

## 6.1 Schwingungen I

Schwingungen finden wir überall. In jeder Phase unseres Lebens sind wir von Schwingungen umgeben. Der menschliche Körper könnte nicht leben ohne das (meist) harmonische Pochen unseres Herzens.

Es wäre eine Katastrophe, wenn es dem Menschen nicht gelungen wäre, Methoden zu erfinden, um ungedämpfte Schwingungen zu erzeugen, ein modernes Leben mit aller Technologie wäre unmöglich. Die Natur selbst hat Jahrmillionen gebraucht, um Herzen zu erzeugen, die mit der richtigen Frequenz ungedämpft schwingen können. Die Akustik befasst sich mit Oszillationen, die Optik und Elektronik studiert Frequenzen und Amplituden. Unser ganzer moderner Spionageapparat wäre undenkbar –wohin wir auch schauen, überall gibt es Schwinger.

Die mathematische Behandlung von Schwingungen beruht auf Differenzialgleichungen. Wir werden daher im nächsten Kapitel die nötigsten Grundlagen dieser Disziplin kennenlernen. Die Beweise der Lehrsätze können Sie in jedem Lehrbuch über höhere Mathematik (Analysis) finden.

In vielen Fällen kann man mit bekannten Methoden der Analysis eine Lösung der Schwingungsdifferenzialgleichung finden. Wenn das nicht der Fall sein sollte, gibt es immer eine Möglichkeit, die Gleichung numerisch zu lösen.

Das einfache Pendel (Beispiel eines einfachen harmonischen Oszillators) wurde bereits in verschiedenen Paragraphen betrachtet, z.B. in 3.2, 3.92 und 4.7.5. Ein Feder-Masse-System ist ein anderes Beispiel für einen harmonischen Oszillator (harmonisch bedeutet sinusförmig).

Ein Körper führt eine harmonische Schwingung aus, wenn er durch eine Kraft an eine Gleichgewichtsposition gebunden ist, deren Betrag proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage des Körpers wächst.

Daher führt ein Pendel, das mit kleiner Amplitude ausgelenkt wurde, eine harmonische Schwingungsbewegung aus.

Nach einem kurzen Überblick über Differenzialgleichungen, werden wir die **freien Schwingungen** betrachten.

## 6.1.1 Kurzer Überblick über Differenzialgleichungen.

Von größter Bedeutung für die Physik ist eine *gewöhnliche lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*, z.B. die Gleichung für erzwungene Schwingungen eines Feder-Masse-Systems

$$a y'' + by' + cy = r(x) \quad (1)$$

Die unabhängige Variable  $x$  ist in der Physik normalerweise die Zeit  $t$ .

Wir nehmen an, dass die Werte von  $y$  und  $dy/dx$  in einem bestimmten Punkt des Intervalls  $[a,b]$ , in dem die Funktionen  $y$  und  $r$  definiert sind, bekannt sind.

Der Satz über Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertprobleme des Typs  $y'' = f(x, y, y')$ ;  $y(x_0) = y_0$ ;  $y'(x_0) = z_0$  sagt, dass es nur eine Lösung der Gl. (1) geben kann, die die beiden Bedingungen  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x_0) = z_0$  erfüllt.

Die *allgemeine Lösung* von (1) ist die Summe aus der *allgemeinen Lösung* der homogenen Gleichung (2)

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

und einer beliebigen *partikulären Lösung* von (1).

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$Y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad , \quad (3)$$

vorausgesetzt  $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$  ist von Null verschieden im Intervall  $[a,b]$ .

Der Ausdruck  $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$  heißt *Wronski-Determinante* der Funktionen  $y_1$  und  $y_2$  und wird mit  $W(x) = W[y_1, y_2](x)$  bezeichnet.

Derartige Funktionen  $y_1$  und  $y_2$  können leicht gefunden werden, man hat nur die Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  der folgenden Gleichung mit  $c \neq 0$  zu finden:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (4)$$

Man nennt diese Gleichung die *charakteristische Gleichung* der gegebenen Diff.-Gleichung.

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung lauten

$$\lambda_1 = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \quad \text{oder} \quad \lambda_2 = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \quad (5)$$

Je nachdem, ob  $b^2 - 4ac$  positiv, null oder negativ ist, haben wir jeweils zwei verschiedene reelle Lösungen, eine doppelte Lösung oder eine Paar zweier konjugiert komplexer Zahlen.

Die allgemeine Lösung von  $ay'' + by' + cy = 0$  lautet

$$Y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (6)$$

wenn  $\lambda_1, \lambda_2$  verschieden und reell sind.  $C_1$  und  $C_2$  sind beliebige Konstanten.

Falls  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gleich sind, gibt es nur eine Lösung:  $Y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$ .

Die Lösung ist  $Y(x) = e^{dx} (C_1 \cos wx + C_2 \sin wx)$ , wenn  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  konjugiert komplex sind.

Die Konstanten  $d$  und  $w$  lauten  $d = -b/(2a)$  und  $w = (4ac - b^2)^{1/2}/(2a)$ .

Zu dieser allgemeinen Lösung hat man eine partikuläre Lösung der Ausgangsgleichung hinzuzufügen. Es gibt verschiedene Methoden, um partikuläre Lösungen zu finden, z.B. die Methode der *Variation der Konstanten*.

Die Theorie der linearen Differenzialgleichungen  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist eine einfache Verallgemeinerung des Falles mit  $n=2$ .

