

7.1 Wellen I

7.1.1 Lineare Kette gekoppelter Oszillatoren

Wir betrachten eine lineare Kette gekoppelter Kügelchen (Perlen). Die Kopp-
lung geschieht durch winzige (unsichtbare) gleichartige Federn.

Wir können eine derartige Kette als Modell eines Drahtes mit kontinuierlich
verteilter Masse betrachten. Die folgende Figur 7.1-1 zeigt die Bezeichnungen,
auf die wir uns im Text beziehen werden.

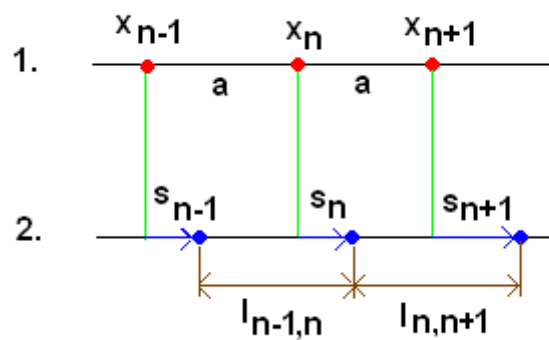


Fig.: 7.1-1

Der 1. Teil zeigt die Gleichgewichtskonfiguration, Teil 2 zeigt die Konfiguration
zur Zeit t . Der Ort der n -ten Perle ist gegeben durch $x_n = na$, $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots, a$. Ihre Lage zur Zeit t ist $r_n(t) = x_n + s_n(t) = na + s_n(t)$.

Die Entfernung zwischen den Perlen m und n ist gegeben durch

$$l_{m,n} = l_{m,m+1} + l_{m+1,m+2} + \dots + l_{n-2,n-1} + l_{n-1,n} \quad (1)$$

Die Kraft F_n , die an der n -ten Perle angreift, hängt ab von den Abständen von
den anderen Perlen. Da alle Perlen und Federn untereinander gleich sind, hat
 F_n für alle Perlen dieselbe Form.

Die Bewegungsgleichung der n-ten Perle lautet

$$m r_n'' = m s_n'' = F_n = F(\dots; l_{n-2,n}; l_{n-1,n}; l_{n,n+1}; \dots) \quad (2)$$

Aus der Figur können wir die folgenden Gleichungen zwischen Entfernungen und Verschiebungen s_n ablesen:

$$\begin{aligned} & \dots \quad \dots \quad \dots \\ & l_{n-2,n} = 2a + s_n - s_{n-2} \\ & l_{n-1,n} = a + s_n - s_{n-1} \\ & l_{n,n+1} = a + s_{n+1} - s_n \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Die Kraftfunktion ist Null, wenn alle $l_{n,n+1} = a$ sind, denn a misst den Gleichgewichtsabstand zweier Perlen. Außerdem werden wir nur kleine Verschiebungen betrachten, damit wir die Kraftfunktion durch die beiden ersten Terme der Taylor-Reihe (siehe den folgenden Paragraphen) annähern können. Für nur eine Variable können wir dann schreiben

$$F_n = F(\dots; l_{n-1,n}; \dots) = F(a) + (l_{n-1,n} - a) \frac{\partial F}{\partial l_{n-1,n}} = (s_n - s_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial l_{n-1,n}} \quad l_{n-1,n}=a$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen, bezeichnen wir die partielle Ableitung mit K_{-1} . Die Ableitung in Bezug auf $l_{n,n+1}$ wäre K_1 , die mit Bezug auf $l_{n,n+2} = 2a + s_{n+2} - s_n$ wäre K_2 , usw.

Die Taylor-Reihe in den Variablen $l_{n-2,n}; l_{n-1,n}; l_{n,n+1}$ sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} F_n &= F(\dots; 2a + s_n - s_{n-2}; a + s_n - s_{n-1}; a + s_{n+1} - s_n; \dots) \\ &= \dots; +K_{-2}(a + s_n - s_{n-2}) + K_{-1}(s_n - s_{n-1}) + K_1(s_{n+1} - s_n) + K_2(a + s_{n+2} - s_n) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Perlen $n-1$ und $n+1$ sind identisch, und ihre Kräfte auf die n-te Perle haben denselben Betrag, aber umgekehrtes Vorzeichen.

Daher gilt: $K_{-1} = -K_1$; $K_{-2} = -K_2$ usw. Die Kraft auf die n-te Perle ist also

$$F_n = K_1(s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) + K_2(s_{n-2} - 2s_n + s_{n+2}) + \dots \quad (5)$$

Die Bewegungsgleichung der n-ten Perle lautet demnach

$$m s_n'' = K_1(s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) + K_2(s_{n-2} - 2s_n + s_{n+2}) + \dots \quad (6)$$

Wir sehen deutlich, dass die Bewegung der n-ten Perle abhängig ist von den Bewegungen der anderen Perlen. Die Gleichungen für $n = \dots; -1, 0, 1, 2, \dots$ sind gekoppelt und können nicht getrennt gelöst werden.

Um weiter zu kommen, müssen wir weitere Vereinfachungen vornehmen. Wir könnten z.B. berücksichtigen, dass der Einfluss weiter entfernter Perlen geringer ist, als der von nahe gelegenen. Die Kräfte der näheren Nachbarn werden von κ_1 bestimmt, und wir können annehmen, dass die Ableitungen κ_n mit $n > 1$ vernachlässigt werden können (κ_n bestimmt die Kräfte zwischen Perlen, die sich in einer Entfernung von $n \cdot a$ befinden).

