

6.4 Schwingungen IV

6.4.1 Nichtgedämpfte erzwungene Schwingungen

Wenn ein Oszillator (Pendel) in seiner Bewegung nur leicht beeinflusst (erzwungen) wird, behält er die meisten seiner Eigenschaften bei –jedoch infolge der Beeinflussung leicht verändert. So wird seine Frequenz leicht verschieden sein von der, die er ohne die Beeinflussung hatte. Auch seine Amplitude wird verändert sein. Man sagt, dass seine Schwingungen biperiodisch sind, d.h. sie zeigen die Überlagerung von Eigenschwingung und Störschwingung.

Ein Beispiel für ein erzwungenes Pendel ist eine Person auf einer Schaukel, die in einem bestimmten Rhythmus von außen angestoßen wird. Eine mit einer Person schwingende Schaukel hat ihre natürliche Frequenz ω_0 . Die Person, die die Schwingungen beeinflusst, prägt der Schaukel die Frequenz ω auf. Wenn diese Frequenz mit der Eigenfrequenz der Schaukel übereinstimmt, kann diese ohne Dämpfung schwingen, da der Erreger die dazu nötige Energie liefert.

Was geschieht, wenn die Beeinflussung mit einer anderen Frequenz als ω_0 stattfindet? Wir wollen diese Frage an unserem Masse-Feder-System untersuchen.

Eine Masse m (z.B. eine Kugel) hängt am unteren Ende einer Feder. Das obere Ende halte ich in meiner Hand. Halte ich meine Hand ruhig, kann die Kugel mit der Frequenz $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ schwingen. Wenn meine Hand sich mit der Amplitude E und der Frequenz ω auf und ab bewegt, d.h. wenn meine Hand eine Bewegung gemäß

$$y_A = E \cos \omega t, \quad (1)$$

ausführt, beginnt die Masse sich zu bewegen. Zunächst chaotisch, nach einiger Zeit mit dem Rhythmus meiner Hand. Die halbchaotische Anfangsschwingung klingt nach einer gewissen Zeit aus, es handelt sich um eine *transitorische* Bewegung. Die sich anschließende *stationäre* Bewegung ist das *permanente Regime*.

Für die mathematische Beschreibung der erzwungenen Bewegung gehen wir zurück nach 6.3.1 und ersetzen dort Gl. (1) durch $mg = k(y_1 + y_A)$ und anstelle von $y'' + \omega_0^2 y = 0$ haben wir jetzt $y'' + \omega_0^2 y = \omega_0^2 E \cos \omega t$. Wenn wir hierin die folgende Gl. (2) einsetzen, sehen wir, dass (2) die stationäre Bewegung richtig beschreibt.

$$y = E \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (2)$$

Der Faktor

$$y_m = E \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3)$$

ist die Amplitude der erzwungenen Schwingung und hängt ab von ω_0 und ω .

Für $\omega = \omega_0$ würde die Amplitude unendlich groß werden, was natürlich daher kommt, dass wir keinerlei Dämpfung berücksichtigt haben. Man sagt, dass für $\omega = \omega_0$ eine Amplituden-Resonanz eintritt. Diese Art von Resonanz kann in Wirklichkeit nicht auftreten, da es keine Schwingungen ohne Reibungsverluste gibt. Wohl kann die Amplitude derart anwachsen, dass der Oszillator zerstört wird (Resonanzkatastrophe!). Man sagt, dass Caruso mit seiner Stimme ein Weinglas zu erzwungenen Schwingungen anregen und zerstören konnte. Um auf diese Art ein Weinglas zu zerbrechen, muss ein Sänger wenigstens 2 bis 3 Sekunden lang mit der Eigenfrequenz des Glases singen, und zwar mit einer Lautstärke von 140dB. Die Stimmfrequenz darf dabei um höchstens 1Hz von der Eigenfrequenz des Weinglases abweichen.

6.4.2 Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung

Wir werden jetzt in den Gleichungen zur Beschreibung erzwungener Schwingungen auch Reibung berücksichtigen. Die Grundgleichung ist das 2. Newtonsche Gesetz (wir schreiben x statt y):

$$mx'' + bx' + kx = F_0 \cos \omega t \quad (4)$$

Die Funktion $F(t) = F_0 \cos \omega t$ beschreibt die einwirkende Kraft, die wir als harmonisch ansehen wollen. ω ist die Erregerfrequenz in Radiant pro Sekunde, rad/s.

In Fig. 6.4-1 sehen wir einen Körper mit der Masse m , der sich unter der Einwirkung dreier Kräfte über eine Ebene bewegt. Die Kräfte sind die *Reibung* $-bx'$, wirkt der Bewegung entgegen, falls $b > 0$, eine *Rückstellkraft* $-kx$ und eine äußere *eingeprägte Kraft* $F(t)$.

