

5.3 Bewegung unter Zentralkräften III

5.3.1 Das Gravitationsfeld einer Kugelschale

Wir haben die Erde immer als eine vollkommene Kugel angesehen, deren Masse gleichförmig über ihr Volumen verteilt ist. Um das Gravitationsfeld einer Kugel zu berechnen, ist es praktisch, sie als eine gigantische Zwiebel zu betrachten, die aus "dünnen" Kugelschalen aufgebaut ist. Wir werden daher zuerst das Potenzial untersuchen, das von einer gleichförmig über eine Kugeloberfläche verteilten Masse m erzeugt wird.

Wir erinnern uns, dass das Gravitationspotenzial in einem Punkt $P(r)$ gleich ist der potenziellen Energie einer Einheitsmasse, die sich in diesem Punkt befindet, d.h. $V(r) = E_p(r)/m' = -Gm/r$. m ist die Masse, die das Gravitationsfeld erzeugt, m' ist die Masse, die wir in den Punkt P bringen. Wenn das Feld von n Massen erzeugt wird, so haben wir die Potenziale $V_i(r)$ algebraisch zu addieren, die jede Masse einzeln in P erzeugt:

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) + \dots + V_n(r) \quad (1)$$

Fig. 5.3-1 zeigt eine Masse M , die gleichmäßig über eine Kugeloberfläche verteilt ist. Um das Potenzial in $P(r,0)$ zu berechnen, unterteilen wir die kugelförmige Schicht in ringförmige Streifen. Die von diesen Ringen (Bändern) erzeugten Potenziale werden algebraisch addiert (integriert). Die Fläche eines infinitesimalen Ringes ist Breite mal Umfang:

$$dA = (a \, d\theta) (2\pi a \sin\theta) = 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta$$

Da die Masse pro Flächeneinheit durch $M/(4\pi a^2)$ gegeben ist, hat das Band die Masse

$$\frac{1}{2} \cdot M \sin\theta \, d\theta$$

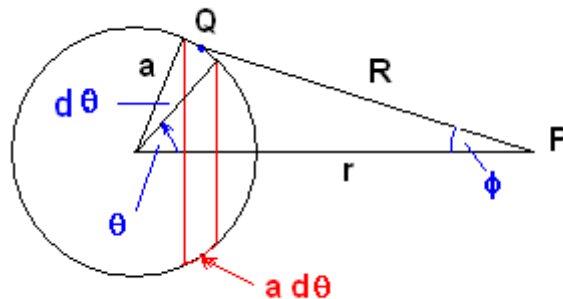


Fig.: 5.3-1

Alle Punkte des Bandes haben (annähernd) denselben Abstand von $P(r,0)$. So ergibt sich für das von dem kreisförmigen Band in P erzeugte Potenzial

$$dV = \frac{1}{2} G M \cdot \sin\theta \, d\theta / R \quad (2)$$

R können wir mit dem Kosinussatz berechnen $R^2 = a^2 + r^2 - 2 a r \cos\theta$, worin a und r Konstanten sind. Wenn wir diese Beziehung ableiten, ergibt sich $\sin\theta \, d\theta = RdR/(ar)$. Dies substituieren wir in Gl. (2) und erhalten:

$$dV = - G M \cdot dR / (2 a r) \quad (3)$$

Der Beitrag aller Streifen zum Potenzial in $P(r,0)$ ist gegeben durch

$$V(r > a) = - \frac{GM}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR = - \frac{GM}{r} \quad (4)$$

$r-a$ und $r+a$ sind die Grenzen von R für den Fall, dass P im Äußeren der Kugel liegt. Wenn P ein Punkt im Kugellinnern ist, sind $a-r$ und $a+r$ die Grenzen von R .

Für V erhalten wir in diesem Fall ein konstantes Potenzial, unabhängig von der Position von P . Es gilt nämlich

$$V(r < a) = -GM/a \quad (5)$$

Gleichung (4) sagt uns, dass eine homogene, kugelförmig verteilte Masse M vom Radius a ein Teilchen in $r > 0$ ebenso anzieht wie eine im Ursprung konzentrierte Masse M .

Dieses Ergebnis ist für jede Schicht im Innern der homogenen Kugel gültig. Das Ergebnis (5) sagt uns, dass das Potenzial im Innern einer kugelförmigen Schicht konstant ist und dass das Gravitationsfeld verschwindet, wie wir gleich zeigen werden.

