7.2 Wellen II

7.2.1 Neue Herleitung der Wellengleichung, ausgehend von den Eigenschaften des Mediums

Wir setzen das Studium der Wellen fort. Im letzten Paragrafen erwähnte ich, dass die Wellengleichung auch hergeleitet werden kann, indem man sich auf die Eigenschaften des Mediums stützt, in dem die Welle erzeugt wird und in dem sie sich ausbreitet. Das betrachtete Medium war bisher eine Saite.

Zunächst leiten wir erneut Gl. (4) des Paragrafen 7.1.3 her:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Anschließend beschäftigen wir uns mit der *analytischen* Lösung dieser partiellen Differenzialgleichung. (Die *d´Alembertsche Formel,* Gl. (15) des vorigen Paragrafen, war die allgemeine *formale* Lösung.)

Fig. 7.2_1 zeigt ein elementares Stück der Länge dl einer Saite.

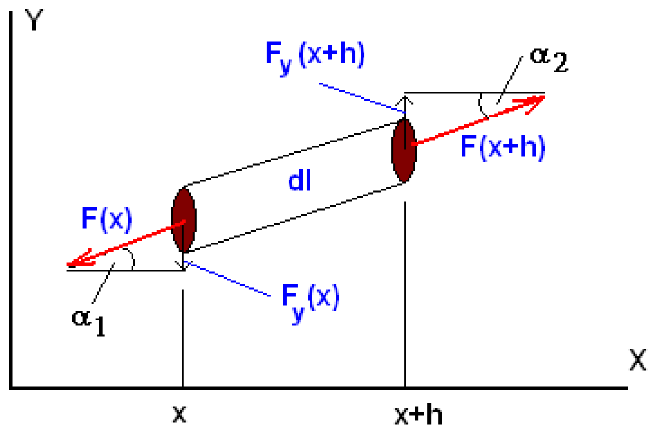

Fig. 7.2-1

Bild 7.2-1 zeigt ein Volumenelement der Saite in einem typischen Schwingungszustand. Da die Verschiebung in y-Richtung extrem klein ist im Vergleich zur Saitenlänge L, wird die Längenänderung der Saite keinen Einfluss haben auf die Saitenspannung $\sigma = F/A$. A ist der Saitenquerschnitt. Daher sind die Kräfte, die an den Enden des elementaren Saitenstücks dl wirken, praktisch gleich, d.h. $F(x) = F(x + h)$. Die Masse des Elements ist $dm = \rho A dl \approx \rho A h$. Außerdem nehmen wir an, dass dm so klein ist, dass wir keine Gewichtskraft zu berücksichtigen haben. Die Restitutionskraft ist $F_r = F_y(x+h) - F_y(x) = F\sin\alpha_2 - F\sin\alpha_1$.

Da die Verschiebungen so unbedeutend sind, können wir schreiben

$$\sin\alpha_1 = \tan\alpha_1 \quad \text{und} \quad \sin\alpha_2 = \tan\alpha_2 .$$

Mit $\tan\alpha_2 = \partial y(x + h)/\partial x$ und $\tan\alpha_1 = \partial y(x)/\partial x$ erhalten wir

$$F_r = \frac{\frac{\partial y(x+h)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x}}{h} \frac{F}{\rho A} dm \qquad (3)$$

Wenn h sehr klein wird, geht der "große" Bruch auf der rechten Seite von (3) in die zweite Ableitung über. Wir schreiben

$$F_r = \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} \sigma \frac{dm}{\rho}$$

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz bedeutet dies

$$dm \frac{\partial^2 y(x)}{\partial t^2}$$

Die Bewegungsgleichung des Saitenelements lautet damit

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ com } c^2 = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{F}{A\rho} \qquad (4)$$

Das ist die allgemeine Form der Gleichung von Wellen, die sich der x-Achse entlang bewegen. (Wir benutzen aus Gründen der Einfachheit den Buchstaben y anstelle von η. Das portugiesische "com" bedeutet *mit*. c ist die Phasengeschwindigkeit der Welle. die "Wellenfunktion" y ist eine Funktion von x und t.)

