6.2 Schwingungen II

6.2.1 Freie Schwingungen mit Dämpfung

Bis jetzt haben wir Reibungskräfte außer Acht gelassen. Aber jedes mechanische System besitzt einen gewissen Grad an innerer Reibung, die wie ein Verbraucher der mechanischen Energie wirkt. Wir wissen aus Erfahrung, dass ein schwingender Körper allmählich seine Amplitude verkleinert und schließlich aufhört zu schwingen. Die Reibungskraft ist bei kleinen Geschwindigkeiten proportional zur Geschwindigkeit (= viskose Dämpfung): R = -bx'(t). Das negative Vorzeichen berücksichtigt die Tatsache, dass R immer entgegengesetzt zu v = x'(t) wirkt.

Für größere Geschwindigkeiten findet man, dass R proportional zu v^2 ist. Das war in 2.5.1 der Fall, als wir die Bewegung eines Tennisballs studierten. Die Abhängigkeit von v^2 bringt Schwierigkeiten für die analytische Lösung des Problems. Beim Masse-Feder-System ist die Kraft von der Form F = -kx - bx', und sie stellt mit x' ein vereinfachstes Modell für viele reale Situationen dar.

Das 2. Newtonsche Gesetz liefert folgende Bewegungsgleichung

$$mx''(t) = -k\,x\,(t) - b\,x'(t) \qquad (1)$$

Man schreibt diese Gleichung gewöhnlich in der Form

$$x'' + 2\gamma\,x' + \omega_0^2\,x = 0 \qquad (2)$$

mit den Abkürzungen $\omega_0^2 = k/m$ und $2\gamma = b/m$. b ist der Reibungskoeffizient, und die Konstante γ nennen wir *Abklingkoeffizient* mit der Einheit s^{-1}.

Ein System, das sich durch Gleichung (2) beschreiben lässt, ist ein freier harmonischer Oszillator von einem Freiheitsgrad mit viskoser Dämpfung. (Die Proportionalitätskonstante b wird auch *Koeffizient der viskosen Dämpfung* genannt und besitzt die Einheit N·s/m. Eine derartige Dämpfung findet man z.B. bei Stoßdämpfern. $D = \gamma/\omega_0$ heißt Dämpfungsgrad und ist ohne Einheit.)

Eine homogene Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten hat immer eine Lösung der Form $x = C\,e^{\lambda t}$. Die Substitution in Gl. (2) liefert die *charakteristische* Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad (3)$$

mit den beiden Lösungen:

$$\lambda_1 = -\gamma + (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} \qquad (4a)$$

$$\lambda_2 = -\gamma - (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} \qquad (4b)$$

Mit jeder von ihnen ist $x(t) = C\,e^{\lambda t}$ eine Lösung von (2). Die allgemeine Lösung mit zwei Konstanten C_1 und C_2 lautet

$$x(t) = C_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,e^{\lambda_2 t} \qquad (5)$$

(Die Überlagerung von Lösungen ist nur erlaubt bei linearen Diff.-Gleichungen, d.h. bei Diff. Gln., die linear sind in Bezug auf x und die Ableitungen von x.)

Da $0 <= \gamma <= \infty$, kann der Radikand $\gamma^2 - \omega_0^2$ positiv, negativ oder auch Null sein, woraus sich drei Kategorien von gedämpter Bewegung ergeben.

6.2.2 Stark gedämpfter Oszillator: $\gamma^2 > \omega_0^2$ (Kriechfall)

Die Wurzeln λ_1 und λ_2 sind negative reelle Zahlen, und Gl. (5) beschreibt eine Bewegung, die sich für große t-Werte der Null nähert (Kriechfall). Das System zeigt keine Schwingungen. Einmal ausgelenkt und losgelassen, kehrt es in seine Ausgangslage zurück. Die Bewegung wird durch die Summe zweier abnehmender Exponentialfunktionen beschrieben.