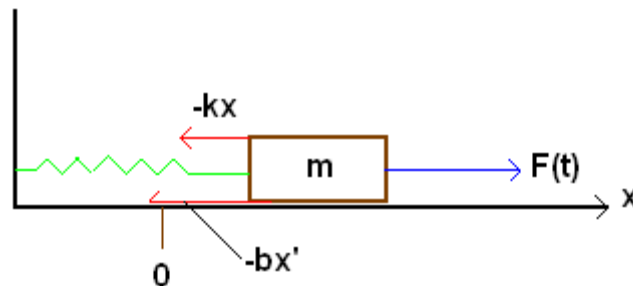


Figura 6.4-1

(Unser mechanisches Beispiel ist ein Analogon zu einer elektrischen Schaltung, nämlich zu einer Serienschaltung aus Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C . $U(t)$ ist die treibende Spannung. Die zu (4) analoge Gleichung lautet

$$L i(t)'' + R i(t)' + 1/C i(t) = U(t), \quad (5)$$

Der elektrische Strom entspricht der Geschwindigkeit und die Ladung der Amplitude.)

Die allgemeine Lösung der nichthomogenen Gl. (4) ist, vgl. 6.1.1, die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (komplementäre Lösung x_c) und einer partikulären Lösung x_p von Gl. (4). Für den Fall einer schwachen Dämpfung gilt nach 6.2.2-Gl. (8)

$$x_c(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi). \quad (6)$$

Wir werden in diesem Abschnitt nur eine schwache Dämpfung betrachten.

Um eine beliebige Lösung von Gl. (4) zu finden (nichthomogene Gl.), hat *Lagrange* (1736-1813) die Methode der *Variation der Konstanten* entwickelt. Wir könnten Gl. (4) nach dieser Methode lösen, aber wir wollen versuchen, einen mehr intuitiven Weg einzuschlagen. Es ist logisch, dass die Masse schließlich mit der Frequenz ω der erregenden Kraft schwingen wird. Daher versuchen wir als eine mögliche Lösung von Gl. (4) den folgenden Ansatz zu benutzen:

$$x_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (7)$$

Um diese Form zu testen, berechnen wir die ersten beiden Ableitungen und setzen sie in Gl. (4) ein:

$$(-A\omega^2 - 2\gamma B\omega + \omega_0^2 A) \sin \omega t + (-B\omega^2 + 2\gamma A\omega + \omega_0^2 B) \cos \omega t = F_0 \cos \omega t / m. \quad (8)$$

Diese Gleichung soll für alle Zeiten t gültig sein. Das aber ist nur möglich, wenn gilt

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A - (2\gamma\omega) B = 0 \quad \text{und} \quad (2\gamma\omega) A + (\omega_0^2 - \omega^2) B = F_0/m.$$

Dieses Gleichungssystem können wir mit der *Cramer'schen* Regel lösen. Wir erhalten damit für A und B die folgenden Ausdrücke:

$$A = \frac{2\gamma\omega F_0 / m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (9)$$

$$B = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2) / m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (10)$$

Jetzt bringen wir Gl. (7) in die Form

$$x_p = A_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (11)$$

mit

$$A_0 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2}} \quad (12)$$

$$\text{tg} \theta = \frac{\omega b}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (13)$$

Die vollständige Lösung von Gl. (4) $x = x_c + x_p$ lautet dann

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (14)$$

Diese Gleichung stellt die Überlagerung zweier Bewegungen dar. Der erste Term beschreibt eine gedämpfte Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}, \quad (15)$$

der zweite Term ist die Gleichung einer harmonischen Bewegung mit konstanter Amplitude und mit der Frequenz ω .

Während der Einschwingphase klingt die gedämpfte Schwingung allmählich ab (transitorische Bewegung) und es bleibt schließlich nur eine Schwingung mit konstanter Amplitude und konstanter Frequenz ω (stationäre Bewegung). D.h. der erzwungene Oszillator bewegt sich schließlich nicht mit seiner Eigenfrequenz ω_0 , sondern mit der Frequenz ω der aufgeprägten Kraft $F(t)$.

Wegen der Dämpfung hat die stationäre Schwingung eine Phasenverschiebung gegenüber der äußeren Kraft $F(t)$. Der Phasenwinkel θ ist durch Gl. (13) gegeben und kann zwischen 0 und π variieren. Er stellt den Teil einer Periode dar, während der die "Antwort" x_p der erregenden Funktion $F(t)$ nacheilt. In 6.2.1 sahen wir, dass $b := 2m\gamma$, worin γ der der Abklingkoeffizient und b der Reibungskoeffizient sind. Für $\gamma = 0\text{s}^{-1}$ erhalten wir wieder Gl. (2) vom Anfang dieses Abschnitts.