Gl. (4) hat analoge Formen in zwei oder drei Dimensionen. Im Falle dreier Dimensionen ist es üblich, den griech. Buchstaben Ψ (Psi) anstelle von y zu benutzen:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} := \nabla^2\Psi := \Delta\Psi \qquad (5)$$

Der Differentialoperator ∇^2 oder Δ := div grad heißt *Laplace-Operator* (nach *P.S.* de *Laplace*, 1749-1827). Es gilt

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad . \quad (6)$$

Der "Laplaciano" erlaubt eine einfache Schreibweise der Wellengleichung.

7.2.2 Lösung mit Fourier-Reihen (II)

Gl. (4) ist eine partielle Differenzialgleichung. Es gibt keine allgemein gültige Technik, um derartige Gleichungen zu lösen, aber sie lassen sich in vielen Fällen mithilfe der Methode der *Separation der Variablen* lösen. Man sucht bei dieser Methode Lösungen in Produktform, bei der jeder Faktor nur von einer Variablen abhängt. Wir setzen daher

$$y(x,t) = X(x)\cdot T(t) \qquad (7)$$

Mit Hilfe dieser Variablentrennung erhalten wir zwei gewöhnliche Differenzialgleichungen. Wenn wir dieses Produkt in Gl. (4) einsetzen, ergibt sich

$$X''(x)/X(x) = c^{-2}\, T''(t)/T(t) \qquad (8)$$

Wir wollen, dass diese Gleichung für alle x in [0,L] gültig sei, und zwar für alle Zeiten t>=0. Aber, da die Variablen x und t unabhängig sind, müssen beide Seiten von (8) gleich einer Konstanten sein (dies kann man formal zeigen).

Wir erhalten die folgenden gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (9)$$

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad . \quad (10)$$

Die Separationskonstante wurde als $-\lambda$ geschirieben, weil sich dies als nützlich erweist. (Dieses Lambda hat nichts mit der Wellenlänge zu tun.) Alle Lösungen von (9) müssen die folgenden Randbedingungen erfüllen

$$y(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0 \qquad (11)$$

$$y(L,t) = X(L)\cdot T(t) = 0 \qquad (12)$$

Da wir keine Lösungen suchen, die identisch Null sind, verlangen wir $T(t) \neq 0$. Für die Funktion $X(x)$ bedeutet das die Bedingung

$$X(0) = X(L) = 0. \qquad (13)$$

An dieser Stelle haben wir alle Voraussetzungen festgelegt, die zu einem *Sturm -Liouville*-schen Randwertproblem gehören, nämlich

eine lineare Diff. Gl. zweiter Ordnung,
ein Intervall und
zwei Randbedingungen

Hier sind die drei Voraussetzungen erneut zusammengestellt:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (14)$$

$$0 <= x <= L \qquad (15)$$

$$X(0) = X(L) = 0 \qquad (16)$$

Wir werden sehen, dass dieses Problem, also Gleichungen (14), (15), (16), nicht für alle Werte von λ Lösungen hat. Nur für gewisse λ-Werte (die *Eigenwerte* des Problems, vgl. 4.4.1 und 6.5.4) gibt es X-Funktionen, die den Gleichungen (14)-(16) genügen. Diese Funktionen sind die *Eigenfunktionen* des *Sturm-Liouville*-schen Randwertproblems.

Im Augenblick beschäftigen wir uns nicht mit der Zeitgleichung (10) und konzentrieren uns auf die Raumgleichungen (14)-(16).

Zuerst untersuchen wir die Lösungen für $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$.

$\lambda = 0$

Die Lösung von (14) ist einfach $X(x) = ax + b$, worin a und b beliebige Konstanten sind. Wegen (16) gilt $X(0) = a0 + b = 0$, d.h. $b = 0$. Auch gilt $X(L) = aL + b = aL = 0$. Da $L \neq 0$, ergibt sich auch $a = 0$.

Also ist X identisch –d.h. für alle x- Null. Aber an dieser Lösung haben wir kein Interesse.