Die Anwendung dieser Annahmen hat zur Folge, dass die Gln. (6) entkoppelt werden -und wir sehen, dass

$$ms_n'' = \kappa(s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) \quad (7)$$

einfache harmonische Schwingungen der Teilchen um ihre Gleichgewichtslagen beschreiben (wir schreiben jetzt κ anstelle von κ_1). Vgl. 3.6.3, 4.7.4, 5.3.3, 6.2 . Wir könnten demnach Lösungen folgender Gestalt suchen:

$$s_n(t) = A e^{i\omega t} \quad (8)$$

Aber das ist nur erlaubt, wenn die Teilchen mit gleicher Amplitude und gleicher Phase schwingen. Außerdem sehen wir, dass (8) nicht mit den Bewegungsgleichungen (7) verträglich ist. Denn die linke Seite von (7) würde $-A\omega^2 e^{i\omega t}$ ergeben, während die rechten Seiten Null ergäben.

Wenn wir aber annehmen, dass die Schwingungen zweier benachbarter Teilchen nicht phasengleich sind, d.h., wenn gilt $s_{n+1}(t) = s_n(t) e^{-ika}$ (9) mit $s_0(t) = Ae^{i(\omega t - nka)}$, was gleich ist mit $s_n(t) = Ae^{i(\omega t - nka)}$ (10), dann erfüllen wir die Bewegungsgleichungen. Denn wenn wir (10) in (7) einsetzen, sehen wir, dass beide Seiten von (7) gleich sind, wenn gilt

$$m\omega^2 = \kappa(2 - e^{ika} - e^{-ika}) = 2\kappa(1 - \cos ka). \quad (11)$$

Das bedeutet, dass Gl. (10) eine Lösung ist, falls

$$\omega = 2(\kappa/m)^{1/2} \sin(ka/2) \quad (12)$$

Eine *reelle* Lösung von Gl. (7) lautet $s_n(t) = A \cos(\omega t - kna)$, d.h.

$$s_n(t) = A \cos(\omega t - kx_n) \quad (13)$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung einer Störung in Form einer **Welle** entlang der linearen Kette.

Die kürzeste Entfernung zwischen phasengleichen Oszillatoren wird *Wellenlänge* λ genannt.

Wenn wir uns daran erinnern, dass die Kosinusfunktion gerade ist, so erhalten wir statt (13) auch

$$s_n(t) = A \cos(kx_n - \omega t) \quad (14)$$

Das Argument der Kosinusfunktion wird *Wellenphase* genannt.

Für einen Beobachter, der sich in Übereinstimmung mit einer maximalen Auslenkung (oder mit einer anderen Phase der Auslenkung) der Kette entlang bewegt, ist das Argument der Kosinusfunktion immer gleich. Die Geschwindigkeit des Beobachters ist in jedem Augenblick gleiche der Geschwindigkeit der Phase, die er beobachtet. Daher ist die *Phasengeschwindigkeit* gegeben durch

$$c := v_f = x_n/t = \omega/k \quad (15)$$

Gl. (15) ist gleichzeitig die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

Um die Strecke λ zu durchlaufen, braucht die Welle die Zeit $T = 1/f = 2\pi/\omega$. Wir haben daher

$$c = \lambda f = \lambda\omega/2\pi, \quad (16)$$

was bedeutet, dass gilt $k = 2\pi/\lambda$ (17)

T ist die Periode der Welle. Die Größe k heißt *Wellenzahl*. (Nicht zu verwechseln mit der Federkonstanten k .)

7.1.2 Taylor-Reihe mit MuPAD

(Englischer Mathematiker, 1685 - 1731)

Ehe wir die Diskussion über Schwingungen und Wellen weiterverfolgen, sind einige Betrachtungen über MuPAD-Techniken nützlich, die man beim Umgang mit den Reihen von *Taylor* und *MacLaurin* (Colin MacLaurin, 1698 - 1746) einsetzen kann.

Der Satz von Taylor erlaubt uns, eine gegebene Funktion f in der Form einer Potenzreihe auszudrücken, nämlich als

$$f(x) = f(a) + f'(a)/1! \cdot (x - a) + f''(a)/2! \cdot (x - a)^2 + \dots \quad (1)$$

Diese Gleichung ist die *Taylor-Reihe* um die Stelle $x = a$.

MuPAD liefert uns die allgemeine Entwicklung einer Funktion f , z.B. bis zur 3. Ordnung, mithilfe der Funktion `series(f(x), x=a, 3)`

$$f(a) - f'(a) \cdot (a - x) + \frac{f''(a) \cdot (a - x)^2}{2} + O(-(a - x)^3)$$

Für $a = 0$ erhalten wir die *MacLaurin-Reihe* von f . Auch die Substitution $t = x - a$ reduziert eine Taylor-Reihe auf eine Maclaurin-Reihe.