Fig. 6.4-2 zeigt ein Beispiel für Gl. (12). Die transitorische Phase dauert ungefähr 15 s. Nach dieser Zeit befinden wir uns im stationären Regime

- `reset() //Erzwungene Schwingungen`
`b:=0.5:m:=1:w:=2.5:F0:=30:`
`k:=40:x0:=1:v0:=10:`
`w0:=sqrt(k/m):`
`g:=b/(2*m):`
`w1:=sqrt(w0^2-g^2):`
`w2:=w0^2-w^2:`

```

C:=sqrt(x0^2+(v0+g*x0)/w1)^2)//6.2.2, G1.(10)
phi:=-arctan((v0+g*x0)/(x0*w1))//G1.(11)
A:=F0/sqrt(m^2*w2^2+b^2*w2^2):
theta:=arctan(2*g*w/w2):
x:=C*exp(-g*t)*cos(w1*t+phi)+A*cos(w*t-theta):
osci:=plot::Function2d(x,Color=RGB::Blue,
t=0..20,Mesh=2000):

plot(osci,ViewingBoxXRange=0..20,ViewingBoxYRange=-
2..2,AxisTitles=["t","x"])

```

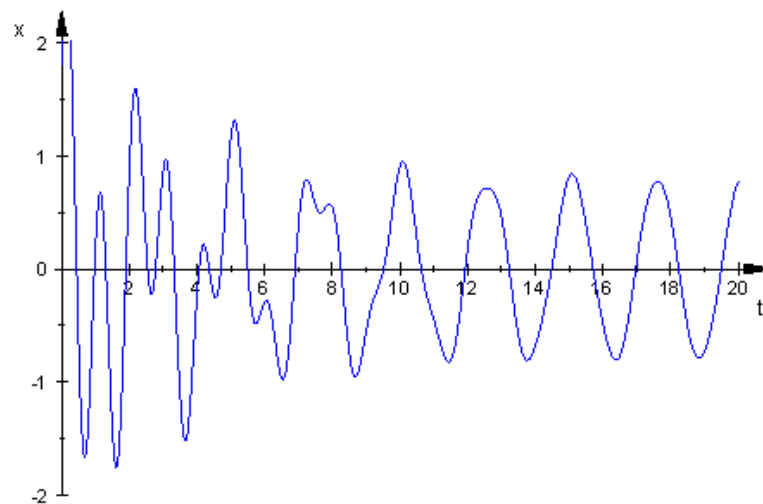


Fig.: 6.4-2

Mit $F_0 = 0$ ergäbe sich eine freie gedämpfte Schwingung, die etwa 20 Sekunden andauern würde. Vgl. die folgende Abbildung.

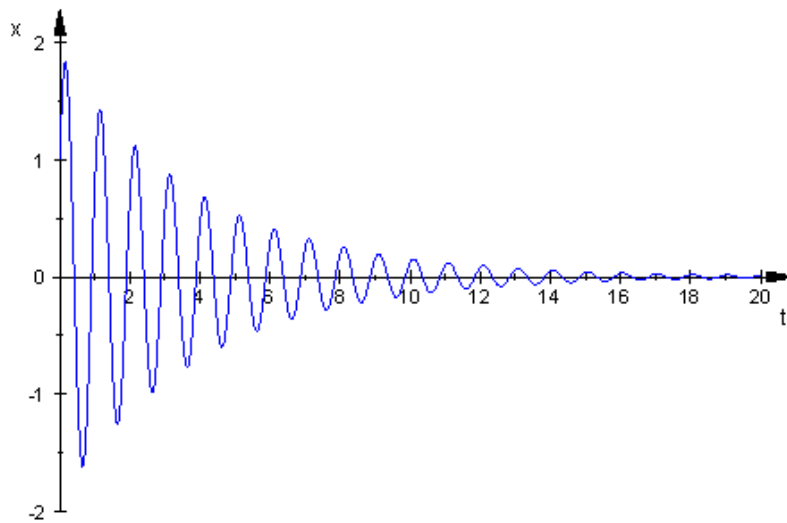


Fig.: 6.4-3

Die stationäre Bewegung ist unabhängig von den Anfangsbedingungen, sie hängt nur von den Parametern des Systems und von der erregenden Kraft ab.

Die transitorische Bewegung hängt jedoch von den Anfangsbedingungen ab. Im Falle der Resonanz ($\omega \approx \omega_0$) wächst die Amplitude der stationären Schwingung bis ungefähr $A_r = F_0/(\omega_0 b)$.

Es ist nützlich, das Amplitudenverhältnis $M := A_0/(F_0/k)$ aus Gl. (12) in Funktion von ω/ω_0 darzustellen

Um die folgende Beziehung

$$M := \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{2\gamma}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}} \quad (16)$$

zu erhalten, teilen wir Zähler und Nenner von (12) durch k und ersetzen k^2 durch $m^2\omega_0^2$, da $\omega_0^2 = k/m$. Dann führen wir $b := 2m\gamma$ ein und dividieren Gl. (12) durch F_0/k .

