

6.3 Schwingungen III

Diesem Teil werden wir dem Studium einiger besonders wichtiger und bekannter Schwinger widmen. Zunächst betrachten wir ein weiteres Beispiel eines freien, ungedämpften Oszillators. Danach beschäftigen wir uns mit den gedämpften Schwingungen einer Wassersäule in einem **U-Rohr-Manometer**. Es handelt sich in diesem Fall um nichtlineare Schwingungen. Anschließend untersuchen wir einen nichtlinearen Schwinger vom Typ x^3 .

Die meisten natürlichen schwingfähigen Systeme sind nichtlinear, und ihr Verhalten wird von gewöhnlichen nichtlinearen Differenzialgleichungen beschrieben.

In den Abschnitten 6.3.4 und 6.3.5 behandeln wir das *Torsionspendel* und das *physische* (oder *physikalische*) *Pendel*.

6.3.1 Schwingungen eines senkrechten Masse-Feder-systems.

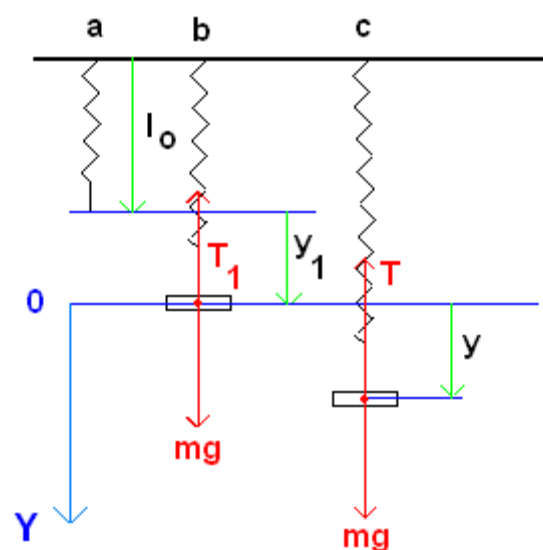


Fig.: 6.3-1

Fig. 6.3-1 zeigt ein senkrecht montiertes Masse-Feder-System in drei Positionen.

Im Fall **a** sehen wir eine Feder ohne angehängte Masse von der Länge l_0 . In **b** sehen wir Feder und Masse m in der Gleichgewichtslage mit der Verlängerung y_1 . Wir messen alle Verschiebungen y von der Gleichgewichtslage aus. T ist die Kraft, die die Feder auf die Masse m ausübt, mg ist das Gewicht der Masse (= Kraft der Erde auf m).

In der Gleichgewichtslage gilt $mg = -T_1 = -(-ky_1j) = ky_1j$, oder skalar geschrieben:

$$mg = ky_1 \quad (1)$$

Für eine beliebige Verlängerung, Position **c**, sagt Newtons 2. Gesetz:

$$-k(y+y_1) + mg = my'' \quad (2)$$

Gl. (1) zusammen mit Gl. (2) ergeben die *Bewegungsgleichung*

$$y'' + \omega_0^2 y = 0 \quad , \quad (3)$$

worin $\omega_0^2 := k/m$ und k = Federkonstante. Gl. (3) ist mit Gl. (6) aus 6.1.2 identisch. Als Lösung von Gl. (3) haben wir dann die früheren Gln. (9) und (10)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (4)$$

$$\text{oder } x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5)$$

Für die Konstante B haben wir mit $x'(0) = v_0$ den Wert $B = v_0/\omega_0$.

(Die Zahlenwerte sind: $l_0 = 20$ cm, $m = 1.2$ kg, $y_1 = 8$ cm. Die Anfangswerte lauten $y(0) = y_0 = 3$ cm und $v_0 = 0.1$ m/s.)

Es gibt zwei konservative Kräfte, die an der schwingenden Masse angreifen: die Gravitationskraft und die elastische Federkraft. Die potenzielle Energie muss ebenfalls aus zwei Teilen bestehen. (Als Bezugsniveau für E_p wählen wir willkürlich das untere Federende in Position **a**.)

Die potenzielle Energie der Gravitation ist $E_{p,1} = -mg(y_1 + y)$ und die der elastischen Kraft $E_{p,2} = k(y_1+y)^2/2$. (Die negativen Ableitungen dieser Ausdrücke liefern die Kräfte!)