Mithilfe eines *Restgliedes* R_n schreibt man die Entwicklung für jedes n auch als

$$f(x) = f(a) + f'(a)/1! \cdot (x - a) + f''(a)/2! \cdot (x - a)^2 + \dots + f^{(n)}(a)/n! \cdot (x - a)^n + R_n,$$

Die Funktion $f(x) = f(a) + f'(a)/1! \cdot (x - a) + f''(a)/2! \cdot (x - a)^2$ heißt *Taylor-Polynom* zweiter Ordnung der Funktion $f(x)$ an der Stelle a . Man spricht auch von einer quadratischen Näherung von $f(x)$ an der Stelle a .

Um eine abgeschnittene Reihe zu erhalten, können wir z.B. schreiben

- `Series::Puisseux(1/x, x = 1, 5);`
`expr(%)`

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + O((x-1)^5)$$

$$(x-1)^2 - x - (x-1)^3 + (x-1)^4 + 2$$

oder kürzer

- `taylor(1/x, x=1, 5)`

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + O((x-1)^5)$$

- `expr(%)`

$$(x-1)^2 - x - (x-1)^3 + (x-1)^4 + 2$$

Die Funktion `taylor` liefert eine gekürzte (abgeschnittene) Taylor-Reihe und gibt die Ordnung des Restgliedes an. Mit der Funktion `expr` kann man das Restglied entfernen und erhält ein Taylor-Polynom der Ordnung n für die Funktion f in x = a.

`taylor(1/x, x=1, 5)` berechnet die Potenzreihe von 1/x um den Punkt x = 1 bis zum Term mit x⁴. Vgl. auch die folgende Möglichkeit:

- `series(exp(x), x=1, 6)`

$$e + e \cdot (x-1) + \frac{e \cdot (x-1)^2}{2} + \frac{e \cdot (x-1)^3}{6} + \frac{e \cdot (x-1)^4}{24} + \frac{e \cdot (x-1)^5}{120} + O((x-1)^6)$$

Es handelt sich um die Potenzreihe von e^x um x = 1 bis zur Ordnung 5.

Entwicklung von ln(x) in eine Taylor-Reihe um x=1 bis zur Ordnung 3 :

- `l:=series(ln(x), x=1, 3)`

$$x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + O((x-1)^4)$$

Vergleiche

- `taylor(e^x, x=0, 5)`

$$1 + x \cdot \ln(e) + \frac{x^2 \cdot \ln(e)^2}{2} + \frac{x^3 \cdot \ln(e)^3}{6} + \frac{x^4 \cdot \ln(e)^4}{24} + O(x^5)$$

- `subs(%, ln(e)=1)`

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

mit

- `taylor(exp(x), x=0, 5)`

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

Um den n-ten Koeffizienten einer Reihe s zu erhalten, stellt MuPAD die Funktion `coeff(s, n)` zur Verfügung.

Beispiel: `s:=series(exp(x), x=0, 5)`

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

- `coeff(s, 4)`

$$\frac{1}{24}$$

Das folgende Programm zeigt uns anschaulich, worin die Näherungsdarstellung einer gegebenen Funktion in der Umgebung eines Punktes a durch ein Taylor-Polynom besteht.

- `reset() //Taylor-Polynom`
`PR:=Dom::Polynomial(Dom::Numerical):`
`Ord:=3:P:=1://Polynom der Ordnung 3 im Punkt x=1`
`f:=PR(taylor(sin(x), x=P, Ord)):`
`f1:=plot::Function2d(f, x=-4..4) //Taylor-Polynom`
`f2:=plot::Function2d(sin(x), Color=RGB::Red, x=-4..4):`
`punkt:=plot::Point2d(P, sin(P), Color=RGB::Green,`
`PointSize = 3*unit::mm):`
`plot(f1, f2, punkt, ViewingBoxYRange=-3..2)`

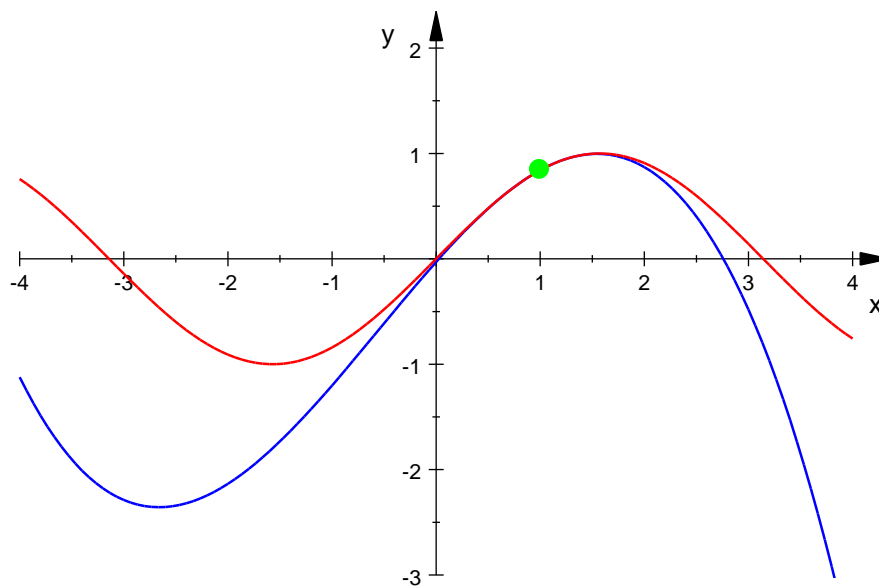


Fig.: 1

Ich erwähnte oben das *Restglied*. Es ist eine Formel, mit der man den Fehler abschätzen kann, den man begeht, wenn man eine Reihe abschneidet.