In Fig. 6.4-4 sehen wir *Resonanzkurven*, d.h. Graphen von M in Abhängigkeit von $f := \omega/\omega_0$ für verschiedene Werte von $z := \gamma/\omega_0$.

- `reset() //Resonanzkurven`
`M:=1/sqrt((1-f^2)^2+4*z^2*f^2) //f:=w/wo`
`werte:=[0.1,0.2,0.3,0.5] //Werte von Gamma/wo`
`A:=subs(M,z=werte[i]) $ i=1..4:`
`plotfunc2d(A, f=0..2,Mesh=1000,GridVisible=TRUE,`
`AxisTitles=["w/wo","M"]):`

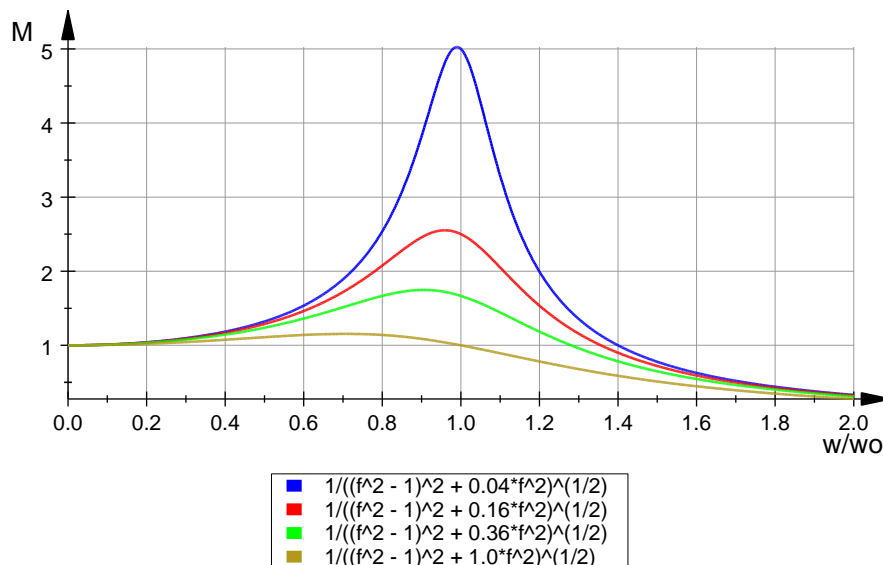


Fig.: 6.4-4

Diese Schar von Resonanzkurven zeigt, dass das Maximum bei $\omega/\omega_0 = 1$ umso ausgeprägter ist, je kleiner die Dämpfung ist. Die Resonanzfrequenz beträgt $\omega_r = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2}$, wenn der Oszillator gedämpft ist. Nur für $\gamma = 0$ gilt $\omega_r = \omega_0$. Wenn die Dämpfung sehr klein ist, gibt es keine große Differenz zwischen ω_r und ω_0 . Für Geschwindigkeit und Energie des Oszillators gilt immer $\omega_r = \omega_0$. Diesen Punkt werden wir gleich untersuchen.

6.4.3 Resonanzfrequenz

Wir werden jetzt etwas genauer auf die Frage der Resonanz eingehen. Zunächst untersuchen wir die Amplitude A_0 in Funktion der Frequenz ω , anschließend gehen wir auf Energie und Geschwindigkeit ein.

Nach Gl. (12) ist die Amplitude A_0 umso größer, je kleiner $\omega - \omega_0$ ist. Aber wegen des Terms $r := 4\gamma^2\omega^2$ kann A_0 nie unendlich groß werden.

Das Maximum von A_0 tritt ein, wenn der Nenner

$$N := \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (17)$$

minimal ist.

Indem wir die Ableitung $dN/d\omega$ gleich Null setzen, erhalten wir für $\omega_{\max} := \omega_{\text{res,A}}$ den Ausdruck

$$\omega_{\text{res,A}}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad (18)$$

$\omega_{\text{res,A}}$ ist also für kleine Werte von γ etwas kleiner als ω_0 , vgl. Fig.6.4-4.

Es ist interessant zu sehen, dass v und E nicht maximal werden für $\omega = \omega_{\text{res,A}}$.

Für die kinetische Energie E_k haben wir (vgl. auch 6.2.4):

$$E_k = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\omega^2 F_0^2 \sin^2(\omega t - \theta)}{2m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]} \quad (19)$$

E_k hat ein Maximum, wenn der Sinus gleich ± 1 ist. In diesem Fall ist E_k gleich der Gesamtenergie E

$$E = \frac{\omega^2 F_0^2}{2m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]} \quad (20)$$

Das Maximum von E fällt i.Allg. nicht mit dem Minimum des Nenners zusammen, denn der Zähler enthält ebenfalls den Faktor ω^2 .

