, zunächst die homogene Gleichung zu lösen.

Beispiel 3

Löse das folgende Anfangswertproblem mit der nicht homogenen Differenzialgleichung

$$y'' + 4y = \sin(3t); \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Ein derartiges Problem hatten wir bereits komplizierter in 6.4.2 gelöst. Wir stellen uns jetzt eine Masse von m = 1kg vor, die über eine Feder mit der Konstanten 4 an einer Wand befestigt ist und von der äußeren Kraft f(t) = sin(3t) zu reibungsfreien Schwingungen erregt wird. Anfangs ist die Masse in Ruhe.

Die LT der zweiten Ableitung ist L{ y'' (t)} = $s^2F(s)-sy(0)-y'(0)$ = $s^2F(s)$.
Die LT von sin(at) finden wir in einer Tafel: $F(s)= a/(s^2 + a^2)$. In unserem Fall ist $a= 3 \rightarrow F(s) = 3/(s^2 +9) \rightarrow s^2F(s) + 4 F(s) = a/(s^2 + a^2) \rightarrow F(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$

Die Partialbruchzerlegung sieht so aus: $\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+9}$
```

Wir werden A und C beide Null setzen und multiplizieren beide Seiten mit $(s^2 + 4)(s^2 + 9) \rightarrow 3 = B(s^2 + 9) + D(s^2 + 4) = (B+D)s^2 + (9B + 4D)$

Wir erhalten zwei lineare Gleichungen: $B + D = 0$
und $9B + 4D = 3 \rightarrow B = 3/5$ und $D = -3/5$

Damit ergibt sich dann $F(s) = L\{ y(t)\} = \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{5}\frac{3}{s^2+9}$; da $L\{\sin(2t)\} = 2/(s^2 + 4)$

und $L\{\sin(3t)\} = 3/(s^2 + 9)$, ergibt sich die **Lösung**

$$y(t) = (3/10)\sin(2t) - (1/5)\sin(3t)$$

Auch MuPAD liefert dieses Ergebnis:

```
• reset():
  diffgl:=y''(t)+4*y(t)= sin(3*t):
  transform::laplace(diffgl, t, s):
  subs(%,y(0)=0,y'(0)=0,transform::laplace(y(t),t,s)=Y):
  L1:=solve(%,Y):
  L2:=op(op(L1([1])[1])):
  L:=op(L2,2);
  y(t):=transform::invlaplace(L,s,t)
```

```
                3
        -----------------
           2          2
        (s   + 4) (s   + 9)

       3 sin(2 t)    sin(3 t)
       ---------- - --------
           10           5
```

Zur Übung fast dasselbe Problem

Beispiel 4

$$y'' + y = \sin(2t)$$

Anfangsbedingungen: $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

Lösung:

Im vorigen Programm ersetzen wir die zweite Zeile durch

```
diffgl:=y''(t)+y(t)=sin(2*t):
```

und erhalten das Ergebnis: $y = 2\cos(t) + (5/3)\sin(t) - (1/3)\sin(2t)$

Beispiel 5

Bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems mit MuPAD und zeichne den Graphen der Lösungsfunktion

$$y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t} \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Vgl. auch 7.3-9

Lösung:

- ```
  reset():
  diffgl:=y''(t)+4*y'(t)+4*y(t)=t^2*exp(-2*t):
  transform::laplace(diffgl, t, s):
  subs(%,y(0)=0,y'(0)=0,transform::laplace(y(t),t,s)=Y):
  L1:=solve(%,Y):
  L2:=op(op(L1([1])[1])):
  L:=op(L2,2):
  y(t):=transform::invlaplace(L,s,t)
  ```

Ergebnis:

$y(t)= t^4 e^{-2t}/12$