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (2)$$

Der Wert von z , das zwischen a und x liegt, wird nicht explizit gegeben. Es ist daher nicht möglich, R_n in expliziter Form zu berechnen. Dennoch kann man Gl. (2) oft einsetzen, um eine obere Abschätzung für $|R_n|$ zu erhalten.

Beispiel:

$f(x)$ sei gleich dem Produkt $\sin(x) \cos(x)$, also $f(x) = \sin(x) \cos(x)$. Berechne mit MuPAD den *Rest* des Taylor-Polynoms für $n = 8, 11$ und für $x = 0$. Berechne auch einen oberen Schätzwert für $|R_{11}|$ im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$.

Wir benutzen die *Restformel*:

- `f:=x->sin(x)*cos(x) :`
`rest:=diff(f(x),x $ 9)// n= 8`

$$256 \cdot \cos(x)^2 - 256 \cdot \sin(x)^2$$

- `subs(rest,x=z)*x^9/9!`

$$\frac{x^9 \cdot (256 \cdot \cos(z)^2 - 256 \cdot \sin(z)^2)}{362880}$$

- `f:=x->sin(x)*cos(x) :`
`rest:=diff(f(x),x $ 12)://n = 11`
`subs(rest,x=z)*x^12/12!`

$$\frac{4 \cdot x^{12} \cdot \cos(z) \cdot \sin(z)}{467775}$$

Einen oberen Schätzwert für $|R_{11}|$ erhalten wir mit $|x| \leq \pi/2$ und $|\cos(z)\sin(z)| \leq 1$ für alle Werte $0 \leq z \leq x$.

Wir substituieren x durch $\pi/2$ und $\cos(z)\sin(z)$ durch 1:

- `f:=x->sin(x)*cos(x) :`
`resto:=diff(f(x),x $ 12) :`
`subs(resto,x=z)*x^12/12!`

$$\frac{4 \cdot x^{12} \cdot \cos(z) \cdot \sin(z)}{467775}$$

- `subs(% ,x=PI/2, cos(z)=1/sin(z))`

$$\frac{\pi^{12}}{479001600}$$

- `float(%)`

$$0.001929574309$$

Potenzreihen sind von großer Bedeutung in der Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differenzialgleichungen sowie bei den *Laplace-Transformationen*. Wir werden später mehr darüber reden.

7.1.3 Die Gleichung der Wellen

In diesem Paragrafen studieren wir die Wellenausbreitung in einem kontinuierlichen Medium, in dem die Federkräfte ersetzt werden müssen durch die im Medium erzeugten Spannungen. (Die Verformungen des Mediums erzeugen Restaurationskräfte zur Erhaltung bzw. zur Rückbildung des ursprünglichen Gleichgewichtszustands.)

Wir bezeichnen die Lagekoordinaten jetzt nicht mit x_n , sondern mit x . Die Koordinate, die die Welle beschreibt, bezeichnen wir mit ξ (ksî), wenn die Verschiebung horizontal ist. Also ist

$$\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (1)$$

die Gleichung einer *longitudinalen* Welle (Längswelle), in der die Teilchen (z.B. die Luftmoleküle) sich in Ausbreitungsrichtung der Welle verschieben. Schallwellen in einem gegebenen Medium sind Longitudinalwellen. (Die Teilchen des Mediums, die sich als Welle ausbreiten, bewegen sich nach links und nach rechts. Die Geschwindigkeit eines Teilchens ist $\partial\xi/\partial t$. Zusammen mit dieser longitudinalen Verschiebung im Medium (Flüssigkeiten oder Gase) erscheint eine Druckschwingung im Medium. Daher kann eine Welle (z.B. Schallwelle) beschrieben werden in Funktion von Verschiebungen oder in Funktion von Druckschwankungen. So kann der Schall als eine Druckwelle dargestellt werden. Ihre Gleichung wäre

$$\Delta p = \Delta p_m \sin(\omega t - kx), \quad (2)$$

worin x der von der Welle zurückgelegte Weg und t die verfllossene Zeit sind. k ist die Wellenzahl und ω die Winkelgeschwindigkeit. Δp_m ist der maximale Druck in der (Schall)-Welle.)

Eine Welle ist eine Störung, die sich in einem Medium ausbreitet. Die Phasengeschwindigkeit c hängt von den Eigenschaften des Mediums ab. Z.B. hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle auf einer Saite von den Eigenschaften der Saite ab, z.B. von ihrer Spannung und von ihrer Dichte.

Es gibt eine Formel für c für jedes beliebige Medium (Material). Sie lautet

$$c = (K/\rho)^{1/2}, \quad (3)$$

worin K der Volumen-Kompressionsmodul ist und ρ die Dichte des Materials. Für feste Körper wird der Elastizitätsmodul E anstelle von K benutzt.

Die Formel für eine Welle auf einer gespannten Saite heißt $c = (\sigma / \rho)^{1/2}$, worin $\sigma = F/A$ die Saitenspannung ist. Oft schreibt man $c = (\tau/\mu)^{1/2}$, worin τ (Tau) die Zugspannung (in N) ist. μ ist die lineare spezifische Masse m/L (in kg/m), d.h. die Masse von einem Meter der Saite.