Aus $dE/d\omega = 0$ erhalten wir für die Frequenz des Maximums von E

$$\omega_{\text{res},E} = \omega_0 \quad (21)$$

Dasselbe Resultat erhalten wir für die Geschwindigkeit. Energie und Geschwindigkeitsresonanz ergibt sich demnach, wenn die erregende Kraft mit der Eigenfrequenz des Oszillators angreift. Im Resonanzfall hat die Energie den Wert

$$E_{\text{res}} = \frac{m F_0^2}{2 b^2} \quad (22)$$

Die Amplitude der Auslenkung ist im Resonanzfall gegeben durch

$$A_{\text{res}} = \frac{F_0}{b \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (23)$$

Wenn die Reibung vernachlässigbar ist, erhalten wir wieder $A_{\text{res}} \approx F_0/(b\omega_0)$.

Numerisches Beispiel:

Ein Oszillator mit $m = 0,1 \text{ kg}$ und $\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$ wird von der Kraft $F = 10 \text{ N} \cdot \cos \omega t$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Der Abklingkoeffizient beträgt $\gamma = 3 \text{ s}^{-1}$. Bestimme die Resonanzamplitude und die Resonanzfrequenz. Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn $\gamma = 0,3 \text{ s}^{-1}$ beträgt?

Lösung:

$$\gamma = b/(2m); \quad \omega_{\text{res}, A} = (400\text{s}^{-2} - 2 \cdot 9\text{s}^{-2})^{1/2} = 19,54 \text{ s}^{-1}$$

$$A_{\text{res}} = 10\text{N}/[2m\gamma(400\text{s}^{-2} - 9 \text{ s}^{-2})^{1/2}] = 0,843 \text{ m}$$

Für $\gamma = 0,3 \text{ s}^{-1}$ erhält man $\omega_{\text{res}, A} = 20 \text{ s}^{-1}$ und $A_{\text{res}} = 8,33 \text{ m}$.

Die Näherungsbeziehung ergibt ebenfalls $A_{\text{res}} \approx 10\text{N}/(2 \cdot 0,1\text{kg} \cdot 0,3\text{s}^{-1} \cdot 20\text{s}^{-1}) = 8,33 \text{ m}$.

Nach Gl. (19) ergibt sich die Geschwindigkeit $v = dx_p/dt = -A_0 \omega \sin(\omega t - \theta)$ für das stationäre Regime. Die Geschwindigkeitsamplitude ist $V_0 = \omega A_0$. Für die Resonanzfrequenz erhalten wir, wie schon gesagt, $\omega_{\text{res},v} = \omega_0$ wie bei der Energie. Wir können die Geschwindigkeit auch folgendermaßen schreiben: $v = V_0 \cos(\omega t - \theta + \pi/2)$. Das zeigt, dass die Geschwindigkeit der Bewegung um 90° vorausleitet.

Mit $\alpha := \theta - \pi/2$ können wir schreiben

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{m(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega b} \quad (24)$$

Das erzeugt $\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 \cos(\omega t - \alpha)$. Daraus ersehen wir, dass die Phasendifferenz zwischen Geschwindigkeit und erregender Kraft gleich α ist.

Aus Gl. (24) schließen wir, dass $\alpha = 0$ für $\omega = \omega_0$, d.h. für diese Frequenz sind Geschwindigkeit und erregende Kraft in Phase.

6.4.4 Phasenresonanzfunktion

Die x-Phase des Oszillators hinkt immer um den Winkel θ hinter der Phase der erregenden Kraft her. Wir wollen diese Phase θ , die immer zwischen 0 und π liegt, vgl. Gl. (13), genauer betrachten. Wir wissen, dass $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$, worin $\sin \theta \sim \gamma \omega$ und $\cos \theta \sim \omega_0^2 - \omega^2$.

Für $\omega < \omega_0$ gilt $\cos \theta > 0$, und daher ist $\theta < \pi/2$. Wenn $\omega > \omega_0$, haben wir $\cos \theta < 0$, d.h. $\theta > \pi/2$. Wenn $\omega = \omega_0$, sehen wir aus Gl. (13), dass der Oszillator um $\pi/2$ hinter der Kraft herhinkt.

In diesem Fall gilt für die Verschiebung x , vgl. Gl.(11),

$$x_{p,r} = F_0/(b\omega_0) \cos(\omega_0 t - \pi/2) = F_0/(b\omega_0) \sin(\omega_0 t). \quad (25)$$

Bei dieser Frequenz bewegt sich der Oszillator also so, als ob die Restaurationskraft der Feder nicht vorhanden wäre und als ob allein die Reibungskraft und die erregende Kraft wirkten.