## Die Differenzialgleichung $dy/dx = f(x,y)$

Die hinreichenden (aber nicht notwendigen) Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen Lösung einer Differenzialgleichung erster Ordnung sind durch den Satz von Picard (1856-1941) und Lindelöf (1870-1946) definiert:

**Satz:**

Wenn für die Differenzialgleichung erster Ordnung

$$dy/dx = f(x,y) \text{ mit der Bedingung } y(x_0) = y_0$$

die Funktion  $f(x,y)$  und die partielle Ableitung  $\partial f/\partial y$  in einer Umgebung  $R$  des Punktes  $(x_0, y_0)$  stetig sind, dann existiert eine eindeutige Funktion  $y = F(x)$  in einer gewissen Nachbarschaft des Punktes  $(x_0, y_0)$ , die die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllt.

Die der Funktion  $f(x,y)$  auferlegten Bedingungen sind nur hinreichend, nicht notwendig. Es ist möglich, dass eine eindeutige Lösung existiert, obgleich die beiden Bedingungen nicht erfüllt werden.

**Beispiel:**

Betrachte die Diff.Gl.  $dy/dx = -x/y$ . Die Funktion  $f(x,y) = -x/y$  und ihre Ableitung  $\partial f/\partial y = x/y^2$  sind stetig, außer für  $y = 0$  ( $x$ -Achse), wo sie nicht definiert und daher unstetig sind. Das bedeutet, dass der Satz nicht anwendbar ist, wenn  $y=0$  ist.

Trotzdem kann man zeigen, dass es in jedem Punkt der  $x$ -Achse zwei Lösungen gibt. Denn, wenn wir die Gleichung umformen in  $y \, dy = -x \, dx$  und beide Seiten integrieren, erhalten wir  $y^2/2 = -x^2/2 + C$  oder

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

worin  $r^2 = 2c$  beliebig ist. Es handelt sich um die Gleichung eines Kreises mit dem Zentrum im Ursprung. Diese implizite Lösung führt zu zwei expliziten und differenzierbaren Lösungen (Halbkreisen)

$$y_1 = (r^2 - x^2)^{1/2} \quad \text{oder} \quad y_2 = -(r^2 - x^2)^{1/2}$$

Wir sehen also, dass durch jeden Punkt  $(x_0, 0)$  zwei Lösungen gehen (Halbkreise).

Der Satz sagt für die Gleichung  $dy/dx = y/x$  nichts aus über den Punkt  $(0,0)$ . Aber die Gleichung hat die Lösung  $y = c x$ , die eine Familie von Ursprungsgeraden beschreibt.

## Richtungsfelder

Wie kann man sich eine Differenzialgleichung und ihre Lösungen veranschaulichen? Beginnen wir mit einer einfachen Gleichung:

$$dy/dx = y \quad (7)$$

Die Gleichung sagt uns:

jede Lösung dieser Diff.-Gleichung hat die Eigenschaft, dass in jedem Punkt der Ebene die Steigung ihres Graphen gleich ist ihrer y-Koordinate.

Wenn die Lösung also durch den Punkt (0,1) geht, so ist dort ihre Steigung  $dy/dx = y = 1$ . Wenn sie durch einen Punkt (x,4) geht, ist ihre Steigung 4.

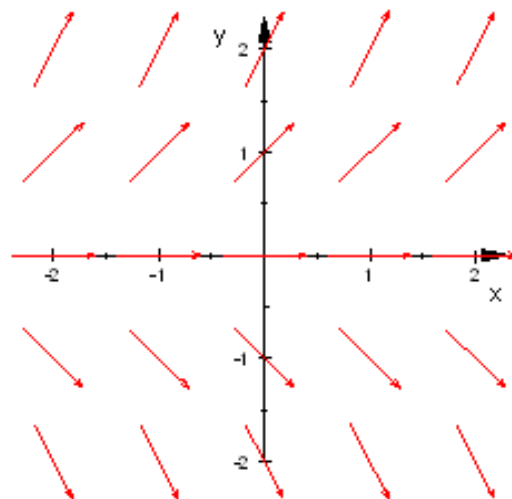


Fig.: 6.1-1

In Fig. 6.1-1 wurde ein kleiner Pfeil in den Punkten  $(-2,-2)$ ,  $(-1,-2)$ ,  $(0,-2)$  ...  $(2,-2)$  gezeichnet, der die Steigung  $-2$  an die Lösungskurve hat. Da  $dy/dx = y$ , so ist die Steigung im Punkt  $(-1,1)$  gleich  $1$  (also die  $y$ - Koordinate). Also zeichnen wir im Punkt  $(-1,1)$  einen Pfeil mit der Steigung  $1$ . Wenn wir viele Pfeile zeichnen, erhalten wir ein *Feld von Steigungen* oder *Richtungen* als Veranschaulichung der Gleichung  $dy/dx = y$ . Auch eine **Tabelle** mit Punkten und Steigungen kann zur Veranschaulichung dienen:

$y' = y$					
	$y = -2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$x = -2$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$-1$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$0$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$1$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$2$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$

Das Richtungsfeld in Fig. 6.1-1 wurde mithilfe von MuPAD gezeichnet, und zwar mit der Funktion `plot::VectorField2d`:

- `f:= (x,y)-> y;`  
`V:=plot::VectorField2d([1,f(x,y)],x=-2..2,y=-2..2,`  
`Mesh = [5,5],Color=RGB::Red),`  
`ArrowLength=Fixed, Scaling=Constrained;`  
`plot(V)`

Wollten wir mehr Pfeile zeichnen, so hätten wir ein anderes "Mesh" zu benutzen, z.B.  $[10,10]$ .