- ```
  f:=plot::Function2d(y(t),t=0..10,AxesTitles=["t","y"])
  :
  
        plot(f)
  ```

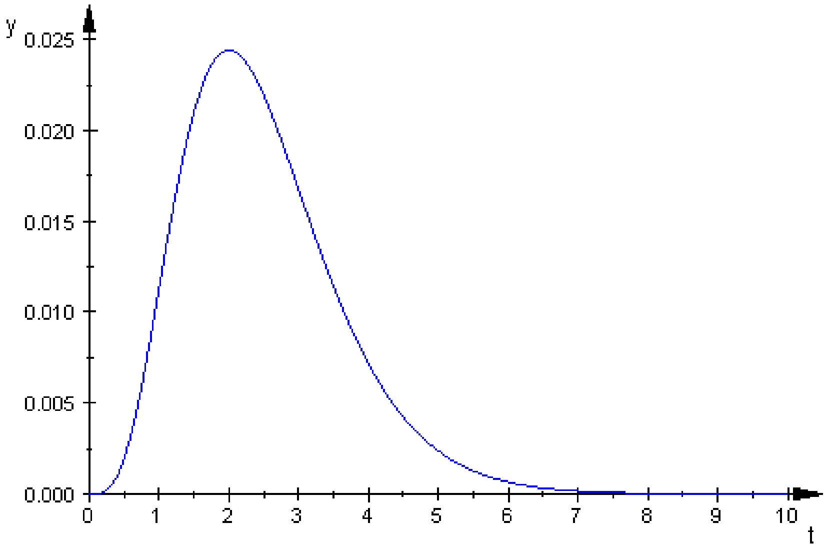

Fig.: 7.3_1

Oben, 7.3-5, benutzten wir die Regel, dass die LT F(s) der zweiten Ableitung gegeben ist durch L{ y'' (t)} = $s^2F(s)-sy(0)- y'(0)$ = $s^2F(s)$, falls y(0) = y'(0)=0.

MuPAD kann die Anfangswertprobleme lösen, weil es diese und viele andere Regeln gespeichert hat, z.B.

L{y'(t)} = sL{y(t)} - y(0) = sF(s) - y(0),

L{y''(t)} = s^2 F(s) -s y(0) - y'(0),

L{y'''(t)} = s^3 F(s) -s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)   usw.

MuPAD zeigt diese –und andere- Regeln mit der Anweisung
transform::laplace

```
reset()://Transformierte der Ableitungen
transform::laplace(y'(t),t,s);
transform::laplace(y''(t),t,s);
transform::laplace(y'''(t),t,s);
```

Ergebnisse:

```
s transform::laplace(y(t), t, s) - y(0)
s^2 transform::laplace(y(t), t, s) - D(y)(0) - s y(0)
s^3 transform::laplace(y(t), t, s) -s^2 y(0)-D(D(y))(0)-s
D(y)(0)
```

(Im Falle eines Systems von Differentialgleichungen müssen wir jede Gleichung für sich transformieren.)

Natürlich mussten alle *Laplace-Transformierten*, die wir in Tabellen finden, irgendwann einmal wirklich durch Integration von Gl. (1) berechnet werden. Anhand eines ausführlichen Beispiels möchte ich diesen Integrationsvorgang einmal demonstrieren. (Vgl. T.M. Creese - R.M. Haralick, *Differential Equations for Engineers*, 1978 McGraw-Hill,Inc., p. 192ff)

Gegeben sei $f(t) = e^{at}$. Berechne die *Laplace-Transformierte* von f mithilfe der Definition (1).

Lösung: $L\{\mathbf{e^{at}}\}(s) = \int_{0,\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int_{0,\infty} e^{(a-s)t}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{0,T} e^{(a-s)t}dt$

$= \lim_{T\to\infty}[(e^{(a-s)t})/(a-s)]_{0\to T} = \lim_{T\to\infty}(e^{(a-s)T}/(a-s) - 1/(a-s))$

$= 1/(s-a) + \lim_{T\to\infty}(e^{(a-s)T}/(a-s)) = \mathbf{1/(s-a)}$

wenn $a - s < 0$, d.h. wenn $s > a$

Damit haben wir mit $L\{e^{at}\}(s) = 1/(s-a),\ s > a$ die *Laplace-Transformierte* von $f(t) = e^{at}$ gefunden.

Mit einer ähnlichen Rechnung findet man die LT von $f(t) = t\,e^{at}$ als $1/(a-s)^2, s>a$

und allgemeiner: $f(t) = t^n e^{at} \rightarrow L\{t^n e^{at}\}(s) = n!/(s-a)^{n+1}$ usw.

Beispiel 6 (*Gamma-Funktion*)

Betrachte die *Laplace-Transformierte* von t^k, mit $k>-1$.
(Falls k gleich ist einer positiven ganzen Zahl n, zeige dass $L\{t^n\} = n!/s^{n+1}$).

Lösung:

Dieses Beispiel zeigt, dass die Methode der LT auch bei theoretischen Betrachtungen eingesetzt werden kann, denn die TL führt uns zu einer Verallgemeinerung des *Fakultäts*-Begriffs, bei der man auch die "Fakultät" von beliebigen reellen Zahlen > -1 und sogar von komplexen Zahlen mit Re(z) >0 bilden kann.

Der Parameter k muss > -1 sein, damit das Integral $\int_{0,\infty} t^k e^{-st} dt = L\{t^k\}$ nicht für t = 0 divergiert. Mit dieser Restriktion für k konvergiert das Integral, falls s>0.

Wenn k eine positive ganze Zahl oder 0 ist, kann das Integral leicht berechnet werden:

$$\int_{0,\infty} e^{-st}dt = 1/s; \quad \int_{0,\infty} t\, e^{-st}dt = 1/s^2; \quad \dots (s>0)$$

Allgemein kann man zeigen (Partielle Integration), dass für s>0 gilt

$$\int_{0,\infty} t^k e^{-st}\, dt = k/s \int_{0,\infty} t^{k-1} e^{-st}\, dt \qquad (2)$$

(Für die partielle Integration mit der "Produktregel" haben wir $t^k \rightarrow kt^{k-1}dt$ und $e^{-st}dt \rightarrow -1/s\, e^{-st}$.
Die Integration liefert $\int_{0,\infty} k^t e^{-st}dt = [-t^k e^{-st}/s]_{0,\infty} + k/s \int_{0,\infty} t^{k-1}e^{-st}dt$. Für s>0 und k>0 ist die Klammer Null.)

Durch Induktion zeigt man für s >0

$$\int_0^\infty t^k e^{-st} dt = \frac{k}{s}\frac{k-1}{s}\dots\frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}} \qquad (3)$$