Es ist interessant zu beobachten, dass für große Frequenzen, $\omega \gg \omega_0$, die Schwingung der Masse gegenüber der erregenden Kraft um π rad phasenverschoben ist.

Fig. 6.4-5 zeigt, wie der Winkel θ von ω/ω_0 abhängt, und zwar für verschiedene Werte von γ/ω_0 .

Im Programm benutzen wir Gl. (13), aber wir müssen berücksichtigen, dass die Funktion $y = \arctan x$ einen eingeschränkten Definitionsbereich hat, nämlich $]-\pi/2, +\pi/2[$. Die anderen y -Werte erhält man durch Addition von $\pm k \pi$ zum Hauptwert.

Wit der folgenen Prozedur berücksichtigen wir diese Besonderheit:

```
T:=proc(f)//f:=w/wo
begin
if f<1 then arctan(2*z*f/(1-f^2))
elif f>1 then arctan(2*z*f/(1-f^2))+PI
end_if
end_proc:
```

Hier ist das vollständige Programm:

- `reset()://Phase nach Gl.(11)`

```
T:=proc(f)//f:=w/wo
begin
if f<1 then arctan(2*z*f/(1-f^2))
elif f>1 then arctan(2*z*f/(1-f^2))+PI
end_if
end_proc:

werte:=[0.1,0.2,0.3,0.5]://Werte fuer Gamma/wo
Teth:=subs(T,z=werte[i])$ i=1..4:
plotfunc2d(Teth, f=0..3,Mesh=1000,GridVisible=TRUE,
AxesTitles=["w/wo", "theta/rad"]):
```

Ökonomischer ist es, die Funktion `piecewise` zu benutzen, vgl. 5.3.1:

- `reset()://Phase der Verschiebung nach Gl.(13)`

```
T:=piecewise ([f<=1,arctan(2*z*f/(1-f^2))],
[f>1,arctan(2*z*f/(1-f^2))+PI]):
werte:=[0.1,0.2,0.3,0.5]://Werte fuer Gamma/wo
Tet:=subs(T,z=werte[i])$ i=1..4:
plotfunc2d(Tet, f=0..3,Mesh=1000,GridVisible=TRUE,
AxesTitles=["w/wo", "theta/rad"]):
```

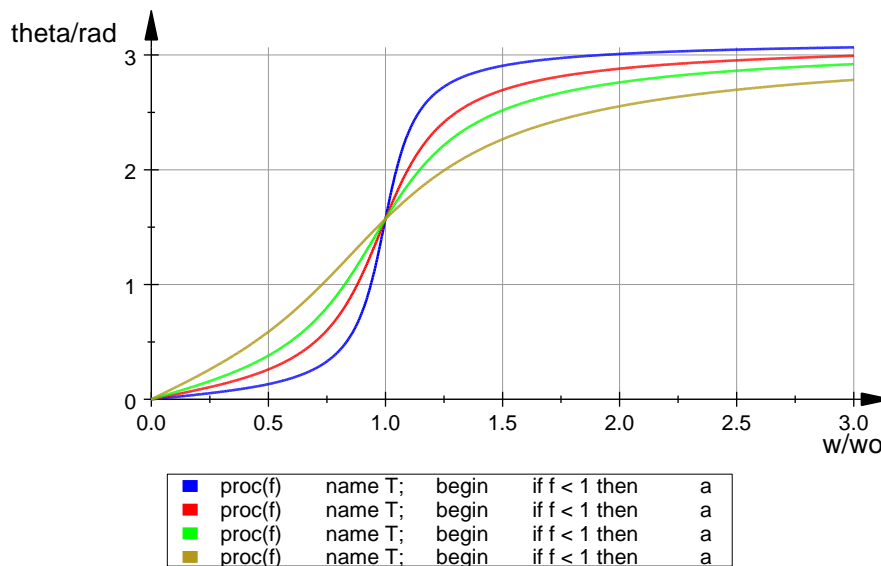


Fig.: 6.4-5

Beachte, dass für $\omega/\omega_0 = 1$ der Wert von $\theta = \pi/2$ ist -für alle Werte von γ/ω_0 .

Die Verschiebungsordinate x ist in diesem Fall um 90° außer Phase in Bezug auf die Kraft, die den Oszillator erregt. Eine Konsequenz davon ist, dass die an den Oszillator übertragene Leistung maximal ist.

Diese Erscheinung können wir besser verstehen, wenn wir uns nochmals die Geschwindigkeit ansehen, bei der wir feststellten, dass sie mit der Kraft in Phase ist, wenn $\omega = \omega_0$. Die von der Kraft $F(t)$ am Oszillator geleistete Arbeit ist $F \cdot v$ und ist immer positiv, da F und v in Phase sind. Daher können wir behaupten, dass bei der Geschwindigkeits-Resonanz die von $F(t)$ auf den Oszillator übertragene Energie maximal ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir die im Zeitmittel übertragene Leistung untersuchen.