Längswellen kommen in Gasen, Flüssigkeiten und auch in festen Körpern vor. Transversalwellen (Querwellen), z.B. solche, die sich auf einer gespannten Saite ausbreiten, können nur in festen Körpern vorkommen. Querwellen verlangen, dass jedes von der Welle getroffene Teilchen seine Nachbarn mitreißt. In einer Flüssigkeit ist das nicht möglich, da benachbarte Teilchen sich nicht einfach mitreißen lassen. Eine Horizontalwelle verlangt lediglich, dass jedes Teilchen seine Nachbarn anstößt.

Die *Wellenfunktion* $\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ kann man als Lösung einer partiellen Differentialgleichung ansehen. Wenn wir (1) zweimal ableiten, erhalten wir

$$\partial^2 \xi / \partial t^2 = -A \omega^2 \cos(\omega t - kx)$$

$$k^2 / \omega^2 \cdot \partial^2 \xi / \partial t^2 = -A k^2 \cos(\omega t - kx)$$

$$\partial^2 \xi / \partial x^2 = -A (-k)^2 \cos(\omega t - kx)$$

Aus diesen Gleichungen können wir die gesuchte Gleichung der Wellenfunktion leicht zusammenbauen. Sie lautet

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (4)$$

Natürlich kann man diese Gleichung (Wellengleichung) direkt aus den Eigenschaften des elastischen Mediums ableiten, in dem die Welle sich ausbreitet. Diese Herleitung werden wir an anderer Stelle vornehmen. (Wir könnten auch versuchen, die *ersten* Ableitungen von Gl. (1) zu kombinieren. Aber auf diese Weise erhält man *zwei* Wellengleichungen, eine für jede Ausbreitungsrichtung.)

Wir wollen Gl. (4) auf die Wellen auf einer **Saite** anwenden.

Die transversalen Auslenkungen von der Gleichgewichtslage bezeichnen wir mit η (Eta). Um das Verhalten einer schwingenden Saite zu beschreiben, benötigen wir außer Gl. (4) noch die *Anfangs-* und *Randbedingungen*.

Wenn die Saite der Länge L an ihren Enden ("Rändern") fest eingespannt ist, was wohl i. Allg. der Fall ist, haben wir als *Randwerte*

$$\eta(0,t) = \eta(L,t) = 0; t > 0 \quad (5)$$

Da die Wellengleichung sowohl in x als auch in t von zweiter Ordnung ist, müssen wir *zwei* Anfangsbedingungen geben: die anfängliche *Gestalt* und die anfängliche *Geschwindigkeit*:

$$\eta(x,0) := f(x); 0 < x < L \quad (6)$$

$$\partial\eta(x,0)/\partial t := g(x); 0 < x < L \quad (7)$$

Wir werden zeigen, dass jede Funktion von $x+ct$ oder $x-ct$ der Gl. (4) genügt, (speziell Gl. (1) ist eine Funktion dieser Art.)

Da Gl. (4) sowohl in ξ als auch in η linear ist, erhalten wir als allgemeine Lösung der Wellengleichung den folgenden Ausdruck

$$\eta(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (8)$$

Wir wollen diese Darstellung mit der Herleitung von Gl. (15) beweisen. (Die Bedingungen (6) und (7) werden wir dabei nicht benötigen. Gl. (8) gilt demnach für alle linearen Wellen.)

F und G sind irgendwelche Funktionen der Argumente $x - ct$ und $x + ct$. $F(x - ct)$ beschreibt eine Störung, die sich in positiver x -Richtung ausbreitet, $G(x + ct)$ stellt eine Störung dar, die in negativer x -Richtung fortschreitet. Zur Zeit $t = 0$ muss gelten

$$f(x) = F(x) + G(x) \quad (9)$$

Um getrennte Ausdrücke für F und G zu erhalten, bilden wir die Ableitung von Gl. (8) in Bezug auf die Zeit t :

$$\partial\eta/\partial t = -cF'(x - ct) + cG'(x + ct) \quad (10)$$

Im Augenblick $t = 0$ gilt außerdem

$$g(x) = -cdF(x)/dx + cdG(x)/dx \quad (11)$$

Nun integrieren wir dies von a bis x

$$G(x) - F(x) = G(a) - F(a) + c^{-1} \int_{a,x} g(x) dx \quad (12)$$

Es reicht, Gl. (9) mit Gl. (12) zu kombinieren, um folgende Ausdrücke zu erhalten:

$$G(x) = (G(a) - F(a))/2 + f(x)/2 + 1/(2c) \cdot \int_{a,x} g(x) dx \quad (13)$$

$$F(x) = -(G(a) - F(a))/2 + f(x)/2 - 1/(2c) \cdot \int_{a,x} g(x) dx \quad (14)$$

Mit diesen Ergebnissen können wir Gl. (8) die folgende Form geben

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x) dx \quad (15)$$

Diese Gleichung heißt Formel von *d'Alembert* (1717-1783).

Wenn es sich um eine gezupfte Saite handelt, die zu Beginn eine dreieckige Form und keine Anfangsgeschwindigkeit hat, d.h. $g(x) = 0$ nach Gl. (7), und zur Zeit $t = 0$ losgelassen wird, dann bleibt von Gl. (15) nur übrig

$$\eta(x,t) = [f(x+ct) + f(x-ct)]/2, \quad (16)$$

worin $f(x)$ die ursprüngliche Form der Saite ist.