Wir können diese Summe wie folgt schreiben

$$x(t) = A\,e^{-\gamma t+\alpha t} + B\,e^{-\gamma t-\alpha t}, \qquad (6)$$

wobei wir folgende Abkürzungen benutzten: $\alpha = (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}$, $A = [(\gamma+\alpha)x_0 + v_0]/(2\alpha)$, $B = -[(\gamma-\alpha)x_0 + v_0]/(2\alpha)$; x_0 , v_0 = Anfangsbedingungen.

Hier ist ein von MUPAD durchgerechnetes Beispiel:

Unser Anfangswertproblem (IVP = initial value problem) ist gegeben durch x''(t) + 60 x'(t) +100 x(t) = 0 mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0 = 5$ und $x'(0) = v_0 = 0$

- ```
  reset():
  pvi := ode({x''(t) + 60*x'(t)+100*x(t) = 0,
  x(0) = 5, x'(0) = 0}, x(t)):
  solve(%)
  ```

$$\left\{\left(\frac{15\cdot\sqrt{2}}{8}+\frac{5}{2}\right)\cdot e^{(20\cdot\sqrt{2}-30)\cdot t}-\left(\frac{15\cdot\sqrt{2}}{8}-\frac{5}{2}\right)\cdot e^{-(20\cdot\sqrt{2}+30)\cdot t}\right\}$$

- ```
  eq:=op(%,1);
  ```

$$\left(\frac{15\cdot\sqrt{2}}{8}+\frac{5}{2}\right)\cdot e^{(20\cdot\sqrt{2}-30)\cdot t}-\left(\frac{15\cdot\sqrt{2}}{8}-\frac{5}{2}\right)\cdot e^{-(20\cdot\sqrt{2}+30)\cdot t}$$

- ```
  plot(plot::Function2d(eq,t=0..2))
  ```