Die gesamte potenzielle Energie beträgt:

$$E_p = E_{p,1} + E_{p,2} = ky^2/2 + (ky_1 - mg)y + ky_1^2/2 - mgy_1 \quad (6)$$

Zusammen mit Gl. (1) gilt $E_p = ky^2/2 + E_p(y_1)$. (7)

Die additive Konstante $E_p(y_1)$ hat keine physikalische Bedeutung und kann Null gesetzt werden.

Um die Feder ohne Beschleunigung ein Stück y auszudehnen, wenden wir die Kraft $F = ky$ an. Die dabei verrichtete Arbeit ist

$$W = \int_0^y F(y') dy' = \int_0^y ky' dy' = \frac{1}{2}ky^2 \quad (8)$$

Mit den Zahlenwerten für y und k ergibt sich als Arbeit $W = 0.0661$ J, um die Feder um 3 cm auszudehnen.

(Die Federkonstante beträgt $k = mg/y_1 = 1.2\text{kg} \cdot 9.8\text{ms}^{-2}/0.08\text{m} = 147$ N/m.)

Die Berechnung der Arbeit war einfach, weil uns die Kraft als Funktion von y gegeben war ($F = ky$). I. Allg. kennen wir die Kraft als Funktion der Zeit, und wir können die Arbeit nicht direkt mit $W = \int F dy$ berechnen. In einem solchen Fall bestimmen wir zuerst die Verschiebung als Funktion der Zeit mithilfe der Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$.

Beispiel:

Eine Kraft $F = 15t$ Newton wirkt auf eine Masse von 5 kg ein. Berechne die von der Kraft in den ersten 5s geleistete Arbeit, falls die Masse zu Beginn ruhte. Die Ortsvariable sei x .

Die Kraft ist eine Funktion der Zeit. Wir müssen demnach zuerst herausfinden, wie F von x abhängt.

Wir wissen: $v = v_0 + \int_{0..t} a \cdot dt = 0 + \int_{0..t} 3t \cdot dt$, da $a = F/m = 15t \text{ N}/5 \text{ kg} = 3t \text{ ms}^{-2}$

Das Integral ergibt $v = 3t^2/2$. Damit folgt $x = x_0 + \int_{0..t} v \ dt = t^3/2$.

Nach t aufgelöst, ergibt sich $t = (2x)^{1/3}$, und die Kraft als Wegfunktion ist

$F = 15 t = 15 \cdot 2^{1/3} \cdot x^{1/3}$. Jetzt können wir $W = \int_{0..x} F \cdot dx$ berechnen und erhalten:
 $W = 15 \cdot 2^{1/3} \cdot 3x^{4/3}/4$, d.h. $W \approx 14,174 \cdot x^{4/3}$.

Nach $t = 5\text{s}$ ist $x = 0.5 \cdot 5^3 \text{ m} = 62,5 \text{ m}$. Die Arbeit beträgt $W \approx 14,174 \cdot (62,5)^{4/3} \text{ J} = 3515,6 \text{ J}$.

Diese Rechnungen könnten wir auch mit MuPAD durchführen, z.B. folgendermaßen:

```

• reset():
v:=int(3*t,t):
x:=int(%,t):
solve(x=X,t):
t:= %[2]:
F:=15*%:
W:=int(%,X):
X:=5^3/2:
subs(W,X=%) :
float(%)

```

```

          1/3
(2 x)
3515.625

```

Wir könnten auch W als eine Zeitfunktion ausdrücken:

Aus $x = t^3/2$ folgt $dx = 3t^2/2 \cdot dt$. Mit $F = 15t$ ergibt sich $W = \int_{0..t} 15t \cdot 1,5t^2 dt = 5,625 t^4$ J. Wenn wir hier $t = 5$ s einsetzen, erhalten wir wieder $W = 3515,625$ J.

Die Periode $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi (m/k)^{1/2}$ und die Frequenz $f = 1/T$ hängen nur von der Masse m des Oszillators und von der Konstanten k der Feder ab. Sie sind unabhängig von den Anfangsbedingungen. Das bedeutet auch, dass diese Parameter nur von der elastischen Kraft bestimmt werden und nicht von äußeren Einflüssen abhängen. Im Falle der Gravitationswechselwirkung sahen wir, dass die Periode eines Planeten vom Bahnradius abhängt, d.h. von einer Anfangsbedingung.