7.1.4 Lösung mit Fourier-Reihen (I)

Gl. (16) wurde von *d'Alembert* entwickelt. Eine andere Methode wurde bereits 1753 von *Daniel Bernoulli* (1700-1782) erwähnt. Er zeigte, dass das Problem der schwingenden Saite mit folgender Summe gelöst werden kann

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \quad (17)$$

Bernoulli hatte recht. Aber weder *d'Alembert* noch *Euler* glaubten an die Aussage *Bernoullis*. Sie waren überzeugt, dass eine Reihe wie (17) niemals die Form einer gezupften Saite (Dreieck) darstellen könnte.

Aber 1822 zeigte *Fourier* (1768-1830), dass Reihen der Form (17) meistens konvergieren und dass sie mit großer Genauigkeit fast jede Funktion f darstellen können, falls diese stetig und periodisch ist mit $T = 2\pi/\omega$.

Das *Fourier'sche* Theorem kann in der Form einer trigonometrischen Summe geschrieben werden:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots \quad (18)$$

Diese "Fourier-Reihe" wird in verschiedenen Formen geschrieben, je nach Wahl der Periode. Wenn $T = 2\pi$, haben wir $\omega = 1$, und die Reihe erhält die Form (mit x statt t)

$$f(x) = a_0/2 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \quad (19)$$

Die folgende Reihe stellt die Dreiecksform einer Saite der Länge L dar, wenn sie in $x = x_0$ um das Stück $u(x_0, 0) = b$ gezupft wird (die Auslenkung η bezeichnen wir mit $u(x, t)$; sen (port.) steht für \sin und v für c):

$$u(x, t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{sen} \frac{n x_0 \pi}{L} \cos \frac{n v \pi t}{L} \text{sen} \frac{n \pi x}{L} \quad (20)$$

Die Periode dieser Gleichung ist $T=L$ und $\omega = 2\pi/L$. Der Faktor A bedeutet $A := 2bL^2/[x_0(L-x_0)\pi^2]$.

Die Wiedergabe der Dreieckspitze ist umso besser je mehr Terme der Reihe (20) benutzt werden, vgl. Fig. 7.1.4_1.

Auf den ersten Blick scheint das Problem der Beschreibung der Saitenschwingung recht kompliziert zu sein. Aber mithilfe von MuPAD können wir die Saite in jedem beliebigen Moment t darstellen, denn wir können so viele Terme der Reihe (20) benutzen wie uns nötig erscheint.

In dem Teil **Lösung mit Fourier-Reihen (II)** werden wir uns eingehender mit der Wellengleichung und ihrer Lösung mithilfe von Fourier-Reihen beschäftigen. Im Augenblick werden wir uns nur mit einigen Beispielen beschäftigen. (Wenn Sie sich mit der *numerischen Lösung* des Saitenproblems besonders beschäftigen wollen, finden Sie Erläuterungen in *F. J. Mehr*, PdN-Ph. 2/82 S. 45).

Beispiele zu Gl. (20)

Wir betrachten eine Saite mit $L = 1.5$ m, $b = 5$ mm, $x_0 = 1$ m (= Stelle, an der gezupft wird). Die Geschwindigkeit der Welle beträgt $v = 100$ m/s (meist mit c bezeichnet). Es handelt sich um einen Eisendraht von 1 mm Durchmesser. Die Dichte ist $\rho = 7640$ kg/m³ und die Zugkraft beträgt $F = 60$ N.

- ```

reset() //Fourier-Reihe bei einer Saite
b:=0.005:L:=1.5:xo:=1://xo= Stelle der Spitze
c:=100//Wellengeschwindigkeit
A:=2*b*L^2/(xo*(L-xo)*PI^2):
p:=PI/L:m:=xo*p:q:=c*p:
t:=0: //t in Millisekunden
u1:=x->A*sum(n^-2*sin(n*m)*cos(n*q*t)*sin(n*p*x),n=1..2):
U1 := plot::Function2d(u1(x), x = 0..L, Color = RGB::Green):
u2:=x->A*sum(n^-2*sin(n*m)*cos(n*q*t)*sin(n*p*x),n=1..5):
U2 := plot::Function2d(u2(x), x = 0..L, Color = RGB::Blue):
u3:=x->A*sum(n^-2*sin(n*m)*cos(n*q*t)*sin(n*p*x),n=1..50):
U3 := plot::Function2d(u3(x), x = 0..L, Color = RGB::Red):
f:=x->piecewise([x<=xo,b*x/xo],[x<=L,b*L/(L-xo)-b/(L-xo)*x]):
F := plot::Function2d(f(x), x = 0..L, Color = RGB::Black):
plot(U1,U2,U3,F, AxesTitles=["x/m","Y/m"])

```

Das erste Bild zeigt die Annäherung an die ursprüngliche Dreiecksspitze mit  $N = 2, 5, 50$  Termen. Das schwarze Dreieck wurde mit  $f(x) = b/cx$ ,  $0 \leq x \leq x_0$ , und  $bL/(L-x_0) - b/(L-x_0)x$  für  $x_0 < x \leq L$  gezeichnet. Es fällt praktisch mit  $u_3$  zusammen.