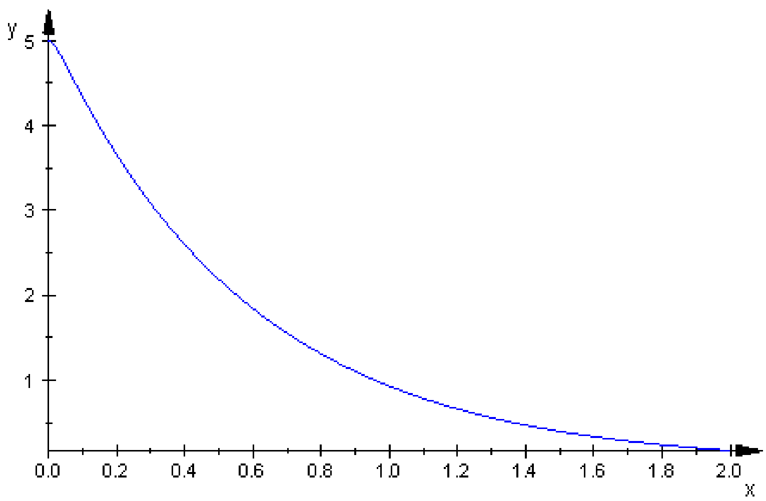

Fig.: 6.2-1
  ```

6.2.2 Schwach gedämpfter Ozillator: $\gamma^2 < \omega_0^2$ (Schwingfall)

Es ist praktisch, eine neue Variable ω' für $(\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$ einzuführen.
Wir erhalten so

$$x(t) = C_1\, e^{-\gamma t + i\omega' t} + C_2\, e^{-\gamma t - i\omega' t} \qquad (7)$$

$$= e^{-\gamma t}\,(C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t})$$

$$= e^{-\gamma t}\,(A\cos\omega' t + B\sin\omega' t)$$

$$= Ce^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi) \qquad (8)$$

Gleichung (8) beschreibt eine harmonische Schwingung mit exponentiell abnehmender Amplitude $A(t) = C\, e^{-\gamma t}$. Innerhalb der *Relaxationszeit* $\boldsymbol{\tau = 1/\gamma}$ verkleinert sich die Funktion $A(t) = C\, e^{-\gamma t}$ um den Faktor 1/e.

Die Frequenz $\quad \omega' = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} = (k/m - (b/(2m))^2)^{1/2} \qquad (9)$

ist kleiner als die natürliche Frequenz ω_0 und wird gelegentlich gedämpfte natürliche Frequenz genannt. Die Periode der gedämpften Schwingung ist durch $T' = 2\pi/\omega'$ gegeben. (Wenn es keine Dämpfung gäbe, wäre die Konstante b Null und $\omega' = \omega_0$.)

Die Konstanten A und B bestimmen wir wieder durch die Anfangsbedingungen. Mithilfe von $x(0) = x_0$ folgt $A = x_0$. B hängt von x(0) und von $v(0) = v_0$ ab. Es ergibt sich

$$B = v_0/\omega' + \gamma x_0/\omega' \qquad (9)$$

Für die Konstanten C und φ erhalten wir

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega'}\right)^2} \qquad (10)$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{x_0\,\omega'}\right) \qquad (11)$$

Beispiel:

Zeichne die Funktion x(t) für einen schwach gedämpften Oszillator mit der Gl. m x''(t) + b x'(t) + k x(t) = 0 und den Anfangswerten x(0) = 1.5m, x'(0) = -3m/s. Die Werte von m, b, k lauten m =1kg, b = 2 Ns/m und k = 64 N/m.

Wir benutzen wieder MuPAD, um die gestellte Aufgabe zu lösen:

```
• reset()://Schwach gedämpfter Oszillator
  m:=1:b:=2:k:=64:x0:=3/2:v0:=-3:

       g:=b/(2*m)://γ
       w0:=sqrt(k/m):// nat. Frequenz
       w1:=sqrt(k/m-(b/(2*m))^2)://gedämpfte Freq.ω'
       C:=sqrt(x0^2+((v0+g*x0)/w1)^2):
       //corr:=cos(arctan(g/w1))://Korrekturfaktor für
       A(t)
       fi:=float(-arctan((v0+g*x0)/(x0*w1))):
       pvi := ode({x''(t) + b*x'(t)+k*x(t) = 0,
       x(0) = 3/2, x'(0) = -3}, x(t)):
       solve(%):
       eq:=op(%,1):
       p:=plot::Function2d(eq,Color=RGB::Red,t=-0.2..2):
       am1:=C*exp(-g*t)://Amplitude, vgl. Anmerkung *
       am2:=-C*exp(-g*t):
       Am1:=plot::Function2d(am1,LineStyle=Dashed,t=-
       0.2..2):
       Am2:=plot::Function2d(am2,LineStyle=Dashed,t=-
       0.2..2):
       plot(p,Am1,Am2,AxesTitles=["t","x(t)"])
```

Die Ergebnisse lauten**:**

a. $\omega_0 = 8\ s^{-1}$
b. $\omega' \approx 7{,}932\ s^{-1}$
c. $C = 4\sqrt{7}/7 \approx 1{,}511$
d. $\varphi \approx 1{,}253$ rad.
e. $x(t) = e^{-t}\,(3/2\cdot\cos(3\sqrt{7}\cdot t) - \sqrt{7}/14\cdot\sin(3\sqrt{7}\cdot t))$
   oder $x(t) = C\,e^{-t}\cos(3\sqrt{7}\cdot t + \varphi)$
f. Amplitude = $\pm\, C\,e^{-t}$

* Die Amplitude müsste eigentlich sein `C*exp(-g*t)*cos(arctan(g/w1))`, wie A. Soares de Castro, Am.J.Phys, Vol. 54, No.8, August 1986, p. 741, zeigte. Aber dieser Korrekturfaktor macht i. Allg. wenig Unterschied.

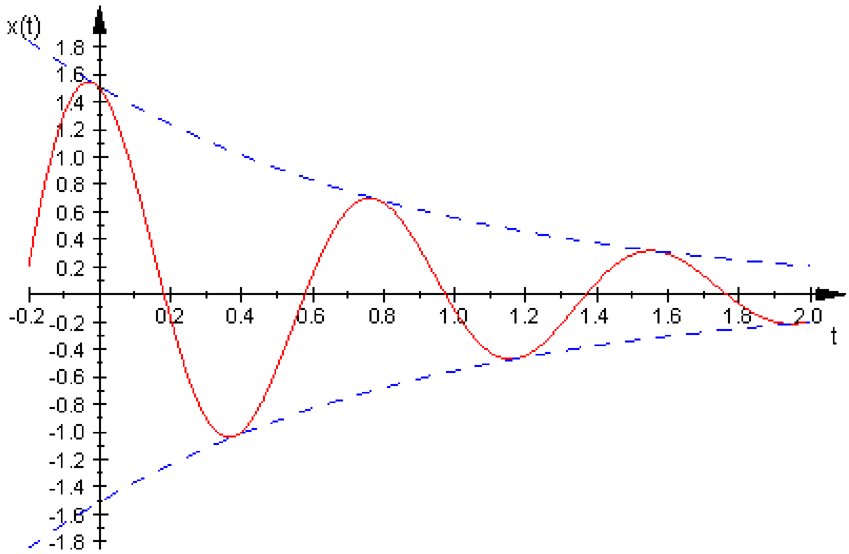

Fig.: 6.2-2

Der Graph zeigt die Veränderlichkeit der Auslenkung x(t) und der Amplitude. Man kann dem Graphen auch die charakteristischen Bewegungsgrößen entnehmen, z.B. $T' = 2\pi/\omega' = 0{,}792$s und den Quotient zweier aufeinanderfolgender Amplituden $x_n/x_{n+1} = 2{,}207$.

Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Amplituden (auf derselben Seite der t-Achse) x_n und x_{n+1} ist konstant, denn wir haben

$$x_n = Ce^{-\gamma t_n}\cos(\omega' t_n + \varphi) \text{ und } x_{n+1} = Ce^{-\gamma(t_n+T')}\cos(\omega' t_n + \varphi + 2\pi) = Ce^{-\gamma(t_n+T')}\cos(\omega' t_n + \varphi),$$

woraus folgt: $x_n/\,x_{n+1} = e^{\gamma T'} = e^{\pi b/(\omega' m)}$ = konstant.

Das *logarithmische Dekrement* δ (auch Λ) ist definiert durch

$$\delta = \ln\,(x_n/x_{n+1}) = \gamma T' = \pi b/(\omega' m) \qquad (12)$$

Die Messung von δ wird oft benutzt, um den Wert des *Koeffizienten der viskosen Dämpfung* b experimentell zu bestimmen.