6.3.2 Gedämpfte Schwingungen von Wasser in einem U-Rohr

Die Bewegungsgleichung für die Schwingungen einer Flüssigkeitssäule in einem U-Rohr muss den Durchmesser D des Rohres und die Länge L der Säule enthalten. Ferner einen "Störfaktor" Z , der von den beiden 90° -Krümmern stammt, und die kinematische Viskosität V der Flüssigkeit. In Texten über Flüssigkeitsdynamik können wir die Herleitung der folgenden Gleichung (9) finden, z.B. in W. Kalide, *Aufgabensammlung zur techn. Strömungslehre*, Hanser Vlg. München 1937.

$$x'' + 64V/D^2 \cdot x' - P/2L \cdot (x')^2 \cdot \text{sign } x' + 2g/L \cdot x = 0 \quad (9)$$

Die Funktion "sign" berücksichtigt den Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit. Als Parameter benutzen wir $L = 1,5$ m, $D = 0,02$ m, $P = 0,36$; $V = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (Wasser von 20°C). Einsetzen dieser Werte in (9) ergibt

$$x'' + bx' - ax'^2 \cdot \text{sign } x' + kx = 0, \quad (10)$$

mit $a = 0,12$; $b = 0,16$; $k = 13,08$.

Gl. (10) ist von 2. Ordnung und vom 2. Grad, die wir numerisch lösen.

- `reset()://vergl. einfaches Pendel in 3.2`
`a:=0.12:b:=0.16:k:=13.08:`
`x0:=0.1:v0:=0:`
`F:={x'(t)+b*x'(t)-a*x'(t)^2*sign(x'(t))+k*x(t)=0,`
`x'(0)=v0,x(0)=x0}:`
`fields:=[x(t),x'(t)]:`
`f:=numeric::ode2vectorfield(F,fields):`
`X:=numeric::odesolve2(f):`
`dt:=0.1:imax:=200:`
`plot(`
`plot::Line2d([t-dt,X(t-dt)[1]],[t,X(t)[1]],`
`Color=RGB::Blue,VisibleAfter = t)`
`$ t in [i*dt $ i=1..imax],AxesTitles=["t","x"])`

(Anzeige mit "Animation-End")

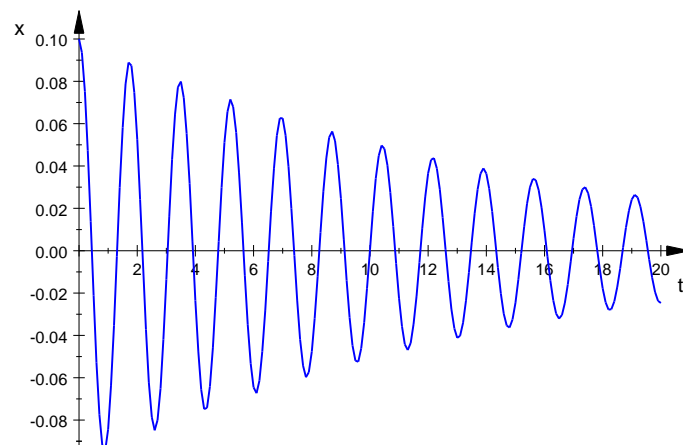


Fig.: 6.3-2

6.3.3 Anharmonischer Oszillator

Fig. 6.3-3 zeigt eine Masse m , die ohne Reibung auf einer Schiene gleiten kann. Der Körper ist über eine Feder mit einer Stange verbunden, die im Abstand l_0 über der Schiene verläuft. Auch die Feder hat diese Länge, wenn sie sich im ungespannten Zustand befindet.

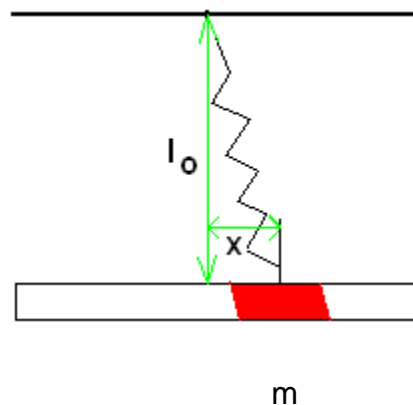


Fig.: 6.3-3

Wenn der Körper um das Stück x verschoben ist, dehnt sich die Feder um

$$(l_0^2 + x^2)^{1/2} - l_0 = l_0 \left((1 + (x/l_0)^2)^{1/2} - 1 \right)$$

Wenn x klein ist, können wir $(x/l_0)^2 \ll 1$ setzen und die Wurzel ersetzen durch $1 + 0.5 (x/l_0)^2$. Mit diesen Näherungen erhalten wir für die Kraft der Feder auf den Gleiter

$$F = k x^2 / (2l_0) \quad (11)$$

Die horizontale Komponente ist $F_x = -F \cos \varphi$. (F_x zeigt nach links, wenn der Gleiter nach rechts verschoben ist.)