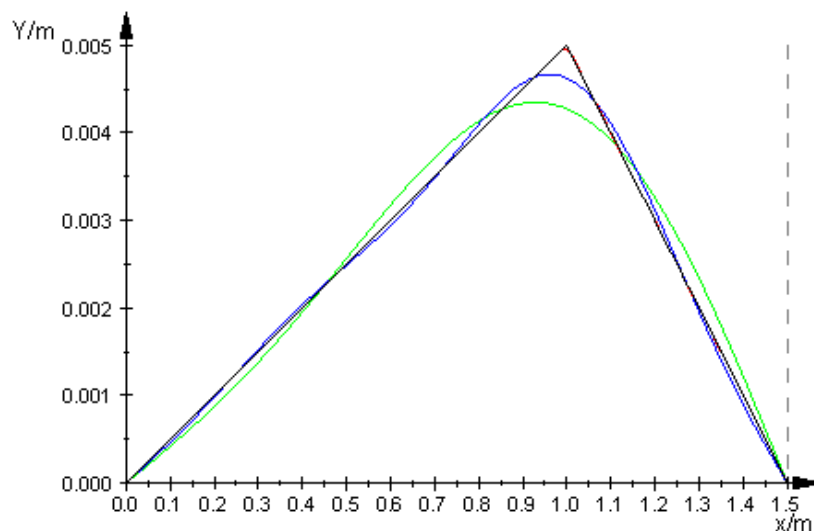


Fig.: 7.1.4\_1

Das nächste Bild zeigt die Annäherung an die Saite für  $t = 8$  ms mit 2, 5 und 50 Termen der Reihe (20).

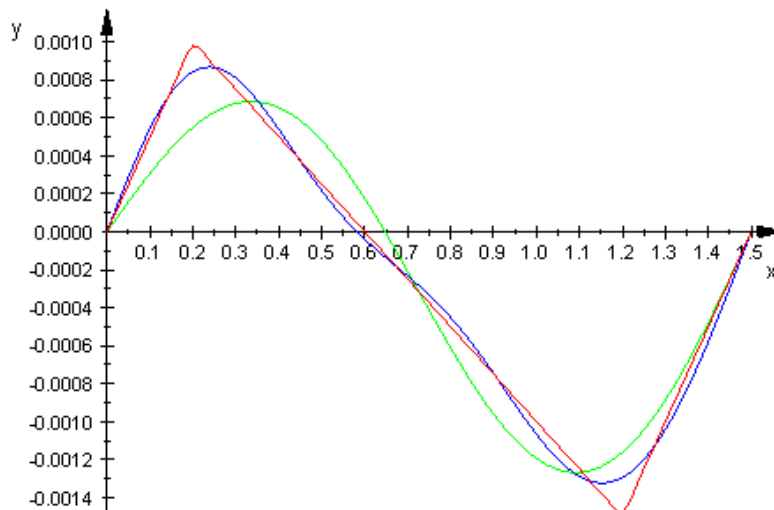


Fig.: 7.1.4\_2

In den folgenden Bildern sehen wir 12 verschiedene Augenblicke im Leben der Saite.

Fig.: 7.1.4\_3 zeigt die Saitenformen in den Zeiten

[0, 0.003, 0.006, 0.009, 0.012, 0.015] Sekunden

Fig.: 7.1.4\_4 zeigt die Saite in den Augenblicken

[0.015, 0.018, 0.021, 0.024, 0.027, 0.030] Sekunden

```

• reset() // Fourier-Reihe und Saite
b:=0.005:L:=1.5:xo:=1:
c:=100:
werte_t:=[0,0.003,0.006,0.009,0.012,0.015] //Zeiten
A:=2*b*L^2/(xo*(L-xo)*PI^2):
p:=PI/L:m:=xo*p:q:=c*p:
u:=(x,t)->
A*sum(n^-2*sin(n*m)*cos(n*q*t)*sin(n*p*x),n=1..10):
kurven:=plot::Scene2d(plot::Function2d(subs(u(x,t),
t=werte_t[i]),Color=RGB::Blue,x=0..L))$i=1..6:
plot(kurven)

```



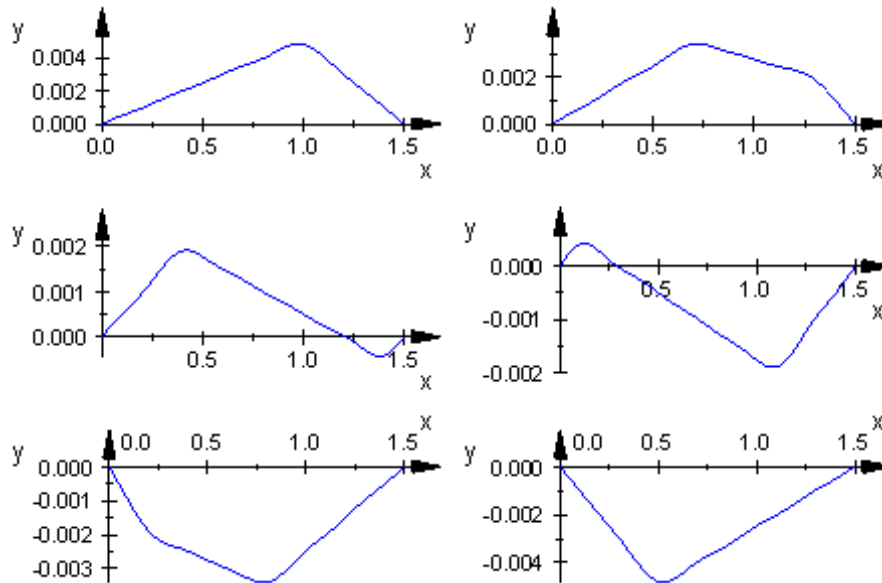


Fig.: 7.1.4\_3

Nach 15ms hat die Saite die untere Dreiecksgestalt angenommen.