Wir sehen, dass die Steigungen oberhalb der  $x$ -Achse positiv sind (weil  $y$  dort positiv ist) und mit wachsendem Abstand von der  $x$ -Achse zunehmen. Unterhalb der  $x$ -Achse sind die Steigungen negativ und werden immer negativer, je weiter wir uns nach unten bewegen. Entlang einer Horizontalen haben alle Pfeile gleiche Steigung.

Starten Sie mit dem Stift in irgendeinem Punkt der Ebene, und achten Sie darauf, dass Sie sich so durch das Feld bewegen, dass die Pfeile Tangenten an die von Ihnen zu zeichnende Kurve sind. Ihre Kurve wird eine Lösungskurve der Diff.-Gleichung sein.

Die Kurven, die Sie zeichnen, müssen Exponentialkurven sein, denn jede Kurve mit  $y = Ce^x$  ist eine Lösung unserer Diff.Gleichung.

(Eine Lösung der Diff.Gl.  $y' = y$  ist eine Funktion, die gleich ihrer eigenen Ableitung ist. Die Funktion  $y = e^x$  hat diese Eigenschaft, daher ist  $y = e^x$  eine Lösung. Aber auch jedes Vielfache von  $e^x$  hat diese Eigenschaft. Daher ist die Schar der Funktionen  $y = Ce^x$  die allgemeine Lösung der Diff.-Gl.  $y' = y$ . Die allgemeine Lösung der Gl.  $y' = ky$  ist  $y = Ce^{kx}$  für jede Konstante C. Für  $k > 0$  liegt exponentielles Wachstum vor. Bei  $k < 0$  haben wir exponentiellen Zerfall.)

Vgl. Sie in Fig. 6.1-2 den Graphen mit  $y = 0.5 e^x$ , der durch den Punkt (0,0.5) geht.

- **f := (x,y) -> y:**

```
sol := (x,y) -> 0.5*exp(x) //analytische Lösung
s := plot::Function2d(sol, Color=RGB::Blue, x=-2..1.5):
V := plot::VectorField2d([1, f(x,y)], x=-2..2, y=-2..2,
Mesh = [10,10], Color=RGB::Red),
ArrowLength=Fixed,
Scaling=Constrained:
plot(V,s)
```

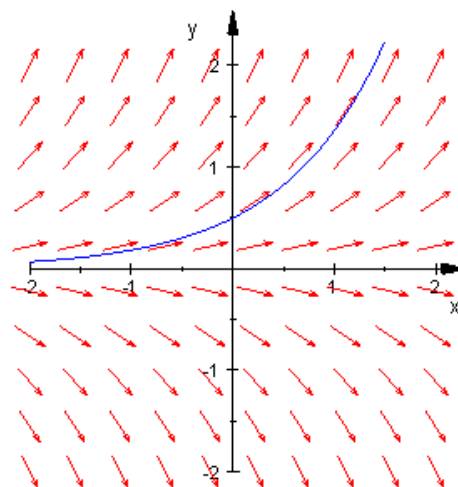


Fig.: 6.1-2

Das Lösen einer Differenzialgleichung bedeutet geometrisch das Aufsuchen der Schar der Lösungskurven.

Im folgenden Beispiel werden wir geometrisch die Diff.-Gl.  $y' = y - x$  lösen.

Wir könnten leicht eine Tafel entwerfen mit den Punkten und Steigungen. Aber es ist viel einfacher, diese Arbeit an MUPAD zu übergeben. Die analytische Lösung lautet  $y = C e^x + x + 1$ . Wir zeichnen die Fälle  $C = 0$ ,  $C = -1$ ,  $C = -2$ .

```

•
f:= (x,y)-> y-x:
C1:=(x,y)->0*exp(x)+x+1://anal. Lösung
C2:=(x,y)->-exp(x)+x+1:// anal. Lösung
C3:=(x,y)->-2*exp(x)+x+1:// anal. Lösung
c1:=plot::Function2d(C1,Color=RGB::Blue,x=-3..2):
c2:=plot::Function2d(C2,Color=RGB::Black,x=-3..2):
c3:=plot::Function2d(C3,Color=RGB::Green,x=-3..2):
V:=plot::VectorField2d([1,f(x,y)],x=-3..3,y=-3..3,
Mesh = [10,10],Color=RGB::Red), ArrowLength=Fixed,
ViewingBoxYRange =-3..3,Scaling=Constrained:
plot(V,c1,c2,c3)

```

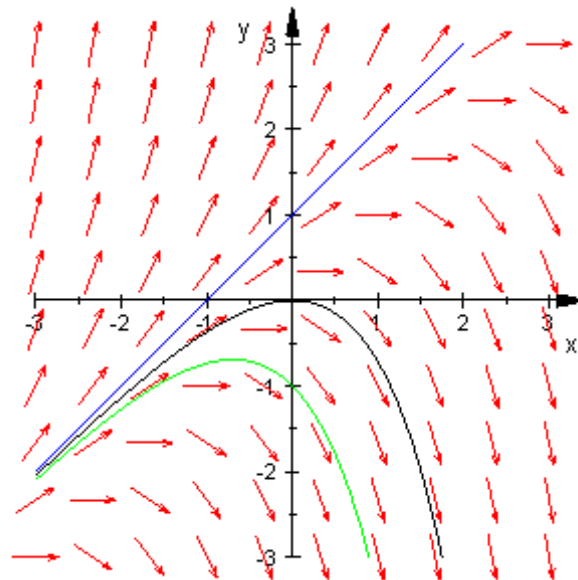


Fig.: 6.1-3



In den besprochenen Beispielen sahen wir Differentialgleichungen, die analytische Lösungen hatten. Das folgende Beispiel ist eine Diff.Gl. (vom Riccati-Typ), die keine elementare analytische Lösung hat:

$$y' = x^2 + y^2$$

Wir werden sehen, dass Pfeile der gleichen Steigung auf Kreisen liegen. Man nennt Kurven, die Segmente gleicher Steigung verbinden, *Isoklinen* (gleichge-  
neigt).