Es gilt $\cos \varphi = x / (l_0^2 + x^2)^{1/2} \approx x / l_0$. Die rücktreibende Kraft ist also zur 3. Potenz der Verschiebung x proportional:

$$F_x = - k / (2l_0^2) \cdot x^3 \quad (12)$$

Mit der Abkürzung $c := k/(2l_0^2)$ erhalten wir als Bewegungsgleichung

$$x'' = -c/m \cdot x^3 \quad (13)$$

Dieser x^3 -Schwinger wurde von A. Cromer in *The x^3 Oscillator*, The Physics Teacher 30(1992) 249 beschrieben.

Interessant ist die Tatsache, dass die Periode dieses *anharmonischen* Oszillators umgekehrt proportional zur Amplitude ist, d.h. dass T wächst, wenn A fällt.

Schon in 4.7.3 haben wir einen anharmonischen Oszillator kennengelernt (vgl. Fig. 4.7-4 mit dem Potenzial von *Lennard-Jones* für O_2). Eine einfache harmonische Bewegung wird von der Kraft $F = -kx$ erzeugt. Die entsprechende potenzielle Energie ist $E_p = kx^2/2$, wenn x von der Gleichgewichtslage aus gemessen wird. Wenn die Gleichgewichtslage nicht mit dem Ursprung zusammenfällt, sondern mit x_0 , wie in Fig. 4.7-4, haben wir $E_p = k(x-x_0)^2/2$.

Betrachten wir nun ein Teilchen, das eine *anharmonische* Schwingung ausführt, und zwar auf der x -Achse eines Koordinatensystems. Die potenzielle Energie ist

$$E_p = ax^2 - bx^3 \quad (14)$$

Die Kraft, die auf das Teilchen einwirkt, ist gegeben durch

$$\mathbf{F} = -dE_p/dx \cdot \mathbf{i} = (-2ax + 3bx^2) \cdot \mathbf{i} \quad (15)$$

oder

$$F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = -2ax + 3bx^2 \quad (16)$$

Das Teilchen ist im Gleichgewicht, wenn $F = 0$, d.h. wenn $-2ax + 3bx^2 = 0$. Das ist der Fall für $x_{11} = 0$ oder $x_{12} = 2a/3b$. Da E_p in x_{11} ein Minimum hat, wird der Ursprung der Punkt des stabilen Gleichgewichts sein. x_{12} ist die Stelle des unstabilen Gleichgewichts. In diesem Punkt haben wir $E_p = 4a^3/(27b^2) := E_{\text{krit}}$

Wenn die Gesamtenergie $E = 0.4\text{J}$ wäre, so würde das Teilchen zwischen $x_1 = -0,26\text{ m}$ und $x_2 = 0,4\text{ m}$ schwingen (Fig. 6.3-4); $x_{12} = 0,6\text{ m}$ und $E_{\text{krit}} = 0,54\text{ J}$. Wenn E sehr klein ist, ist auch A sehr klein, und die Kraft ist praktisch elastisch: $F = -kx$ mit $k = d^2E_p/dx^2 = 2a$.

Mit dieser Annahme erhalten wir dann einfache harmonische Schwingungen mit der Periode

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(m/2a)^{1/2} \quad (17)$$

- ```

a:=4.5:b:=5:
Ep:=a*x^2-b*x^3:
Ep0:=a*x^2:
Etot:=0.4:
F:=-2*a*x+3*b*x^2:
plotfunc2d(Ep,Etot,XRange=-0.5..0.8,YRange=-0.5..0.8,
Title="x1",TitlePosition=[-0.24,0.41],AxesTitles=["x","E"])