Für s = 1 ergibt sich $k! = \int_{0,\infty} t^k e^{-t}\, dt$.

Wir haben damit eine Möglichkeit, den Fakultätsbegriff zu verallgemeinern, d.h. wir können $k! = \int_{0,\infty} t^k e^{-t}\, dt$ benutzen, um *k! für eine beliebige reelle Zahl > - 1 zu definieren.*

Diese verallgemeinerte Fakultät bezeichnet man mit Γ(k+1) (Gamma).

Die *Gamma -Funktion* Γ(k) ist durch das folgende Integral definiert (zweites Eulersches Integral):

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt, \quad k > 0; \qquad (4)$$

Falls k positiv ganzzahlig oder Null ist, haben wir Γ(k+1) = k!
Das Integral von $L\{t^k\}$ kann in Funktion der Gamma-Funktion ausgedrückt werden:

$$\int_0^\infty t^k e^{-st} dt = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}, \quad s > 0 \qquad (5)$$

Damit besagt Gl.(2), dass $\Gamma(k+1)/s^{k+1} = k/s\ \Gamma(k)/s^k$, d.h.

$$\Gamma(k+1) = k\,\Gamma(k) \qquad (6)$$

Weitere Eigenschaften der *Gamma-Funktion* findet man in dem erwähnten Buch von *Boyce* und *DiPrima*.

7.3.3 Anwendungen von *Fourier-Reihen* (III)

In den beiden letzten Kapiteln haben wir die Anwendung von *Fourier-Reihen* (FR) im Zusammenhang mit der Wellengleichung kennengelernt. Es fehlt noch zu sehen, wie man die Technik der FR in gewissen anderen Fällen anwendet, auch bei der Auswertung von Integralen. Das ist der mühsamste Schritt bei einer Fourier-Analyse. Auch werden wir erneut die Gl. (20) aus 7.1.4 und Gl. (38) aus 7.2.2 betrachten, um ihren Ursprung genauer zu verstehen.

Wir nehmen jetzt an, f(x) sei eine (nichtperiodische) Funktion, die auf dem Intervall [0,L] definiert ist. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass es möglich ist, f durch eine Sinus- oder Kosinus-Reihe darzustellen, indem man eine ungerade bzw. gerade periodische Fortsetzung von f konstruiert

In dem folgenden Bild 7.3_3 sehen wir als Beispiel die in [0,1] definierte Funktion f(x) = x. Die Abbildung zeigt auch die Konstruktion einer geraden *periodischen* Funktion, die in [0,1] mit f(x) = x übereinstimmt. (Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine periodische Funktion zu konstruieren, die in [0,1] mit f(x) zusammenfällt, z.B. eine ungerade Sägezahnfunktion oder eine gerade Dreiecksfunkion usw. , vgl. Gl. (9) für den ungeraden Fall. Die Funktion f(x) = |x| stimmt für 0<=x<=1 ebenfalls mit f(x) = x überein.)

Wir nennen eine auf der ganzen x-Achse definierte periodische Funktion eine *periodische Fortsetzung* der gegebenen Funktion. Sie ist *gerade*, wenn f(-x) = f(x) und *ungerade*, wenn f(-x) = - f(x).

Die Funktion sin(nπx/L) ist ungerade und hat die Periode T = 2L, denn es gilt

$$\sin(n\pi\,(x+2L)/L) = \sin(n\pi x/L + 2n\pi) = \sin\,(n\pi x/L)$$

Wenn die periodische Fortsetzung *gerade* ist wie in Bild 7.3_3, so besitzt die dazugehörende Fourier-Reihe nur Kosinusterme.

Das folgende Programm zeigt, wie man eine Prozedur mit sehr vielen "if-else"-Instruktionen definieren kann.