6.4.5 Die auf den Oszillator übertragene mittlere Leistung

Wenn man die im zeitlichen Mittel absorbierte Energie berechnet, beobachtet man ebenfalls eine Resonanz bei $\omega = \omega_0$. Schauen wir uns diesen Aspekt an. Die von der äußeren Kraft bei der Verschiebung dx verrichtete Arbeit ist gegeben durch $F(t) dx$. Die von $F(t)$ an den Oszillator übergebene Leistung beträgt $P(t) = F(t) \cdot dx/dt = F(t) v$.

Das Zeitmittel der vom Oszillator absorbierten Leistung ist nach 6.2.4 gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle &= \int F(t)x'(t)dt / \int dt & (26) \\ &= \int F_0 \cos \omega t [-A_0 \omega \sin(\omega t - \theta)] dt / \int dt \end{aligned}$$

Mit $\sin(\omega t - \theta) = \sin \omega t \cos \theta - \cos \omega t \sin \theta$ ergibt sich

$$\langle P \rangle = \int (-1/2 \cdot F_0 A_0 \omega \cos \theta \sin 2\omega t + F_0 A_0 \omega \sin \theta \cos^2 \omega t) dt / \int dt \quad (27)$$

Das Zeitmittel (über eine Periode) von $\sin 2\omega t$ ist Null und das von $\cos^2 \omega t$ ist $1/2$, denn

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}, \quad (28)$$

mit $T = 2\pi/\omega$.

Also ergibt sich für die während einer Periode absorbierte Leistung –mit A_0 aus Gl. (12)- der folgende Ausdruck:

$$\langle P \rangle = \frac{\frac{1}{2} F_0^2 \omega^2 b}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2} \quad (29)$$

Auch der Graph zu Gl. (29), Fig. 6.4-6, ist eine typische Resonanzkurve wie in Fig. 6.4-4, ebenfalls mit einem Maximum in $\omega = \omega_0$. Der Maximalwert der übertragenen Leistung ist

$$\langle P \rangle_{\max} = F_0^2 / (2b) \quad (30)$$

Leistungsresonanz:

- ```

F0:=10:m:=0.1:w0:=5://Leistungsresonanz
pot:=0.5*F0^2*w^2*b/(m^2*(w^2-w0^2)^2+w^2*b^2):
werte:=[0.1,0.3,0.5]://Werte von b
P:=subs(pot,b=werte[i])$ i=1..3:
plotfunc2d(P, w=0..10,Mesh=1000,GridVisible=TRUE,
AxesTitles=["w/s-1", "<P>/W"]):

```

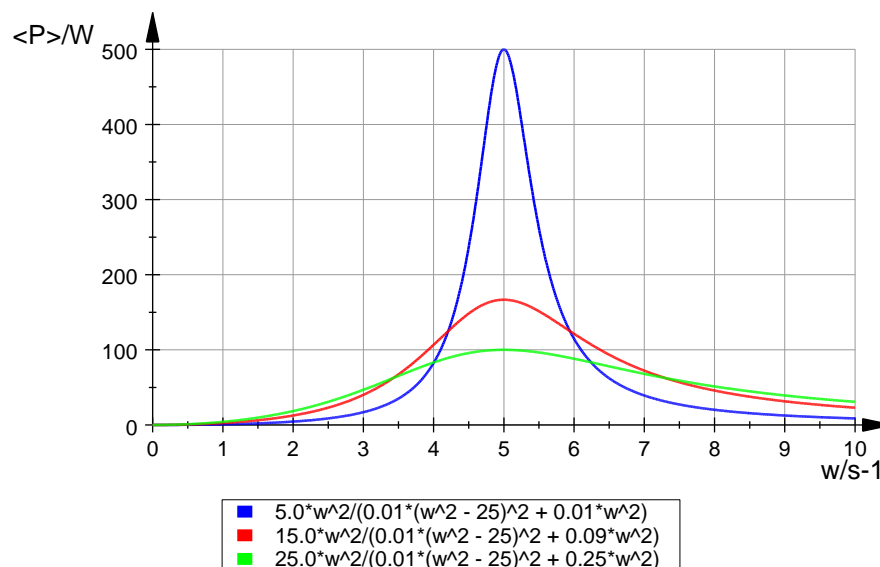


Fig. 6.4-6

Fig. 6.4-6 zeigt die Graphen von  $\langle P(\omega) \rangle$  für drei verschiedene  $b$ -Werte. Die Resonanzstelle ist umso ausgeprägter, je kleiner  $b = 2m\gamma$  ist.