$\lambda < 0$

In diesem Fall haben wir als allgemeine Lösung von (14) den Ausdruck

$$X(x) = ae^{x\sqrt{-\lambda}} + be^{-x\sqrt{-\lambda}} \qquad (17)$$

Zusammen mit den Randbedingungen (16) ergibt sich

$$(e^{-L\sqrt{-\lambda}} - e^{L\sqrt{-\lambda}})b = 0.$$

Da die Klammer von Null verschieden ist, muss b = 0 gelten. Damit haben wir eine weitere unerwünschte Lösung des *Sturm-Liouville*-Problems, denn a ist ja ebenfalls Null.

Unsere Hoffnung ist, dass wir mit $\lambda > 0$ brauchbare Ergebnisse erhalten werden.

$\lambda > 0$

Hier erhalten wir als allgemeine Lösung

$$X(x) = a\cos x\sqrt{\lambda} + b\,\mathrm{sen}\,x\sqrt{\lambda} \qquad (18)$$

Die Randbedingungen (16) lauten jetzt

$$X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a = 0 \quad \text{und} \quad X(L) = b\sin L\sqrt{\lambda} = 0$$

Aber b kann nicht Null sein, denn das ergäbe wieder X(x) = 0. Uns bleibt nur, alle Werte von λ zu suchen, für die $\sin L\sqrt{\lambda} = 0$.

Wir sehen, dass das der Fall ist für

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L};\; n = 1,2,3,\ldots \qquad (19)$$

Diese Werte $\lambda := \lambda_n$, die zu nicht trivialen Lösungen des *St.-L.*-Problems führen, sind die *Eigenwerte* des Problems:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 ; n = 1, 2, 3 \ldots \qquad (20)$$

Die *Eigenfunktionen* sind

$$X_n(x) = b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad (21)$$

Die Eigenfunktionen enthalten einen unbestimmten Faktor b_n. Mithilfe der trigonometrischen Beziehung

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = \frac{1}{2} \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} - \frac{1}{2} \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} \qquad (22)$$

können wir zeigen, dass

$$\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx = 0; n \neq m \qquad (23)$$

Diese Gleichung drückt die Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen aus.

Für n = m können wir zeigen, dass das Integral

$$\int_0^L b_n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (24)$$

gleich ist b_n^2 L/2. Mit Hilfe der Beziehung

$$1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} \qquad (25)$$

ergibt sich

$$\frac{b_n^2}{2} \int_0^L dx - \frac{b_n^2}{2} \int_0^L \cos \frac{2n\pi x}{L} dx = \frac{b_n^2}{2} L \quad . \qquad (26)$$

Der Faktor b_n ist immer noch beliebig. Wir geben b_n^2 den Wert 2/L, denn damit liefert das Integral (24) den Wert 1.
Diese Festlegung des Faktors b_n nennt man *Normalisierung* der Eigenfunktionen. Die Menge der Eigenfunktionen mit den Eigenschaften (23) und (27)

$$\int_0^L X_n^2(x)dx = 1 \qquad (27)$$

bildet ein auf 1 normiertes System. (Die Eigenfunktionen bilden eine vollständige Menge, das heißt, dass jede Funktion nach Eigenfunktionen entwickelt werden kann.)

Wir erinnern uns, dass die Separationskonstante als $-\lambda$ geschrieben wurde. Da $-\lambda$ negativ sein muss, schreibt man meist $-\lambda = -k^2$, und man nennt auch die reellen Zahlen

$$k_n = n\pi/L \qquad (28)$$

Eigenwerte. Vgl. Gl. (20).

Kehren wir jetzt zur Zeitgleichung (10) zurück

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \qquad (10)$$

mit den Bedingungen (1) und (12).

Die allgemeine Lösung von (10) ist $T(t) = c \cos kct + d \sin kct$, oder mit (28)

$$T_n(t) = c_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t \qquad (29)$$

Die Funktionen $y(x,0)$ und $\partial y(x,0)/\partial t$ sind die Anfangswerte des Problems. Sie werden uns helfen, die Konstanten c_n und d_n zu bestimmen. Im vorigen Abschnitt benutzten wir $f(x) := y(x,0)$ und $g(x) := \partial y(x,0)/\partial t$.