```
• F:=proc(x)// gerade Dreiecksfunktion
  begin
  if -3<= x and x < -2 then
  -x-2
  else
  if -2 <= x and x < -1 then
  x + 2
  else
  if -1 <= x and x < 0 then
  -x
  else
  if 0 <= x and x < 1 then
  x
  else
  if 1 <= x and x < 2 then
  2 - x
  else
  if 1 <= x and x < 3 then
  x-2
  end_if
  end_if
  end_if
  end_if
  end_if
  end_if
  end_proc:
  y:=x:

F1:=plot::Function2d(F,Color=RGB::Red,x=-3..3):
F2:=plot::Function2d(y(x),Color=RGB::Blue,x=0..1):
plot(F1,F2)
```

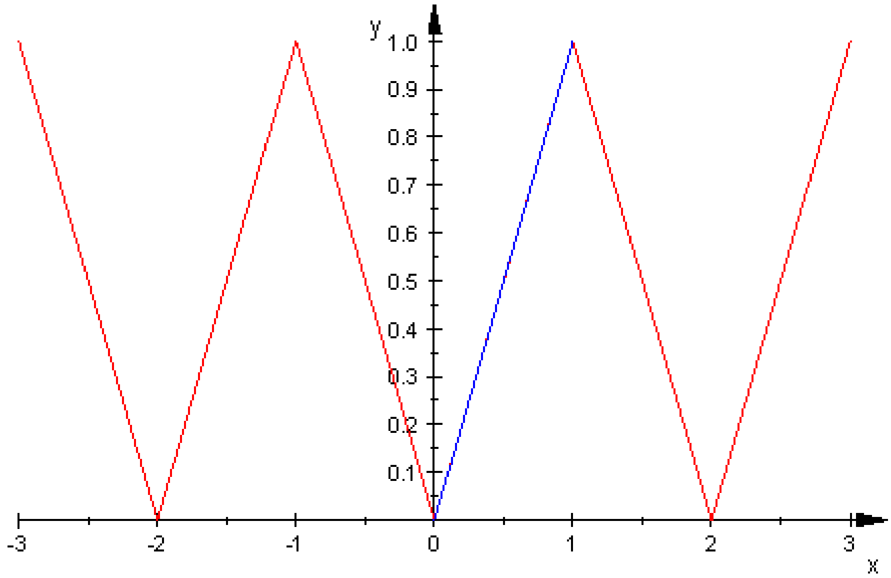

Fig.:7.3_3

Die *Fourier-Reihe* einer *geraden* Funktion enthält nur die *geraden* Kosinusfunktionen cos(nπx/L) und einen konstanten Term

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \qquad (7)$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (8)$$

Die FR einer *ungeraden* Funktion enthält nur die Sinusfunktionen sin(nπx/L) und keinen konstanten Term. Die Koeffizienten werden mit b_n bezeichnet.

(Einige Funktionen sind gerade, andere ungerade. Die Mehrzahl jedoch ist weder gerade noch ungerade, z.B. e^x. Aber jede Funktion kann als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion geschrieben werden. Zum Beispiel $e^x = 1/2\ (e^x + e^{-x}) + 1/2\ (e^x + e^{-x}) = \cosh(x) + \sinh(x)$. cosh ist gerade, sinh ist ungerade.)

Die Reihe (7) stellt die gegebene Funktion im Intervall [0,L] dar, außerhalb dieses Intervalls stellt (7), falls sie konvergent ist, die *gerade* 2L-periodische Fortsetzung der Funktion dar. (Sinusreihe des *Halbintervalls.*)

Das folgende Bild 7.3_4 zeigt die Funktion f(x) = x im Intervall [0,1] und ihre *ungerade* 2L-periodische Fortsetzung auf die ganze x-Achse. Ihr Graph zeigt eine Sägezahnwelle. Die dazugehörende FR ist eine Sinusreihe:

$$f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \qquad (9)$$