Bei den Frequenzen  $\omega_1 = (\omega_0^2 + \gamma^2)^{1/2} - \gamma$  und  $\omega_2 = (\omega_0^2 + \gamma^2)^{1/2} + \gamma$  fällt  $\langle P(\omega) \rangle$  auf die Hälfte des Spitzenwertes. Die *Halbwertsbreite*  $\Delta\omega$  ist gegeben durch  $\omega_2 - \omega_1 = 2\gamma$ .

In 6.2.4 haben wir den *Gütefaktor*  $Q = \omega_0/(2\gamma) = \omega_0 \cdot \tau$  eines Oszillators eingeführt. Jetzt können wir eine neue Definition für  $Q$  einführen, nämlich

$$Q := \omega_0 / \Delta\omega \quad (31)$$

Für den Oszillator mit  $b = 0,1 \text{ kg/s}$  aus Fig. 6.4-6 erhalten wir:

$$\omega_1 = (25 \text{ s}^{-2} + 0,25 \text{ s}^{-2})^{1/2} - 0,5 \text{ s}^{-1} = 4,5249 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 = 5,5249 \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 1 \text{ s}^{-1} (= 2\gamma)$$

Der Gütefaktor ist  $Q = 5$ .

Die neue Definition von  $Q$  bietet einen praktischen Weg zur experimentellen Bestimmung des Gütefaktors, denn i.Allg. kann man  $\omega_0$  und  $\Delta\omega$  ohne große Schwierigkeiten bestimmen.

## 6.4.6 Behandlung mit komplexen Zahlen

Die mathematische Behandlung der erzwungenen Schwingungen wird sehr erleichtert, wenn man sich der komplexen Zahlen bedient. (Schon in 3.6.3 haben wir Drehungen mit komplexen Zahlen beschrieben.) In 3.6.4 beschrieb ich die Art und Weise, wie man bei MUPAD die komplexen Zahlen benutzt. Wie man Differenzialgleichungen mithilfe dieser Zahlen löst, sahen wir ebenfalls schon in 3.7.2.

Wir betrachten nochmals unsere Gl. (4)

$$m\ddot{x} + kx + b\dot{x}' = F_0 \cos \omega t \quad (32)$$

Um komplexe Zahlen bei der Lösung dieser Gleichung zu benutzen, haben wir Gl. (32) mit  $i$  zu multiplizieren und zu (32) zu addieren

$$m\ddot{y} + ky + b\dot{y}' = F_0 \sin \omega t, \quad (33)$$

um  $mz'' + kz + bz' = F_0 e^{i\omega t}$ , (34) zu erhalten mit  $z = x + iy$ .



Um (32) zu lösen, lösen wir zuerst (34), die normalerweise keine Schwierigkeiten macht. Am Ende nehmen wir den Realteil als gesuchte Lösung.

(Wenn die erregende Kraft durch  $F_0 \cos(\omega t + \alpha)$  gegeben ist, haben wir auf der rechten Seite von (34)  $F_0 e^{i\omega t}$  zu schreiben, worin  $F_0 = F_0 e^{i\alpha}$  die Amplitude ist.)

Wir nehmen an, dass die Lösung von der Art  $z = z_0 e^{i\omega t}$  (35) ist.

Einsetzen in (34) ergibt

$$z_0 = F_0 / (k - m\omega^2 + i b\omega) = F_0 / (m(\omega_0^2 - \omega^2) + i b\omega) \quad (36)$$

(Die 1. Ableitung von  $z = z_0 e^{i\omega t}$  ist  $dz/dt = i\omega z_0 e^{i\omega t}$ , die 2. Ableitung beträgt  $z'' = -\omega^2 z_0 e^{i\omega t}$ .)

Den Nenner von  $z_0$  können wir wie jede komplexe Größe wie in Exponentialform schreiben:

$$m(\omega_0^2 - \omega^2) + i b\omega = [m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2]^{1/2} e^{i\theta}, \quad (37)$$

mit  $\theta = \arctan(b\omega) / (\omega_0^2 - \omega^2)$ .

Wir erhalten damit

$$A_0 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2}} \quad (38)$$

Mit diesem Ergebnis können wir schreiben

$$z_0 = A_0 e^{-i\theta} \quad (39)$$

Gl. (35) wird damit zu  $z = A_0 e^{i(\omega t - \theta)}$  . (40)

Der Realteil von Gl. (40) ist die gesuchte Lösung:

$$x = A_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (41)$$

Um die allgemeine Lösung von (4) zu erhalten, müssen wir die allg. Lösung der homogenen Gleichung  $m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = 0$  hinzufügen. Diese Lösung interessiert normalerweise aber nicht, denn sie beschreibt eine Schwingung, die nach kurzer Zeit abklingt. Die fortdauernde Schwingung wird von (41) beschrieben.