Damit haben wir also die folgende partikuläre Lösung des Problems der schwingenden Saite gefunden:

$$y_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(c_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t\right) \qquad (30)$$

Die Funktionen $y_n(x,t)$ werden "Normalmoden" genannt, und man erhält die allgemeine Lösung als Linearkombination solcher Normalmoden (vgl. 6.5.2) :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) \tag{31}$$

Jetzt fehlt noch die Bestimmung der Konstanten c_n und d_n, die "Fourier-Koeffizienten". (Gl. (31) stellt eine "ewige" Bewegung dar, was daran liegt, dass wir keine Energieverlustterme berücksichtigt haben. Gl. (31) ist demnach nur eine angenäherte Beschreibung des Verhaltens einer realen Saite.)

Die beiden Anfangsbedingungen liefern

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{32}$$

und

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial y_n(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n\pi c}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{33}$$

Multipliziert man Gl. (32) mit $\sin(m\pi x/L)$ und integriert Term für Term von 0 bis L, sehen wir, dass c_n durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L y(x,0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \tag{34}$$

(In der Theorie der *Fourier*-Reihen benutzt man i. Allg. den Faktor 2/L, also ohne Wurzel). In gleicher Weise ergibt sich für d_n der Ausdruck

$$d_n = \frac{L}{n\pi c} \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \tag{35}$$

Die Reihen (32) und (33) sind die *Fourier*-Reihen für die Funktionen $f(x) := y(x,0)$, d.h. die ursprünglich Verformung der Saite, und $g(x) := \partial y(x,0)/\partial t$, d.h. die Anfangsgeschwindigkeit. Fourier war der Erste, der zeigte, dass die Koeffizienten c_n und d_n explizit berechnet werden können.

Beispiel :

Wir betrachten eine in der Mitte (x_o = L/2) um $y(x_o,0) = d$ gezupfte Saite. Da die Anfangsgeschwindigkeit an allen Punkten x Null ist, haben wir $d_n = 0$.

Die Funktion f(x) = y(x,0) ist gegeben durch

$$y(x,0) = \begin{cases} 2xd/L; \; 0 < x < L/2 \\ -2xd/L + 2d; \; L/2 < x < L \end{cases} \tag{36}$$

Für c_n erhalten wir

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\frac{2d}{L}\left[\int_0^{L/2} x \,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}dx + \int_{L/2}^{L}(L-x)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

$$= \frac{d\sqrt{2L}}{(\frac{n\pi}{2})^2}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2} \tag{37}$$

Wir sehen, dass alle Moden verschwinden werden, für die sin(nπ/2) = 0. Das sind die Normalmoden mit n = 2, 4, 6, ...

Die Mode mit n = 1 heißt *Fundamentalmode* (Grundschwingung), und die Moden mit n = 2, 3, 4, ... heißen *Harmonische* (Oberschwingungen). (Ein der Musik entnommener Begriff.)

Die Gestalt y(x,t) der Saite können wir mithilfe der ersten 5 Harmonischen annähern. Davon bleiben aber nur die mit n =1, 3, 5.

$$y(x,t) = \frac{8d}{\pi^2}\left[\mathrm{sen}\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi ct}{L} - \frac{1}{9}\mathrm{sen}\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{3\pi ct}{L} + \frac{1}{25}\mathrm{sen}\frac{5\pi x}{L}\cos\frac{5\pi ct}{L}\right] \tag{38}$$

Die relativen Amplituden sind 1, 1/9, 1/25, ... Da die Intensität der abgestrahlten "Töne" proportional zum Quadrat der Amplitude ist, ist die Stärke der ersten Harmonischen 81 mal größer als die der dritten und 625 mal stärker als die der fünften Harmonischen usw.

Für einen festen n-Wert ist der Ausdruck sin(nπx/L)cos(nπct/L) der Gl. (30) – der Faktor d_n ist wegen T'(0) =0 Null- zeitlich periodisch mit der Periode T_n = 2L/nc. Er stellt daher eine Schwingungsbewegung der Saite mit dieser Periode (oder der Frequenz f_n = nc/2L, n = 1, 2, 3, ...) dar.