Um b zu berechnen, benutzt man dann Gl. (12):

$$b = \frac{\delta \cdot 2\sqrt{km}}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad . \qquad (13)$$

Bei schwacher Dämpfung gilt $\delta \ll 1$, und Gl. (13) vereinfacht sich zu

$$b \approx \delta (km)^{1/2} / \pi. \qquad (14)$$

6.2.3 Kritisch gedämpfter Oszillator: $\gamma = \omega_0$
(aperiodischer Grenzfall)

Die Wurzeln λ_1 und λ_2 sind gleich ($\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0$).
Um die Bewegungsgleichung zu lösen, gehen wir von der Tatsache aus, dass sie die folgende partikuläre Lösung besitzt

$$x_1(t) = e^{-bt/(2m)} = e^{-\gamma t} \qquad (1)$$

Um eine zweite Lösung zu finden,multiplizieren wir x_1 mit der neuen Variablen z

$$x(t) := x_1(t) \cdot z(t) \qquad (2)$$

Wir wollen z so bestimmen, dass (2) eine neue, linear unabhängige Lösung ist.

Wir benötigen dazu die 1. und 2. Ableitung von Gl. (2):

$$x'(t) = x_1'\, z + x_1\, z' \quad \text{und} \quad x''(t) = x_1''\, z + 2\, x_1'\, z' + x_1\, z''$$

Diese Ausdrücke setzen wir in die Bewegungsgleichung ein:

$$z(x_1'' + 2\gamma x_1' + \omega_0^2 x_1) + z'(2x_1' + 2\gamma x_1) + z''\, x_1 = 0 \qquad (3)$$

Da x_1 eine Lösung ist, gilt $(x_1'' + 2\gamma x_1' + \omega_0^2 x_1) = 0$.
Setzen wir in $(2x_1' + 2\gamma x_1)$ die Ableitung von Gl. (1) ein, ergibt sich ebenfalls 0.
So bleibt von Gl. (3) $z''(t) = 0$. Diese Gleichung hat die partikuläre Lösung $z = t$.

Damit haben wir eine zweite Lösung der Bewegungsgleichung gefunden

$$x_2(t) = x_1(t)z(t) = t\, e^{-\gamma t} \qquad (4)$$

Die Lösung der Differenzialgleichung für den Fall gleicher Wurzeln lautet also

$$x(t) = C_1\, e^{-\gamma t} + C_2\, te^{-\gamma t} = (C_1+C_2t)\, e^{-\gamma t} = (C_1+C_2t)\, e^{-\omega_o t} \qquad (5)$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$; $v(0) = v_0$ folgt $C_1 = x_0$ und $C_2 = v_0 + \gamma x_0$.

Erneut geht x(t) gegen Null, und es tritt keine Schwingung auf. Nach einer gewissen Zeit wird das Abfallen der Exponentialfunktion größer sein als das lineare Wachsen des ersten Faktors. Aus der folgenden Abbildung sehen wir, dass die Auslenkung eines kritisch gedämpften Oszillators schneller gegen Null strebt als die eines stark gedämpften Schwingers.