Für  $y' = 1$  haben wir  $1 = x^2 + y^2$ , was die Gleichung eines Kreises vom Radius 1 mit dem Zentrum im Ursprung ist. Diese Kurve ist die Isokline für  $y' = 1$ . Die Berührungsgersten in allen Punkten dieses Kreises haben die Steigung 1. Alle Isoklinen unserer Gleichung sind Kreise, deren Zentrum im Ursprung liegt.

Die Isoklinen bieten eine andere einfache Methode, um das Richtungsfeld zu konstruieren. In der folgenden Abbildung sehen wir drei Isoklinen im Richtungsfeld unserer Diff.-Gl. und zum Vergleich noch die Parabel mit  $y = x^3$ .

- ```

f:= (x,y)-> x^2+y^2:
C1:=(x,y)->x^2+y^2-1://Isokline für y' =1
C2:=(x,y)->x^2+y^2-4://Isokline für y' =4
C3:=(x,y)->x^2+y^2-9://Isokline für y' =9
C:= (x,y)->x^3://Vergleichskurve

c1:=plot::Implicit2d(C1,Color=RGB::Black,x=-3..3,
y=-3..3):
c2:=plot::Implicit2d(C2,Color=RGB::Black,x=-
3..3,y=-3..3):
c3:=plot::Implicit2d(C3,Color=RGB::Black,x=-
3..3,y=-3..3):
c:=plot::Function2d(C,Color=RGB::Blue,x=-3..3,y=-
3..3):

V:=plot::VectorField2d([1,f(x,y)],x=-3..3,y=-
3..3,
Mesh = [8,8],Color=RGB::Red), ArrowLength=Fixed,
ViewingBoxYRange =-3..3,Scaling=Constrained:

plot(V,c1,c2,c3,c)

```

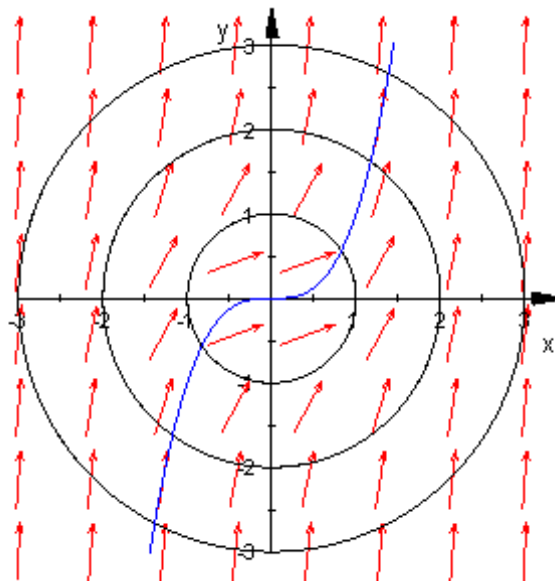


Fig.: 6.1-4

Das Richtungsfeld macht den Eindruck, als ob die Parabel mit  $y = x^3$  sich an die Pfeile des Feldes anschmiegen würde. Aber  $y = x^3$  genügt nicht der Differentialgleichung, denn  $y' = 3x^2 \neq x^2 + y^2$ .

Der Mathematiker H.A.Schwarz (1843-1921) hatte für Fälle dieser Art ein numerisches Verfahren entwickelt.

Diese Methode wird *sukzessive Annäherung* genannt und funktioniert mit der folgenden Rekursionsformel:

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(z, y_n(z)) dz \quad (8)$$

$y(a) = b$  ist die Anfangsbedingung, z.B.  $y(0) = 0$ , also  $b=0$ , was bedeutet, dass die Lösungskurve durch den Ursprung gehen muss. Als Startlösung wählen wir  $y_0(x) = b = 0$ . Wir haben  $f(x,y) = x^2 + y^2$ , aber wir schreiben  $z$  anstelle von  $x$ .

Erste Annäherung:

$$y_1(x) = \int_0^x (z^2 + y_0^2(z)) dz = \int_0^x z^2 dz = \frac{1}{3} x^3 \quad (9)$$

Zweite Annäherung:

Wir substituieren in (9)  $y_0$  durch  $x^3/3$ , um  $y_2(x) = x^3/3 + x^7/63$  zu erhalten.

Da schon die dritte Annäherung 4 Terme enthält, stoppen wir hier den Prozess. Damit haben wir die folgende Näherungslösung für die gegebene Diff.- Gl.  $y' = x^2 + y^2$  erhalten, deren Graph durch den Ursprung geht:

$$y(x) \approx x^3/3 + x^7/63 + 2 x^{11}/2079 + x^{15}/ 59535 \quad (10)$$

Die folgende Figur 6.1-5 stellt die Lösung graphisch dar. (Normalerweise suchen wir numerische Lösungen allerdings in Form einer Tabelle.)