```

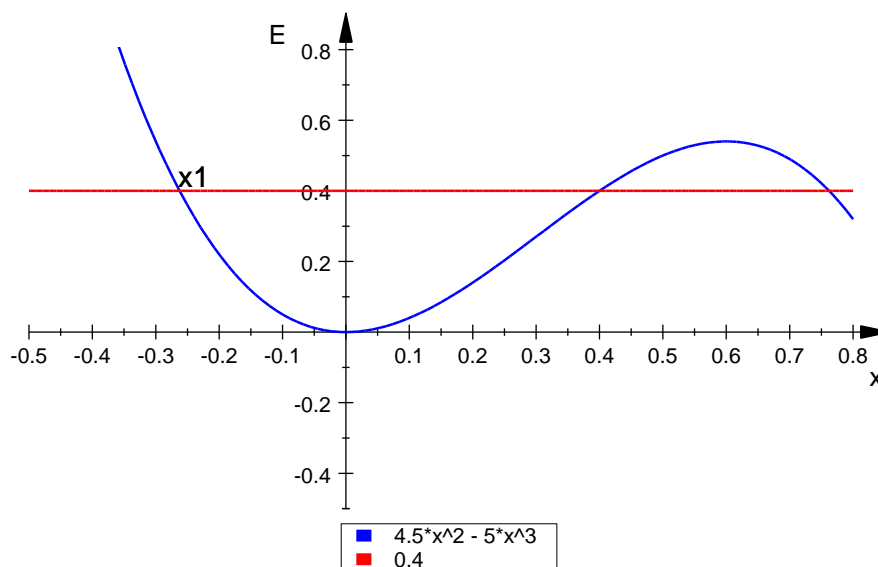


Fig.: 6.3-4

Wenn wir die Näherung kleiner Schwingungen nicht voraussetzen, wird die Frequenz von der Energie abhängen.

Auch in der folgenden Abbildung sehen wir Kraft und potenzielle Energie bei einem harmonischen Oszillator, den wir für kleine Energien als Näherung eines anharmonischen Oszillators benutzen können.

Bei höheren Energien gilt diese Näherung nicht mehr, und wir müssen die Frequenzen mit einer Störungsmethode oder mithilfe einer *Taylorreihe*, vgl. 7.1.2, berechnen.



Anharmonischer Oszillator mit harmonischer Näherung.

- $a:=4.5:b:=5:$   
 $Ep:=a*x^2-b*x^3:$   
 $Ep0:=a*x^2:$   
 $F:=-2*a*x+3*b*x^2://Kraft$   
 $plotfunc2d(Ep,Ep0,F,XRange=-0.5..0.8,YRange=-1.5..0.8,$   
 $Title="F",TitlePosition=[0.4,-1.2])$

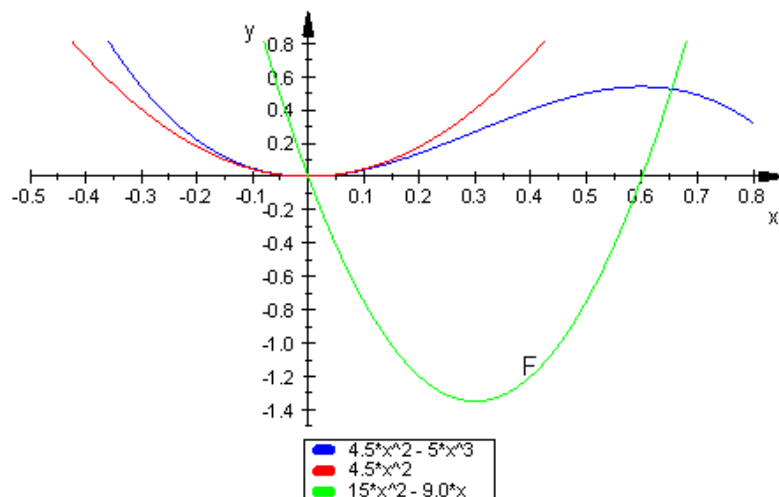


Fig.: 6.3-5

Die Kraft ist außerhalb des Intervalls  $[0, 2a/3b] = [0, 0.6]$  positiv. Wenn das Teilchen in die Region  $x > 0.6$  eintritt, wird es nach "Unendlich" gestoßen (das Molekül wird dissoziiert).