```
• reset():
  m:=1:x0:=30:k:=9:v0:=0:
  //aperiodischer Grenzfall
  Eq:=m*x''(t)+b*x'(t)+k*x(t) = 0:
  subs(Eq,b=6):
  ode({%,x(0)=x0,x'(0)=0}, x(t)):
  f1:=op(solve(%)):
  //stark gedämpft (Kriechfall)
  subs(Eq,b=15):
  ode({%,x(0)=x0,x'(0)=0}, x(t)):
  f2:=op(solve(%)):info1:=plot::Text2d("Kriechfall",[1.5,18]):
  info2:=plot::Text2d("aperiod. Grenzfall",[1.4,8]):
  plotfunc2d(f1,f2,info1,info2,XRange=0..4,YRange=-5..30):
```

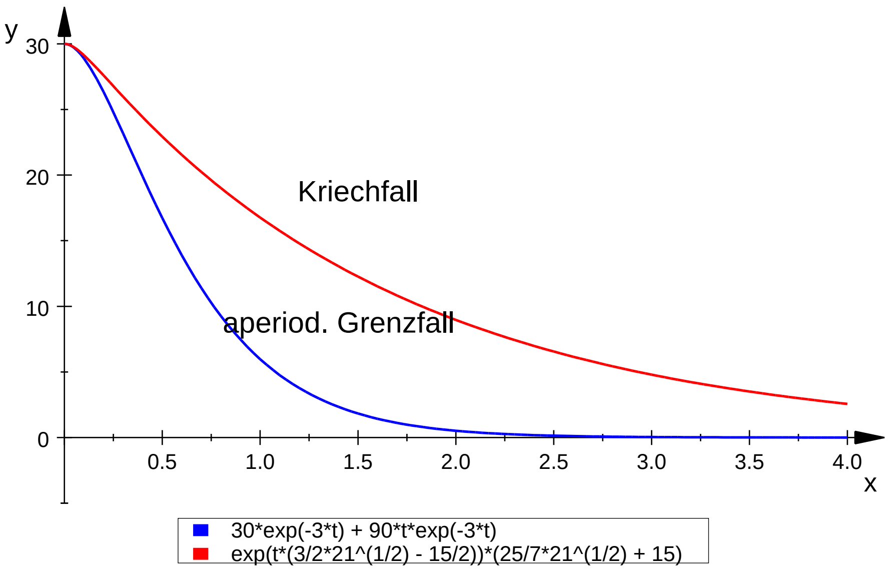

Fig.: 6.2-3

Anfangswerte: m = 1kg, k = 9 N/m, x_0 = 30mm, v_0 = 0;

b = 15 N·s/m   für den Kriechfall ; b = 6N ·s/m für den aperiodischen Grenzfall.

Der "aperiodische Grenzfall" ist erwünscht, wenn man möchte, dass eine Auslenkung möglichst schnell wieder zurückgeht, z.B. bei Zeiger-Messinstrumenten und eventuell bei Türen (die auch möglichst schnell und ohne zu schwingen wieder in den Ausgangszustand zurückgehen sollen).

Bevor wir uns den **Energiebetrachtungen** beim Oszillator zuwenden, werden wir eine kleine Schar von wirklich schwingenden "Schwingern" mit verschiedenen Dämpfungen ansehen.

Beachte, wie man mit MUPAD eine **Kurvenschar** zeichnen kann!