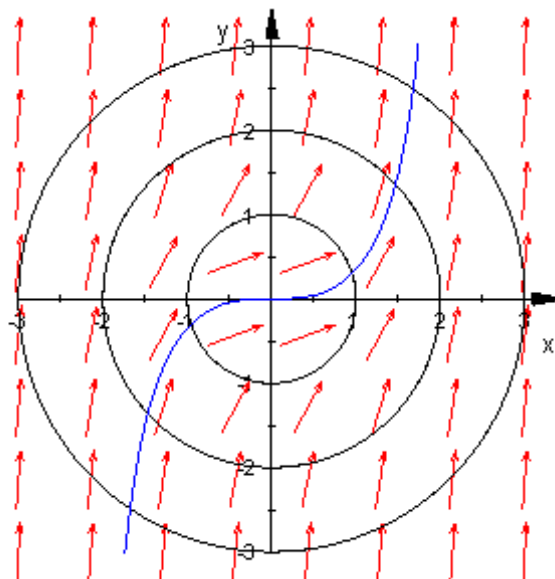


Fig.: 6.1-5

## 6.1.2 Freie Schwingungen ohne Dämpfung

Vom physikalischen Standpunkt aus können wir Schwingungen nach der Art ihrer Erzeugung einteilen: freie Schwingungen, erzwungene Schwingungen, gekoppelte Schwingungen.

In jeder dieser Gruppen unterscheidet man weiter gedämpfte oder ungedämpfte Schwingungen.

Zuerst betrachten wir freie, ungedämpfte Schwingungen. Danach werden wir Reibung in Betracht ziehen, die die Ursache für die allmähliche Dämpfung der Schwingung ist.

In Wirklichkeit sind alle freien Schwingungen gedämpft. Die Amplitude der Schwingung nimmt im Laufe der Zeit ab, gewöhnlich nach einem Exponentialgesetz. Wir werden für jeden Fall die *Bewegungsgleichung* suchen (eine Diff.-Gl.). Aus dieser Gleichung erhält man alle interessierenden Informationen, z.B. Frequenz und Periode der Schwingung oder die Bewegung selbst als eine Funktion der Zeit.

Wir beginnen mit den horizontalen Schwingungen eines Masse-Feder-Systems. Die Reibungskräfte seien so klein, dass wir sie vernachlässigen können.

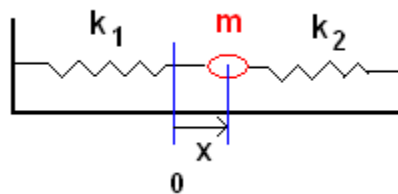


Fig.:6.1-6

Ein Körper mit  $m$  (2kg) wird von zwei Federn  $k_1$  und  $k_2$  in seiner Ruhelage  $x = 0$  gehalten ( $k$  = Federkonstante;  $k_1 = 50$  N/m,  $k_2 = 150$  N/m). Beide Federn haben im ungespannten Zustand die gleiche Länge  $l_0$  (15 cm). Wenn die Masse aus dem Ruhezustand um  $x$  cm verschoben wird, tritt an ihr eine Kraft  $F$  auf, die versuchen wird,  $m$  wieder nach  $x = 0$  zu bringen.

Die Masse wird zur Zeit  $t = 0$  an der Stelle  $x = 5$  cm losgelassen. Der Wandabstand beträgt  $l = 3 l_0$ .

Im Gleichgewichtszustand sagt das 2. Newtonsche Gesetz:

$$mg + \mathbf{N} + \mathbf{T}_{01} + \mathbf{T}_{02} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$\mathbf{N}$  = Kraft der Unterlage auf  $m$ ,  $\mathbf{T}_{01}$  und  $\mathbf{T}_{02}$  = Federkräfte auf  $m$ . Die  $x$ -Koordinate der Gleichung lautet  $-\mathbf{T}_{01} + \mathbf{T}_{02} = 0$ , oder

$$-k_1(l_1 - l_0) + k_2(l_2 - l_0) = 0 \quad (2)$$

Die Längen der Federn sind im Gleichgewicht  $l_1$  und  $l_2$ . Mit  $l_1 + l_2 = 3 l_0$  folgt aus Gl. (2)

$$l_1 = l_0 (1 + k_2/(k_1 + k_2)) \quad (3a)$$

$$l_2 = l_0 (1 + k_1/(k_1 + k_2)) \quad (3b)$$

Mit den gegebenen Daten erhält man  $l_1 = 26,25$  cm und  $l_2 = 18,75$  cm.

Nun verschieben wir die Masse  $m$  von  $x = 0$  aus um das Stück  $x$  nach rechts und lassen sie los. Das 2. Newtonsche Gesetz lautet jetzt

$$mg + \mathbf{N} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = m\mathbf{a} \quad (4)$$

Daraus ergibt sich die  $x$ -Koordinatengleichung:

$$-k_1(l_1 + x - l_0) + k_2(l_2 - x - l_0) = mx''(t) \quad (5)$$

Wenn wir Gl. (2) berücksichtigen, erhalten wir die folgende lineare Diff. Gl. 2. Ordnung als Gleichung der horizontalen Bewegung:

$$x''(t) + (k_1 + k_2) x/m := x''(t) + \omega_0^2 x = 0 \quad (6)$$

Gl. (6) ist eine Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. In diesem Fall benötigen wir nur zwei beliebige Lösungen der Gl. (6). (Unter einer Lösung von Gl. (6) verstehen wir eine Funktion, die (6) erfüllt.) So ist z.B.  $x(t) = e^{\lambda t}$  eine Lösung, wenn  $\lambda$  die folgende *charakteristische Gleichung*, vgl. 6.1.1, Gl.(4), erfüllt:

$$m\lambda^2 + k = 0, \quad (7)$$

worin  $m$  die Masse ist und  $k := k_1 + k_2$ .