```
• reset()://Sägezahnwelle
L:=1:
A:=2*L/PI:
u:=x->A*sum((-1)^(n+1)*sin(n*PI*x/L)/n, n=1..20):
U:=plot::Function2d(u(x),x=-3..3,Color=RGB::Blue):
plot(U)
```

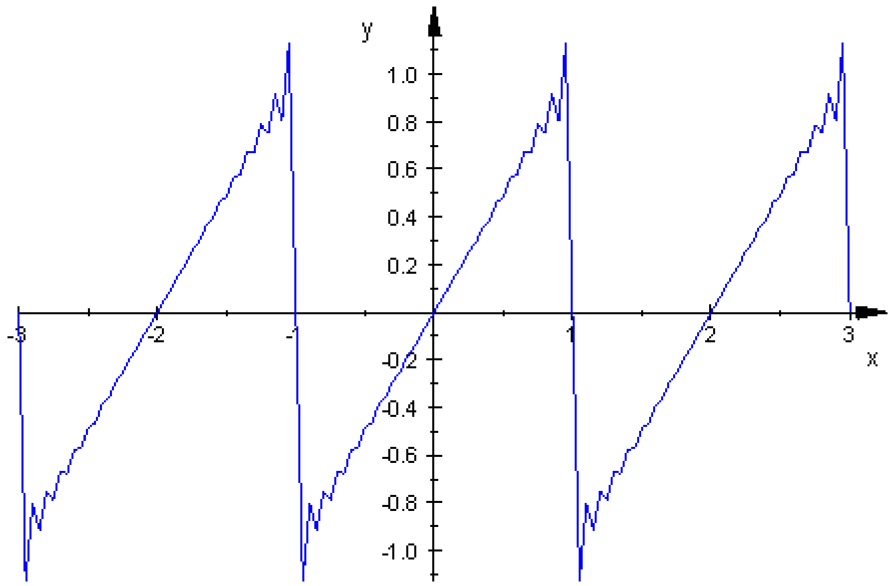

Fig.: 7.3_4

Weitere Beispiele

Beispiel 1

Betrachten wir erneut den Fall der in der Mitte *gezupften Saite* aus 7.2.2.

f(x) sei gegeben durch 2xd/L in 0 <x< L/2 und durch -2xd/L + 2d in L/2 < x < L.

Wir benutzen die Werte L= 2 und d = 0.1.

Bild 7.3_5 zeigt die Funktion f (blau) zusammen mit ihrer *ungeraden* 2L-periodischen Fortsetzung auf die ganze x-Achse.

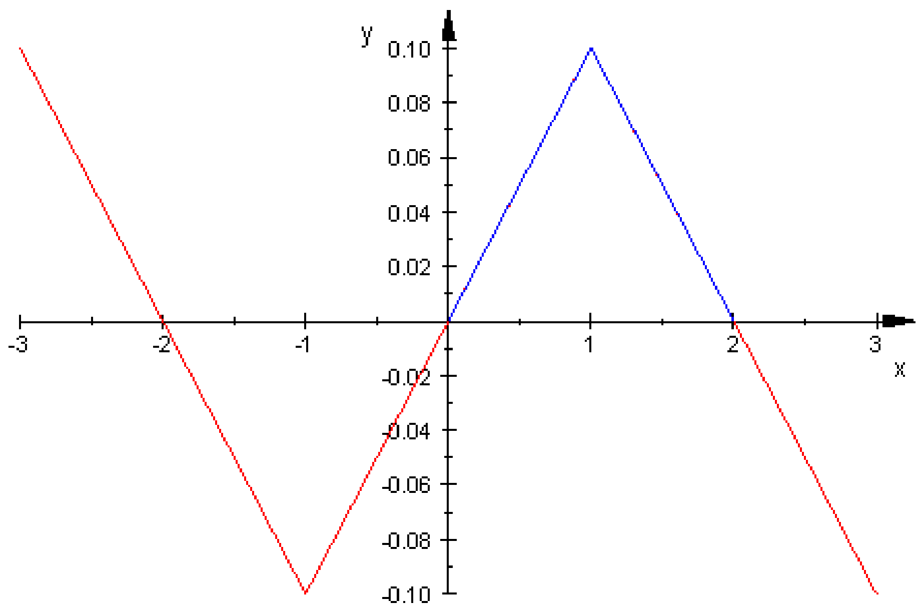

Fig.: 7.3_5

Da wir eine *ungerade* Fortsetzung gewählt haben, müssen wir eine Sinusreihe mit Koeffizienten b_n benutzen.

$b_n = 2/L \int_{0,L} f(x)\sin(n\pi x/L)dx$

$= 2/L\{2d/L\int_{0,L/2} x \sin(n\pi x/L) + 2d/L \int_{L/2,L}(L-x)\sin(n\pi x/L)dx\}$ (10)

Partielle Integration liefert:

$\int_{0,L/2} x \sin(n\pi x/L)dx = -Lx/n\pi \cos(n\pi x/L)||_{0,L/2} + L/n\pi \int_{0,L/2} \cos(n\pi x/L)dx$

$= -L^2/2n\pi \cos(n\pi/2) + L^2/n^2\pi^2 \sin(n\pi/2)$ (11)

Auf ähnliche Art folgt

$\int_{L/2,L} (L-x)\sin(n\pi x/L)dx = L^2/2n\pi \cos(n\pi/2) + L^2/n^2\pi^2 \sin(n\pi/2)$ (12)

Einsetzen von (11) und (12) in Gl. (10) liefert

$$b_n = \frac{8d}{n^2\pi^2} \text{sen}(n\pi/2) \qquad (13)$$

Die gesuchte Fourier-Reihe lautet schließlich:

$f(x) = 8d/\pi^2 [\sin(\pi x/L) - 1/9 \sin(3\pi x/L) + 1/25 \sin(5\pi x/L) - ...)$ (14)

Das ist dasselbe Ergebnis, das wir in 7.2.2, Gl. (38) für t = 0 erhielten.