```
• reset():
  //Oszillator mit verschiedenen Dämpfungen
  m:=1:x0:=5:K:=100:
  werte_von_R:=[2,10,60]://Kurvenschar
  ivp := ode({m*x''(t)+R*x'(t)+K*x(t) = 0,
  x(0)=x0,x'(0)=0}, x(t)):
  f:=op(solve(ivp)):
  plotfunc2d(subs(f,R=werte_von_R[i])
  $ i=1..3,XRange=0..2,YRange=-5..5):
```

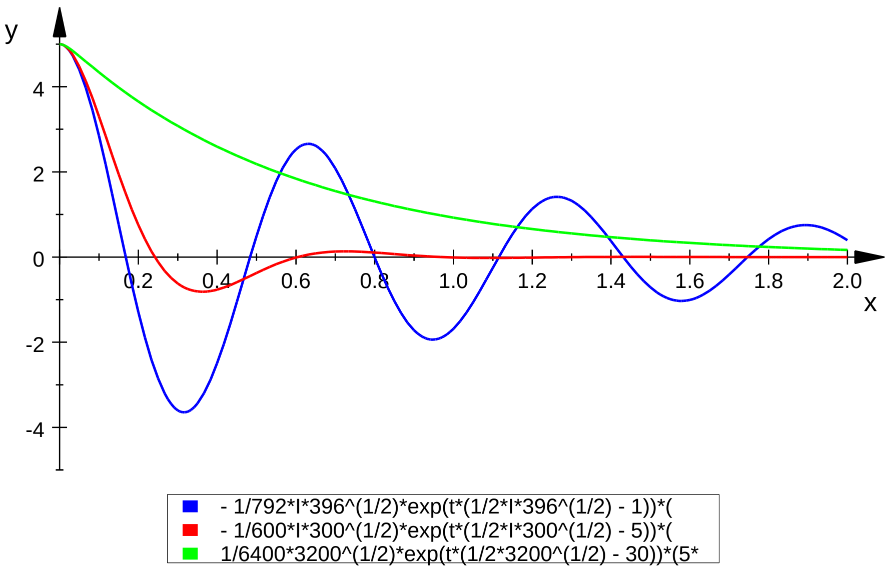

Fig.: 6.2-4

6.2.4 Energiebetrachtungen beim Oszillator

Schauen wir uns die mechanische Gesamtenergie eines harmonischen Oszillators (Masse-Feder-System) an!

$$E = mv^2/2 + m\omega_0^2x^2/2, \qquad (1)$$

worin $\omega_0^2 = k/m$, siehe 4.7.3/4. Wir können leicht zeigen, dass E sich nicht mit der Zeit ändert:

$$dE/dt = d(mv^2/2 + m\omega_0^2x^2/2)/dt = x'm(x''+\omega_0^2x) = x'm\cdot 0 = 0.$$

Ebenso einfach ist es zu zeigen, dass E proportional ist zum Quadrat von Amplitude und Frequenz, denn mit $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$ ergibt sich zuerst

$$E_k = m A^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)/2 \quad \text{und} \quad E_p = m A^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)/2 \qquad (2)$$

und dann

$$E = E_k + E_p = m A^2 \omega_0^2/2 = kA^2/2 \qquad (3)$$

Aus den Gln. (2) ersieht man, dass sowohl kinetische als auch potenzielle Energie Oszillationen mit derselben Amplitude $kA^2/2$ und der Phasenverschiebung $\pi/2$ ausführen.

Wenn E_p maximal ist, ist E_k minimal –und umgekehrt. In Fig. 6.2-5 sehen wir den zeitlichen Verlauf beider Energien beim Oszillator für den Fall $\varphi = 0$.