Der Faktor sin(nπx/L) beschreibt die Auslenkung der Saite für die gegebene Frequenz. Die ersten sechs Auslenkungsformen (die Normalmoden) sehen wir in Bild 7.2-2. (Die Normalmoden sind im Fall einer an den Enden eingespannten Saite immer sinusförmig.)

- ```
  reset()://Normalmoden einer schwingenden Saite
  L:=1:
  werte_n:=[1,2,3,4,5,6]:
  u:=(x,t)->sin(n*PI*x/L):
  kurven:=plot::Scene2d(plot::Function2d(subs(u(x,n),
  n=werte_n[i]),Color=RGB::Green,x=0..L))$i=1..6:
  plot(kurven)
  ```

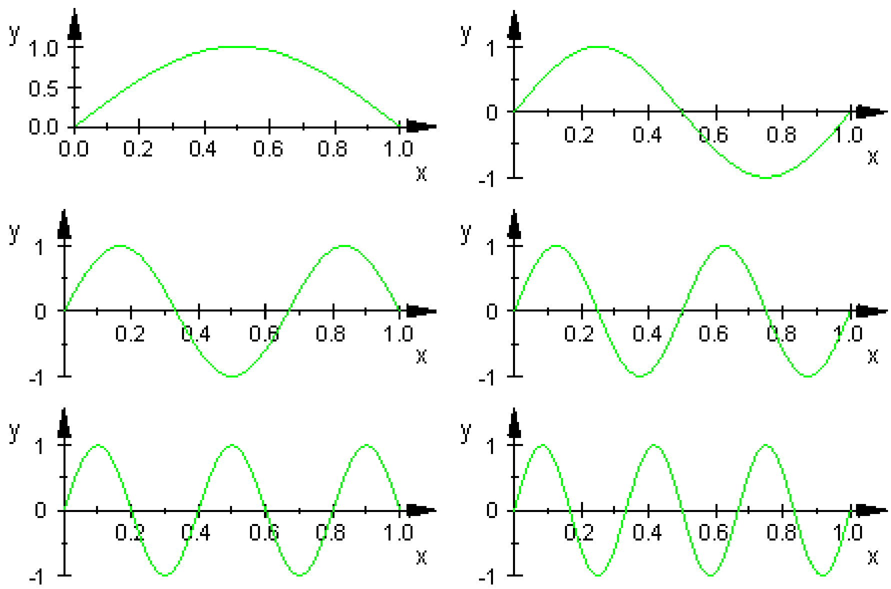

Fig.:7.2-2

Die räumliche Periode der n-ten Normalmode ist 2L/n. Sie heißt *Wellenlänge* der Mode mit der Frequenz f_n = nc/2L. (Wir benutzen hier nicht λ_n, weil dies in Gl. (20) als Separationsvariable benutzt wurde.)
  ```

Die erste Normalmode, die *Fundamentalmode* (Grundschwingng), hat die Wellenlänge 2L und die Frequenz $\pi c/L$. Die zweite Mode, die *erste Harmonische* (Oberschwingung), hat die Wellenlänge L und die Frequenz c/L usw. Die Mode der Ordnung n enthält n halbe Wellenlängen

Zum Abschluss dieses Paragrafen schreiben wir Gl. (30) in einer Form, die uns erlaubt, die *stehenden Wellen* in Bild 7.2-2 noch besser zu verstehen

Zu diesem Zweck schreiben wir den Klammerausdruck in Gl. (30) als

$$\alpha_n \cos(\omega_n t + \delta_n), \qquad (39)$$

mit $\omega_n = n\pi c/L$; $\alpha_n^2 = c_n^2 + d_n^2$; $\delta_n = -\arctan(d_n/c_n)$.

Damit ergeben sich

$$y_n(x,t) = A_n(x) \cos(\omega_n t + \delta_n), \qquad (40)$$

$$A_n(x) = (2/L)^{1/2} \alpha_n \sin(n\pi x/L) \qquad (41)$$

Für einen bestimmten Wert x beschreibt (40) eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_n und der Amplitude $A_n(x)$.

Aufgrund des Faktors $\sin(n\pi x/L)$ gibt es Stellen auf der Seite, die immer in Ruhe bleiben. Dies sind die *Knoten* der Welle. Sie treten auf, wenn $\sin(n\pi x/L)$ Null ist, d.h. für $x = mL/n$ mit $m = 1, 2, 3, ..., (n-1)$. Da keine Fortbewegung stattfindet, sagt man, dass auf der Saite eine *stehende Welle* existiert, bei der nur die Amplituden sich ändern. Die Mode der n-ten Ordnung (die n-te Oberschwingung) besitzt außer den festen Rändern noch (n-1) Knoten.

Wenn $\sin(n\pi x/L) = \pm 1$, treten maximale Amplituden (*Schwingungsbäuche*) auf. Die *Bäuche* befinden sich an den Stellen mit $x = (2m+1)L/(2n)$; $m = 0, 1, 2, 3, ..., (n-1)$. Z.B. haben wir bei der Mode mit n = 3 für m die Werte m = 0, 1, 2. Das bedeutet $x = L/6, L/2, 5L/6$. Die n-te Mode besitzt n *Schwingungsbäuche*.