Im Falle einer Diff.-Gl. der Gestalt  $ax'' + bx' + cx = 0$  lautet die charakteristische Gleichung  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . Ihre Lösungen hängen vom Vorzeichen der Diskriminante  $D = b^2 - 4ac$  ab. Wenn es positiv ist, gibt es zwei reelle Lösungen, ist es negativ, wie in unserem Fall, so lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-bt/(2a)} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), \quad (8)$$

mit  $\beta = (4ac - b^2)/(2a)$ . In unserem Beispiel haben wir  $a = 1$ ,  $b = 0$  und  $c = \omega_0^2$ . Die allgemeine Lösung von Gl. (6) kann jetzt wie folgt geschrieben werden

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (9)$$

Die Summe zweier harmonischer (sinusförmiger) Schwingungen kann ersetzt werden durch eine einzige trigonometrische Funktion, in der ein Phasenwinkel  $\varphi$  auftritt (unter *Phase* versteht man  $\omega_0 t + \varphi$ ):

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (10)$$

Die Werte der Konstanten A, B und C hängen von den Anfangsbedingungen ab, d.h. sie werden von der anfänglichen Auslenkung  $x_0$  und von der Startgeschwindigkeit  $x'(0)$  der Masse  $m$  bestimmt. Wenn wir uns auf Gl. (9) beziehen und  $x$  sowie  $x'$  zur Zeit  $t = 0$  berechnen, erhalten wir  $x_0 = A$  und  $x'(0) = B \omega_0$ .

Substituieren wir diese Werte von A und B in Gl. (9), so ergibt sich

$$x(t) = 5 \text{ cm} \cdot \cos(10 \text{ s}^{-1} t), \text{ denn wir hatten } x_0 = 5 \text{ cm}; \omega_0 = ((k_1 + k_2)/m)^{1/2} = 10 \text{ s}^{-1}.$$

Die Konstanten C und  $\varphi$  in Gl. (10) können wir auf ähnliche Weise bestimmen. Es ergibt sich für  $t = 0$

$$x_0 = C \cos\varphi \quad \text{und} \quad x'(0) = -C\omega_0 \sin\varphi.$$

Das liefert für C und  $\varphi$ :  $C^2 = A^2 + B^2$  und  $\varphi = \arctan(-B/A)$

(Hätten wir die Lösung als  $x(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$  geschrieben, so hätten wir  $C^2 = A^2 + B^2$  und  $\varphi = \arctan(A/B)$  erhalten.)

$\omega_0$  ist die natürliche *Kreisfrequenz* und hat als Einheit  $\text{s}^{-1}$  oder auch  $\text{rad/s}$ . Die Anzahl der vollen Schwingungen pro Sekunde ist die natürliche *Frequenz*  $f_0 = \omega_0/2\pi$  und wird in Hertz (Hz oder  $\text{s}^{-1}$ ) gemessen nach dem Physiker Heinrich Hertz (1857-1894). 1 Hertz (Hz) = 1 volle Schwingung pro Sekunde. Die Zeit für eine volle Schwingung wird *Periode* (T) genannt. Es gilt:  $T = 1/f = 2\pi/\omega$ . In unserem Beispiel haben wir  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 0,63 \text{ Hz} = 0,63 \text{ s}^{-1}$ .

Mit der Funktion **ode** (ordinary differential equation) können wir mit MUPAD leicht Gl. (6) lösen

- **eq:=ode(x''(t)=-w^2\*x(t), x(t)) :**
- **solve(eq)**

$$\{C2 \cdot (\cos(t \cdot w) - i \cdot \sin(t \cdot w)) + C3 \cdot (\cos(t \cdot w) + i \cdot \sin(t \cdot w))\}$$

Wir können diese Lösung umschreiben, indem wir C1 und C2 anstelle von C2 und C3 benutzen:

$$x = (C1 + C2) \cos(\omega t) + i(C2 - C1) \sin(\omega t) \quad (11)$$

Wenn wir  $A := C1 + C2$  und  $B := i(C2 - C1)$  setzen, erhalten wir das schon bekannte Ergebnis:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \text{ das wir schreiben können als } x(t) = C \cos(\omega t + \varphi).$$

Die Konstante B muss Null sein, damit (11) den Anfangsbedingungen genügt:  $x(0) = x_0$ ;  $x'(0) = 0$ . Die Lösung für unser Beispiel lautet dann  $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ .

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man an **ode** auch die Anfangsbedingungen übergibt:

$$\mathbf{xt := ode(\{x''(t) + w^2*x(t) = 0,$$

$$x(0) = x0, x'(0) = 0\}, x(t))$$

$$\mathbf{ode\left(\left\{w^2 \cdot x(t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t), x'(0) = 0, x(0) = x0\right\}, x(t)\right)}$$

$$\mathbf{solve(xt)}$$

$$\{x0 \cdot \cos(t \cdot w)\}$$

Die Bewegung kann auch graphisch dargestellt werden, vgl. 4.1 beim Beispiel einer Rakete. Hier folgen einige weitere Beispiele.