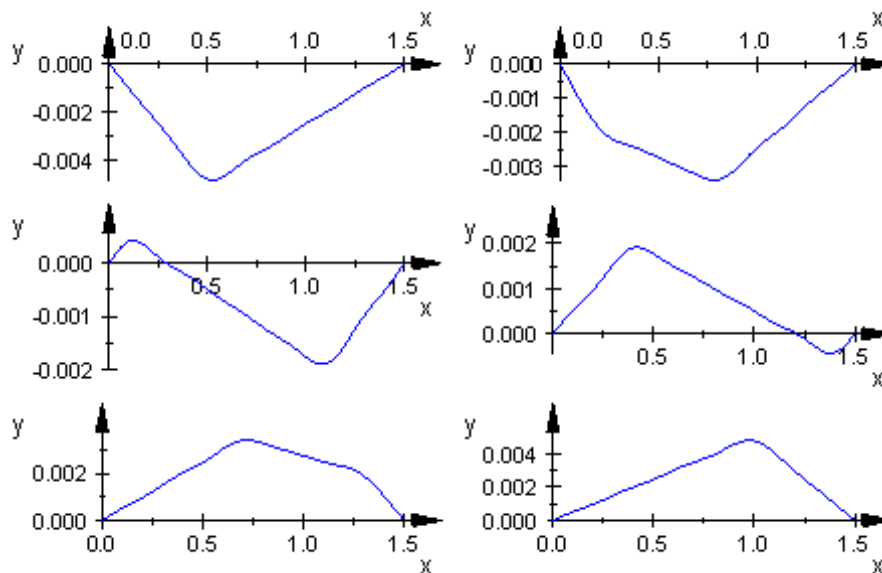


Fig.: 7.1.4\_4

Nach 30ms hat die Saite wieder die Ausgangsform.

In allen Darstellungen wurden 10 Terme der Reihe (20) benutzt.

Um diesen Abschnitt zu beenden, wollen wir den Graphen der folgenden Summe von trigonometrischen Funktionen aufzeichnen (sen = sin).

$$u(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2n-1)x]}{2n-1} \quad (21)$$

- `reset() //Fourier-Reihe beim Rechteckpuls`  
`A:=4/PI:`  
`u:=x->A*sum(sin((2*n-1)*x)/(2*n-1),n=1..20):`  
`U:=plot::Function2d(u(x), x = -PI..3*PI, Color =`  
`RGB::Blue):`  
`plot(U)`

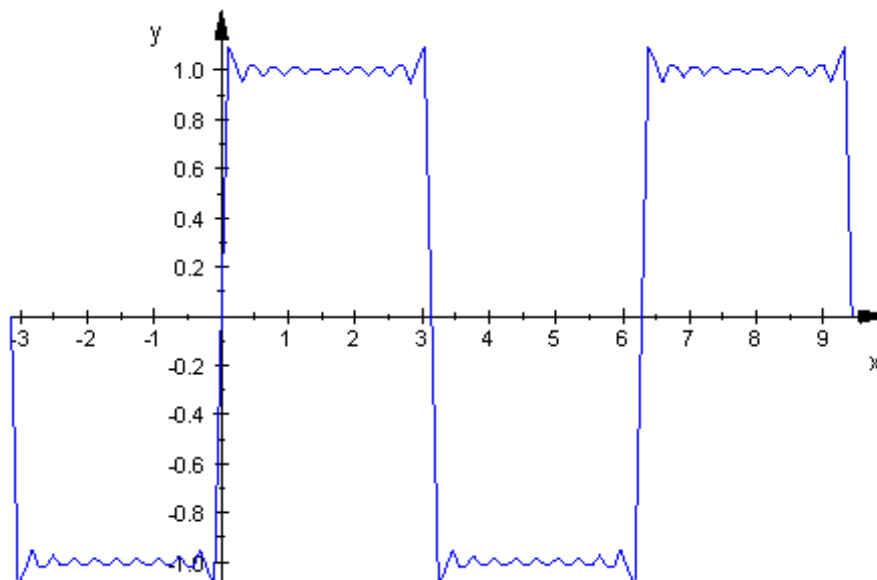


Fig.: 7.1.4\_4

Die etwas höheren Spitzen ("Überschwinger") werden *Gibbssches Phänomen* genannt. Sie verschwinden auch nicht, wenn man noch mehr Terme addiert.

Es ist sehr aufschlussreich, etwas mehr mit dem Programm zu experimentieren. Man kann z.B. statt Sinus einen Kosinus benutzen oder im Nenner  $(2n - 1)^2$  anstatt  $2n - 1$ . Mit  $\cos((2^n - 1)x)/(2^n - 1)^2$  erhält man eine schöne Dreieckswelle.