### 6.3.4 Torsionspendel

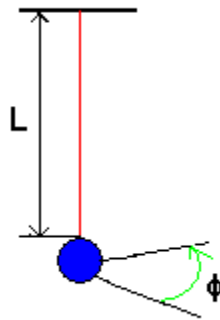


Fig.: 6.3-6

Die Figur zeigt einen einfachen linearen Oszillator, der Drehschwingungen ausführt. Man kann sich eine mittelschwere Kugel vorstellen, die an einem Draht hängt, der um den Winkel  $\phi$  verdreht und losgelassen wird. Das obere Draht-ende befindet sich in einer Klemmvorrichtung oder sei angeschweißt.

Wenn wir die Kugel aus ihrer Ruhelage herausdrehen und loslassen, wird sie um ihre Aufhängungsachse einfache harmonische Drehschwingungen ausführen. Indem wir die Kugel drehen, verdrehen wir den Draht und speichern in ihm potenzielle Energie, ähnlich wie beim Verformen einer Spiralfeder. Die Verdrehung des Drahtes erzeugt ein *Rückstellmoment*  $M$ , das proportional zur Verdrehung  $\phi$  ist

$$M = - D\phi \quad (18)$$

(Vgl. 4.2.1, wo das Drehmoment  $\mathbf{M}$  eingeführt wurde.)

Die Konstante  $D$  heißt *Winkelrichtgröße* und ist abhängig von der Drahtlänge, vom Drahtradius und vom Material des Drahtes:

$$D = 4r^4/(2L) \cdot G \quad (19)$$

$G$  = Torsionsmodul (Materialkonstante).

Gl. (18) ist das Winkeläquivalent zum linearen Gesetz  $F = -kx$  von Hooke.

Anstelle von  $ma = -kx$  schreiben wir jetzt  $I \cdot \phi'' = - D\phi$ , worin  $I$  das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf die durch den Draht definierte Achse ist, vergleiche 4.2.2.  $\phi''$  = Winkelbeschleunigung.

Da Gl. (18) die "Winkelform" des Hooke'schen Gesetzes ist, können wir vermuten, dass die zu  $T = 2\pi(m/k)^{1/2}$  äquivalente Gleichung folgendermaßen lautet

$$T = 2\pi (I/D)^{1/2} \quad . \quad (20)$$

Tatsächlich ist (20) die korrekte Gleichung für die Periode des **ungedämpften** Torsionspendels. Dies folgt aus der Lösung der Gleichung  $I\varphi'' = -D\varphi$ , denn diese lautet  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$  mit

$$\omega_0 = (D/I)^{1/2} = 2\pi/T \quad . \quad (20a)$$

Dieses Ergebnis können wir dazu benutzen, experimentell auch das Trägheitsmoment  $I$  eines unregelmäßig geformten Körpers zu bestimmen, wenn  $D$  bekannt ist.

Wenn die Kugel in eine Flüssigkeit der Viskosität  $\eta$  eingetaucht ist, erhalten wir **gedämpfte** Drehschwingungen. Das 2. Newtonsche Gesetz lautet dann:

$$I\varphi'' = -D\varphi - b\varphi' \quad (21)$$

mit der Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega' t), \quad (22)$$

worin  $\gamma = b/(2I)$  und  $\omega' = (D/I - (b/2I)^2)^{1/2}$ .

$I = 2mR^2/5$  ist das Trägheitsmoment der Kugel vom Radius  $R$  mit Bezug auf den Draht als Achse, vgl. 3.4.10, S.7, wo wir für  $\rho=1$  die Beziehung  $I = 8\pi R^5/15$  erhielten. Wenn man dies mit  $\rho = m/V$  multipliziert und  $V = 4/3 \cdot R^3 \pi$  berücksichtigt, ergibt sich  $I = 2mR^2/5$ .

In der Hydromechanik lernen wir, dass der Zähigkeitskoeffizient  $b$  gegeben ist durch  $b = 8\pi\eta R^3$ , siehe z.B. Lamb, H.: Hydrodynamics, Cambridge, 1916, 633.

Die berühmte Torsionswaage (Gravitationsdrehwaage) von **Cavendish** (1731-1797) ist ebenfalls eine Art Torsionspendel. Man kann mit ihr die Gravitationskonstante  $G$  bestimmen.

### 6.3.5 Physisches Pendel

Jeder feste Körper kann Schwingungen um eine horizontale Achse ausführen, die nicht durch den Massenschwerpunkt (C) des Körpers verläuft.