- `reset() :`  
`w:=10;x0:=5:`  
`ivp := ode({x''(t) + w^2*x(t) = 0,`  
`x(0) = x0, x'(0) = 0}, x(t)):`  
`solve(ivp) :`  
`eq:=op(%); //exakte Lösung`  
`plot(plot::Function2d(eq,t=0..2))`

5 cos(10 t)

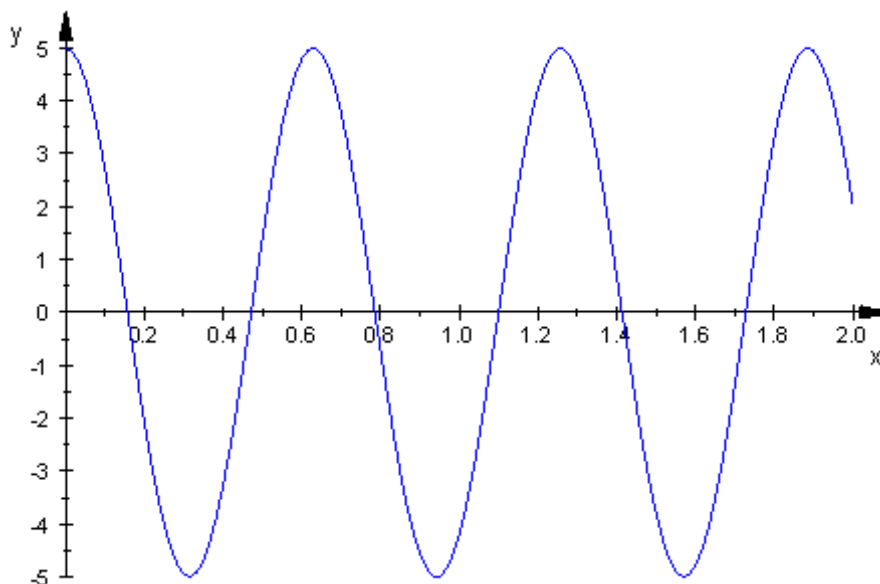


Fig.: 6.1-7

Um Zahlenwerte zu erhalten, definieren wir eine Funktion X:

- `X:=x->subs(eq,t=x)://Lösung von MuPAD`  
`float(X(0)),float(X(0.63)); //zwei Werte für X`  
`float(subs(eq,t=0.63));`

5.0, 4.999293182

4.999293182



Wir können X benutzen, um die Lösung zu zeichnen und auch die Ableitung

```
X:=x->subs(eq,t=x)//Lösung von MuPAD
x:=plot::Function2d(X(t),t=0..2,Color=RGB::Red):
v:=plot::Function2d(X'(t),t=0..2,Color=RGB::Green):
plot(x,v)
```

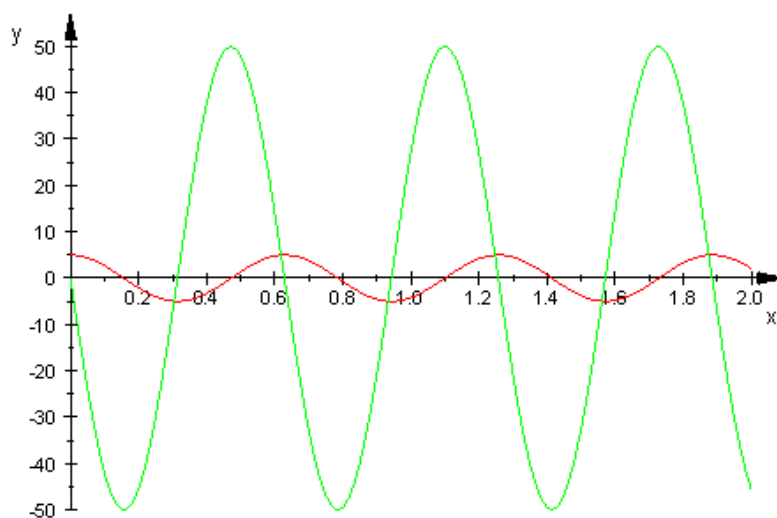


Fig.: 6.1-8

Sehr interessant ist die folgende Version, deren Beschreibung man mithilfe von "`? plot::Ode2d`" erhält

- `w:=10:`  
`f:=(t,Y)->[Y[2],-w^2*Y[1]]:`  
`Y0:=[5,0]:`  
`G:=(t,Y)->[t,Y[1]]://Graphik zu y->t`  
`p:=plot::Ode2d(f,[i/10 $i=0..20],Y0,`  
`[G,Style=Splines,Color=RGB::Red],`  
`[G,Style=Points,Color=RGB::Blue]):`  
`plot(p)`

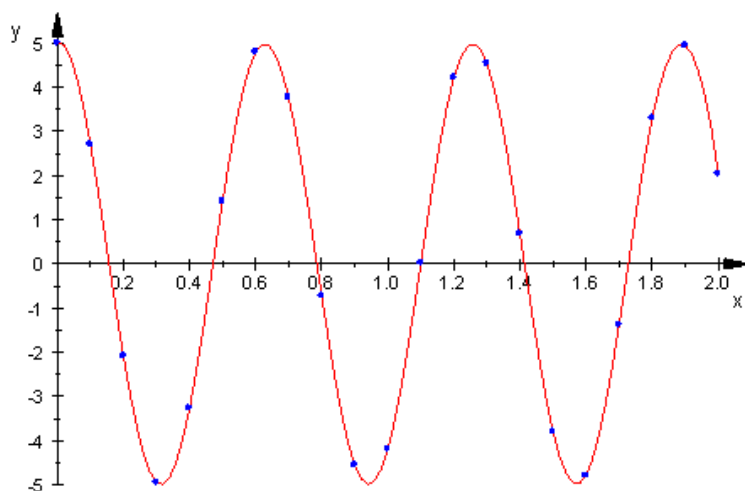


Fig.: 6.1-9

Mit dem folgenden Programm lösen wir die Gleichung  $m x''(t) + k x(t) = 0$  **numerisch** mithilfe der Euler-Methode (vgl. Numerischer Anhang 2.1 und 3.1.)