```
reset():
d:=0.1: L:=2: x0:=L/2: //Reihe (20) mit x0 = L/2
A:=2*d*L^2/(x0(L-x0)*PI^2):
u:=x->A*sum(n^-2*sin(n*PI*x0/L)*sin(n*PI*x/L), n=1..20):
U:=plot::Function2d(u(x),x=-3..3,Color=RGB::Blue):
plot(U)
```

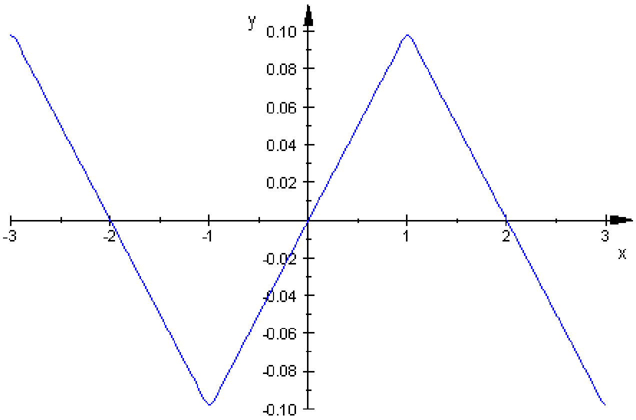

Fig.: 7.3_6

Auch Gl.(20) in 7.1.4 ist für t = 0 identisch mit unserem Ergebnis (14). Bild 7.3-6 berücksichtigt 20 Terme der Reihe (20) aus 7.1.4.

Im Grunde müssten wir dasselbe Ergebnis erhalten, wenn wir eine *gerade* Fortsetzung benutzten. Das ist richtig -und diese *gerade* Fortsetzung konvergiert für die im Intervall [0,1] gegebene Funkton schneller als die Sinusreihe.

Im Allgemeinen wird die Form der Fortsetzung von der Anwendung bestimmt, für die sie geplant ist.

In vielen Fällen, z.B. in der Quantenmechanik, benötigen wir die **komplexe Form** der Fourier-Reihe

Man kann diese Form dadurch erhalten, dass man sin und cos durch die folgendenden Definitionen ersetzt

$$\sin nx = (e^{inx} - e^{-inx})/2i \qquad (15)$$

$$\cos nx = (e^{inx} + e^{-inx})/2 \qquad (16)$$

Beispiel 1:

$$f(x) = 1/2 + 2/\pi\ (\sin x/1 + \sin 3x / 3 + \sin 5x /5 + ...) \qquad (17)$$

geht über in die folgende Reihe mit e^{inx} und e^{-inx}:

$$f(x) = 1/2 + 1/i\pi\ (e^{ix}/1 + e^{3ix}/3 + e^{5ix}/5 + ...) + 1/i\pi\ (- e^{-ix}/1 - e^{-3ix}/3 - e^{-5ix}/5 - ...) \qquad (18)$$

Man kann zeigen, dass man die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe mit nur einer Formel berechnet:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \qquad (19)$$

Beispiel 2

Berechne die komplexe Fourier-Reihe für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0 \\ 1, 0 < x < \pi \end{cases} \qquad (20)$$

Lösung

$c_n = 1/2\pi \int_{-\pi,0} e^{-in\pi} \cdot 0 \cdot dx + 1/2\pi \int_{0,\pi} e^{inx} \cdot 1 \cdot dx$

$= 1/2\pi\, [e^{inx}/-in]_0^{\pi} = (-2\pi in)^{-1} (e^{-in\pi} - 1) = 1/\, in\pi$, n ungerade
$= 0$ für gerade $n \neq 0$

$c_0 = 1/2\pi \int_{0,\pi} dx = 1/2$

Die gesuchte Reihe lautet

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx} \qquad (21)$$

und mit den Koeffizienten folgt

$f(x) = 1/2 + 1/i\pi\, (e^{ix}/1 + e^{3ix}/3 + e^{5ix}/5 + ...) + 1/i\pi\, (- e^{-ix}/1 - e^{-3ix}/3 - e^{-5ix}/5 - ...)$

d.h. erneut die Reihe (18).

Die drei Funktionen sin nx, cos nx und e^{inx} haben die Periode 2π.

Im Falle des Intervalls [0,L] haben wir für c_n die Formel

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx \qquad (22)$$

Statt (21) gilt hier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{in\pi x}{L}} \qquad (23)$$