(Wir erinnern uns, dass das Gravitationsfeld gleich ist dem Gradienten des Gravitationspotenzials mit vertauschten Vorzeichen: $\mathbf{G} := \mathbf{F}/m = -\mathbf{grad} V$. Der Gradient von V ist Null, wenn V konstant ist, denn es gilt $G_x = -\partial V/\partial x = 0$ usw. Das Feld \mathbf{G} ist definiert als Kraft auf eine Einheitsmasse in P .)

Wenn wir die Beziehung

$$\mathbf{grad} V(r) = dV(r)/dr \cdot \mathbf{r}_o, \text{ (siehe Gl. (17) in 4.6.2),}$$

auf die Gln. (4) und (5) anwenden, sehen wir, dass das Gravitationsfeld im Äußeren der Kugelschicht ($r > a$) durch die folgende Gleichung gegeben ist

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}/m = -\mathbf{grad} V(r) = -G_o M/r^2 \cdot \mathbf{r}_o \quad (6)$$

Im Innern der Schicht ($r < a$) ergibt sich $\mathbf{G} = 0$.

(Um eine Verwechslung des Gravitationsfeldes \mathbf{G} mit der universellen Gravitationskonstanten G zu vermeiden, verwenden wir für diese G_o . Wenn keine Gefahr einer Verwechslung besteht, benutzen wir G .)

Das folgende Programm zeichnet den Graphen von Gl.(6) für eine dünne Kugelschale vom Radius $a = 2$. `gex` und `gint` sind die beiden Teile der Intensität des Gravitationsfeldes $G(r)$.

Programm 1:

- `reset() //G-Feld für eine Kugelschale`

```
a:=2:c:=1://c = GoM
gex:=-c/r^2:
gint:= 0:
Gex:=plot::Function2d(gex,Color=RGB::Green,
r=a..5):
Gint:=plot::Function2d(gint,Color=RGB::Red,
r=0..a):
plot(Gex,Gint,ViewingBoxYRange=-
0.3..0,AxisTitles=["r","G"])
```

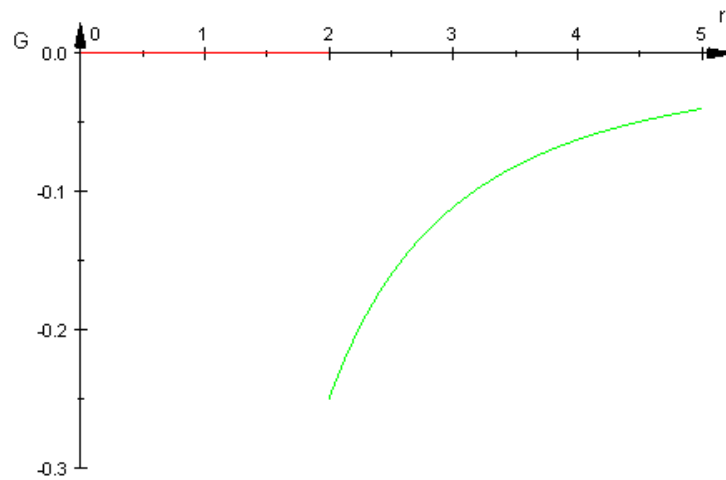


Fig.: 5.3-2

Im Fall einer homogenen **Vollkugel** ergibt sich, vgl. 5.3.2, dass G proportional ist zum Abstand r vom Zentrum (G ist eine Gerade), im Äußern ergibt sich wieder, dass G umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes vom Zentrum ist.

Die Abbildungen 5.3-3 und 5.3-4 zeigen den Verlauf von G mit dem Abstand r für eine **Vollkugel** (z.B. die Erde).

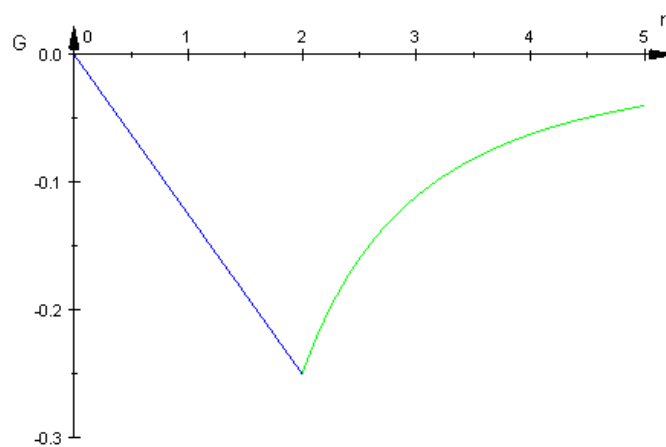


Fig.: 5.3-3

Wir verwenden bei der Vollkugel wieder **Programm 1**, aber mit den folgenden Änderungen (vgl. 5.3.2):

```
a:=2:c1:=1:c2:=c1/a^3:
gex:=-c1/r^2:
gint:=-c2*r:
```

Wir benutzen die Gelegenheit, um andere Möglichkeiten kennenzulernen, wie man mit MUPAD Graphen zeichnen kann, die zusammengestückelt (stückweise stetig) sind.