Außerdem benutzen wir die Funktion `plot::Group2d` aus MuPAD.

```

reset() // mit plot::Group2d
Euler:=proc(h,schritte)//harmonischer Oszillator
begin
t(0):=0:i:=0:
k:=105:m:=2:k1:=k/m:
x(i):=0.25:v(i):=0.8:
a(i):=-k1*x(i):
DIGITS:=6:
//print("t= ",t(i),"x= ",x(i),"v= ",v(i),"a=",a(i)):
for i from 1 to schritte do
v(i):=v(i-1)+a(i-1)*h://Last-Point-Methode:
x(i):=x(i-1)+v(i)*h:
a(i):=-k1*x(i):
t(i):=t(i-1)+h:

if (i=0) or (modp(i,10)=0) then //siehe 3.8.3
//print("t= ",t(i),"x= ",x(i),"v= ",v(i),"a=",a(i)):
end_if:
end_for:
A:=0.273296: fi:=1.154915:w:=7.245688:
F0:=A*sin(w*n+fi)//analytische Lösung

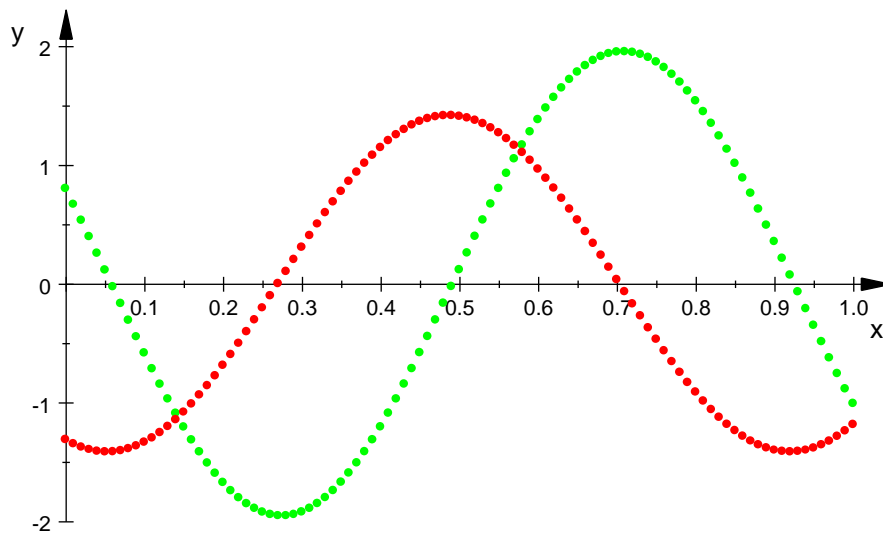
```

```

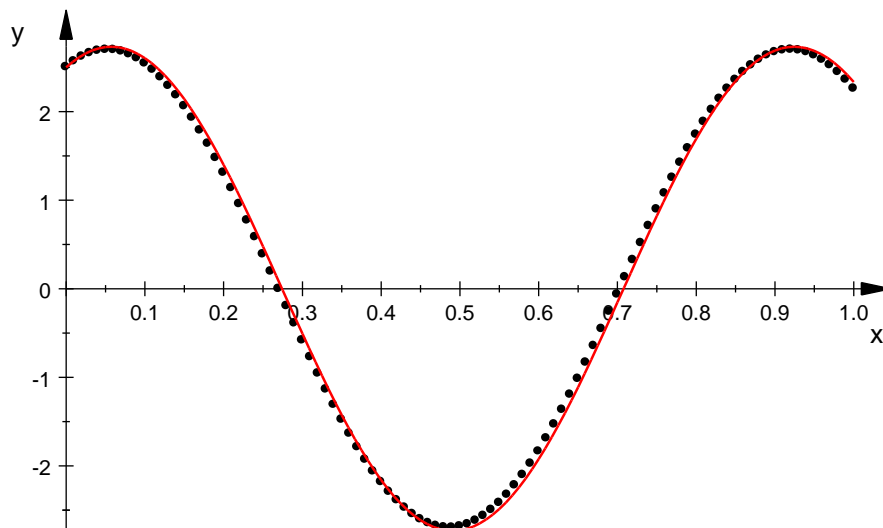
plot(plot::Group2d(
//plot::Point2d(i*h,x(i)*10, Color=RGB::Blue)$i=0..schritte,
plot::Point2d(i*h,v(i), Color=RGB::Green)$i=0..schritte,
plot::Point2d(i*h,a(i)/10, Color=RGB::Red)$i=0..schritte),
Header= "Euler-LPM, Gruen: v(i) Rot:a(i)/10"):
plot(plot::Group2d(
plot::Point2d(i*h,x(i)*10, Color=RGB::Black)$i=0..schritte,
plot::Function2d(F0(n)*10,n=0..h*schritte, Color=RGB::Red)),
Header= "Schwarz: x(i)*10(Euler) Rot:x(i)*10(Theorie)":
end_proc:
Euler(0.01,100)

```

Euler-LPM, Gruen: v(i) Rot:a(i)/10



Schwarz: x(i)\*10(Euler) Rot:x(i)\*10(Theorie)



Eulers Näherungslösung kann verbessert werden, wenn man kleinere Schrittweiten  $h$  benutzt.