Eine Momentaufnahme im Augenblick t_0 genügt den folgenden Beziehungen

$$y(x,t_0) = B(t_0) \sin(n\pi x/L) \text{ mit } B(t) = (2/L)^{1/2} \alpha_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \qquad (42)$$

Wenn t_0 ein Moment ist mit $\cos(\omega_n t_0 + \delta_n) = \pm 1$, so haben wir einen Schwingungsbauch. Für die Knotenstellen gilt $\cos(\omega_n t_0 + \delta_n) = 0$.

Die Frequenzen $f_n = \omega_n / 2\pi = nc/2L$ heißen Normalfrequenzen und sind ganzzahlige Vielfache der tiefsten Frequenz (Fundamentalfrequenz oder 1. Harmonische): $f_n = nf_1$. (Oft bezeichnet man die tiefste Frequenz mit f_0 .)

Die Formel

$$f_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{F}{A\rho}} \qquad (43)$$

wurde 1636 experimentell von *Mersenne* gefunden und enthält die drei Grundgesetze über schwingende Saiten bezüglich der Fundamentalfrequenz f_1:

1. f_1 ist umgekehrt proportional zur Saitenlänge L
2. f_1 ist prop. zur Quadratwurzel aus der Saitenspannung $\sigma = F/A$
3. f_1 ist umgekehrt prop. zur Quadratwurzel aus der Dichte ρ

Ein Pianostimmer wird normalerweise nur die Saitenspannung variieren.

Zum Schluss dieses Kapitels möchte ich noch auf folgenden wichtigen Punkt eingehen.

Die Formel von d'Alembert, Gl. (15) in 7.1.3, wurde erklärt als allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

Wenn Gl. (15) wirklich die allgemeine Lösung ist, dann muss es möglich sein, Gl. (30) als Überlagerung zweier entgegenlaufender Wellen umzuschreiben, so, wie es in Gl. (8) in 7.1.3 geschah.

Das aber ist tatsächlich möglich, denn man kann Gl. (31) so umschreiben, dass sie die Gestalt der Formel von d'Alembert erhält. Dies zeigt dann gleichzeitig, dass eine stehende Welle die Überlagerung von entgegenlaufenden Wellen ist. In der Praxis (im Experiment) kann man dies leicht durch Reflexion einer Welle an einer Wand (z.B. Spiegel) demonstrieren.

Eine ausführliche mathematische Demonstration kann man in Lehrbüchern über *Fourier Reihen* finden, z.B. in:

H.F. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions,* p. 289 ff, oder Boyce-DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, p. 323. (Amazon bietet die engl. Ausgabe von *Boyce-DiPrima* für EUR 198.05 an –neu für EUR 245 (!).... *H.F. Davis* ist bei Google schon für EUR 12.04 als E-Book zu haben.)