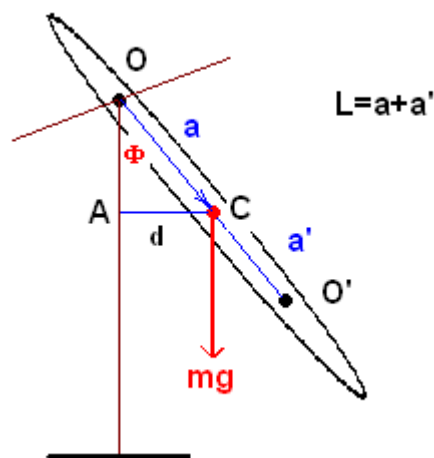


Fig.: 6.3-7

Wir wissen, dass gilt  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , 4.2.1, in Bezug auf den Drehpunkt O, wobei  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor ist (gleich dem Vektor  $\mathbf{a}$  von O nach C). Für den Betrag von  $\mathbf{M}$  haben wir

$$M = r \cdot mg \cdot \sin\varphi = d \cdot mg, \text{ mit } d = AC = a \cdot \sin\varphi \text{ als "Hebelarm" für } mg.$$

Da  $\mathbf{M}$  "versucht", das Wachstum von  $\varphi$  zu verhindern, haben wir in der Bewegungsgleichung ein Minuszeichen zu setzen

$$I \cdot \varphi''(t) = - mg \cdot a \cdot \sin\varphi(t) \quad (23)$$

$I$  ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse. Mit Hilfe des Steiner'schen Satzes, 4.3.3, erhalten wir

$$(I_C + ma^2) \cdot \varphi''(t) = - mg \cdot a \cdot \sin\varphi(t) \quad (24)$$

Die Gleichung ist nicht linear, da sie von  $\sin\varphi$  abhängt. Bei kleinen Amplituden können wir jedoch  $\sin\varphi \approx \varphi$  setzen:

$$\varphi''(t) = -mg \cdot a / (I_C + ma^2) \cdot \varphi(t) \quad (25)$$

Das ist die Gleichung einer einfachen harmonischen Schwingung mit der Periode

$$T = 2\pi \left( (I_C + ma^2) / (mga) \right)^{1/2} \quad (26)$$

Auf der anderen Seite des Schwerpunktes C markieren wir einen Punkt O', den wir auch als Drehpunkt wählen können.

In Bezug auf O' erhalten wir die Periodendauer  $T' = 2\pi \left( (I_C + ma'^2) / (mga') \right)^{1/2}$ .

Sei a' die Entfernung, für die  $T = T'$ , d.h.  $a' = I_C / (ma)$ . Für die Summe  $L = a + a'$  erhalten wir

$$L = a + a' = (I_C + m a^2) / (m a) \quad (27)$$

Einsetzen von L in Gl. (26) ergibt

$$T = 2\pi \cdot (L/g)^{1/2} \quad (28)$$

Wir erhalten also einen Ausdruck, der der Form nach identisch ist mit dem Ergebnis beim einfachen Pendel. L heißt *reduzierte Pendellänge* des physischen Pendels. Die Größen L und T können experimentell mit befriedigender Genauigkeit bestimmt werden, so dass mithilfe von (28) die Erdbeschleunigung g an einem fast beliebigen Punkt der Erde ermittelt werden kann.

Kapitän *Henry Kater* (1777-1835) war der erste, der 1818 g mithilfe eines physischen Pendels bestimmte. In Potsdam verfeinerten *Kühnen* und *Furtwängler* die Methode und veröffentlichten 1906 für Potsdam einen g-Wert von  $981,274 \text{ cm/s}^2$ . Dieser erstaunlich genaue Wert wurde bis 1968 als offizieller g-Wert benutzt.

*Hammond* und *Faller* reisten um 1970 mit einem 800kg-Interferometer in ihren Koffern und Kisten um die Welt und bestimmten an ausgewählten Orten g mit einer bis dahin ungekannten Genauigkeit. Sie kamen auch ins physikalische Institut der National-Universität in Bogotá, Kolumbien, wo sie an einer genau markierten Stelle  $g = 977,390015 \text{ cm/s}^2$  bestimmten. Mit einer derartigen Einrichtung könnte man geophysikalische Messungen im Garten des Großvaters vornehmen und eventuell auf eine Goldader stoßen –oder sich doch wenigstens unabhängig von Putins Gas machen.