```
• reset()://Potenzielle und kinetische Energie beim Oszillator
  m:=2:A:=5: k:=45:
  w0 := sqrt(k/m):
  Ek:= m*A^2*w0^2*(sin(w0*t))^2/2:
  ek:=plot::Function2d(Ek,Color=RGB::Blue,t=0..2):
  Ep:=m*A^2*w0^2*(cos(w0*t))^2/2:
    ep:=plot::Function2d(Ep,Color=RGB::Red,t=0..2):
  info1:=plot::Text2d("Ek",[1.95,100]):
  info2:=plot::Text2d("Ep",[2,500]):
  plot(ek,ep,info1,info2,AxesTitles=["t","Energie"])
```

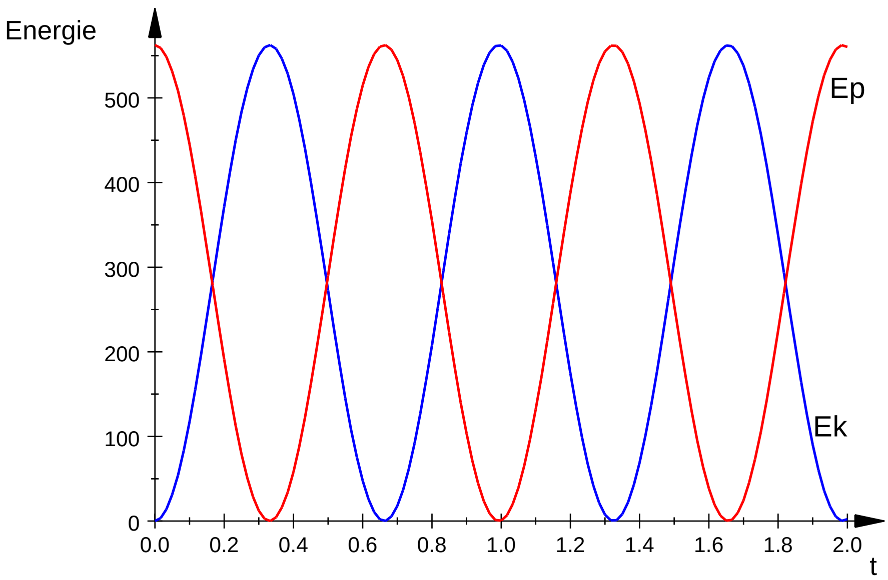

Fig.: 6.2-5

Die Energie oszilliert zwischen potenzieller und kinetischer Energie. Es gibt Stellen, an denen die Energie rein potenziell bzw. kinetisch ist. Ein schwingendes System besitzt normalerweise ein elastisches Element, in dem potenzielle Energie gespeichert werden kann und ein träges Element, das kinetische Energie aufnehmen kann.

Bis jetzt benutzten wir Newtons 2. Gesetz, um die Bewegungsgleichungen aufzustellen und zu lösen. Bei dieser Vorgehensweise mussten wir alle Kräfte aufzeigen und berücksichtigen, die am Körper angriffen, auch solche der Dämpfung durch Reibung.

Es gibt jedoch viele Fälle, in denen die Wirkung der Reibung gering ist und vernachlässigt werden kann, so dass die Gesamtenergie des Systems praktisch erhalten bleibt (konservative Systeme).

Bei solchen Systemen können wir den Energieerhaltungssatz anwenden, was die Behandlung eines Problems sehr vereinfachen kann, denn es ist dann möglich, die Bewegungsgleichung und die Frequenz eines Oszillators zu bestimmen, ohne dass es notwendig wäre, die wirkenden Kräfte zu analysieren.

So können wir die Gleichung $dE/dt = d(mv^2/2 + m\omega_0^2x^2/2)/dt$ anders interpretieren: da $E = E_k + E_p$ bei einem konservativen System konstant ist, müssen seine zeitliche Ableitung und $mv^2/2 + m\omega_0^2x^2/2$ Null sein. D.h.

$$mv^2/2 + m\omega_0^2x^2/2 = 0$$

ist die Bewegungsgleichung.

In vielen praktischen Beispielen sind wir nur an zeitlichen *Mittelwerten* von Ek und Ep interessiert. Wir berechnen diese Werte als Mittelwert über eine Periode, d.h. als

$$\langle E_k \rangle := \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} E_k\,dt \qquad (4)$$

Da $<\cos^2\varphi> = <\sin^2\varphi>$ und $1 = <\cos^2\varphi> + <\sin^2\varphi>$ sind, folgt, dass $<\cos^2\varphi> = <\sin^2\varphi> = 1/2$. Wir haben also

$$<E_k> = mA^2\omega_0^2 <\sin^2(\omega_0 t)>/2 = m A^2\omega_0^2/4 = E/2 \qquad (5)$$

Für $<E_p>$ erhalten wir denselben Wert: $<E_p> = E/2$.

Wenn wir aber die Verluste infolge von Reibung berücksichtigen müssen, wird die Angelegenheit unangenehm.

Für solche Kräfte gibt es kein Potenzial, und die mechanische Gesamtenergie bleibt nicht erhalten. Wir können aber dennoch einen Ausdruck für den *Energieverlust pro Zeiteinheit* herleiten.

Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung mit v und berücksichtigen, dass $vdv/dt = d(v^2/2)/dt$ und $xv = d(x^2/2)/dt$:

$$mv'v + bxv = -bv^2$$

$$\text{oder} \quad d[mv^2/2 + kx^2/2]/dt = dE/dt = -bv^2 = -4\gamma E_k \qquad (6)$$

Das ist der Ausdruck für die Verlustrate der Energie. Beachten Sie, dass diese Rate dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Für eine kleine Dämpfungsrate, $\gamma \ll \omega_0$, können wir angenähert schreiben

$$d\langle E\rangle/dt = \langle dE/dt\rangle = -4\gamma\langle E_k\rangle = -2\gamma\langle E\rangle \qquad (7)$$

Das ist eine Differenzialgleichung für das zeitliche Mittel der Energie mit der Lösung

$$\langle E(t)\rangle = E_0\, e^{-2\gamma t} \qquad (8)$$

Wir ersehen daraus eine exponentielle Abnahme der Energie.
In der Zeit $\tau = 1/(2\gamma)$ fällt die mittlere Energie um den Faktor 1/e, was bedeutet, dass die Energie zweimal schneller abnimmt als die Amplitude.
Um eine Größe zu haben, die den Energieverlust eines schwingenden Systems misst, hat man den sogenannten *Gütefaktor* Q des Schwingers eingeführt. Er ist folgendermaßen definiert

Q := 2π·(zur Zeit t gespeicherte Energie)/(Energieverlust in der Periode T) (9)

(1/Q heißt *Verlustfaktor*)

Das soll heißen

$$Q := 2\pi\cdot E(t)/(E(t)-E(t+T)) = 2\pi/\,(1-e^{-2\gamma T}) \qquad (10)$$

Bei sehr kleiner Dämpfung ist auch γ sehr klein, und wir können näherungsweise schreiben

$$Q = 2\pi/(1-(1-2\gamma T_0)) = \pi/(\gamma T_0) = 2\pi\tau/T_0 = \omega_0/(2\gamma) = \omega_0\,\tau \qquad (11)$$

Ein Oszillator mit Q = 600 verliert pro Periode 1% seiner Energie, denn nach der Definition von Q gilt:

$Q = 2\pi E/\Delta E = 600$, woraus folgt $\Delta E/E = 2\pi/600 = 0{,}0105 \approx 1\%$.