In **Programm 2** definieren wir G als "Prozedur", vgl. 2.3.3, indem wir von der Struktur `if .. then .. else` Gebrauch machen.

In **Programm 3** verwenden wir die Funktion `piecewise` (stückweise) die mit wenigen Zeilen den Graphen einer stückweise stetigen Funktion zeichnet.

Programm 2:

```
G := proc(r)// G ist als Prozedur definiert
begin
a:=2:c1:=1:c2:=c1/a^3:
if r>=a then
-c1/r^2
else
-c2*r
end_if:
end_proc:
plot(plot::Function2d(G,ViewingBoxYRange=-0.3..0,r = 0 ..5
)):
```

Programm 3:

- `a:=2:c1:=1:c2:=c1/a^3://Mit der Funktion "piecewise"`
`G := piecewise([r < a, -c2*r], [r >= a,-c1/r^2]):`
`plot(plot::Function2d(G,Color=RGB::Green,`
`ViewingBoxYRange=-0.3..0, r = 0 .. 5)):`

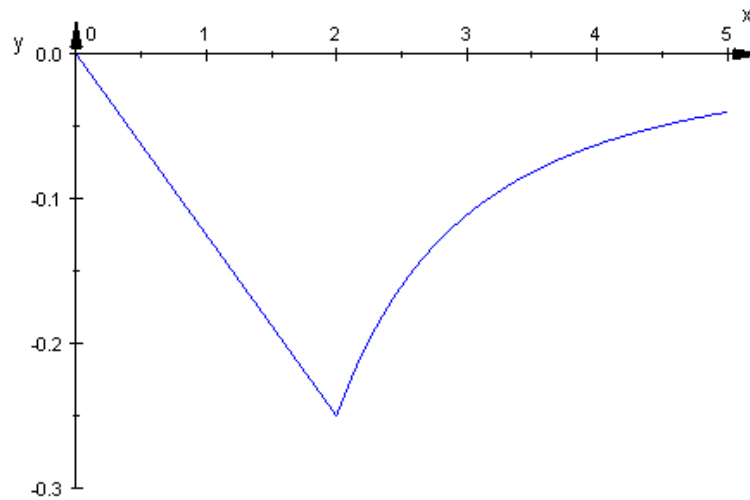


Fig.: 5.3-4

Figur 5.3-4 wurde mit **Programm 2** gezeichnet.

Beispiel:

Die zusammengesetzte Funktion der Figur 5.3.5 wurde mit der folgenden Prozedur gezeichnet. Beachten Sie auch die Anweisung **elif** (= else if)

```

• V:=proc(r)
begin
if r <0 then r^2
elif r>0 and r <2 then 2*r
else r+3
end_if
end_proc:
plot(plot::Function2d(V,r=-2..5))

```

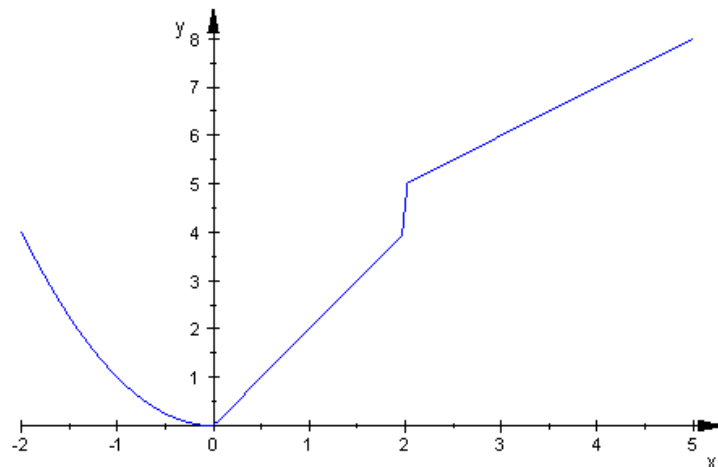


Fig.: 5.3-5

5.3.2 Das Gravitationsfeld einer massiven Vollkugel

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Gleichung für das Potenzial einer Vollkugel abzuleiten. Eines der einfachsten Verfahren haben wir schon angewandt, nämlich die Vollkugel als eine Art mathematischer Zwiebel zu betrachten

Jede "Zwiebelschale" erzeugt in einem *äußeren* Punkt P ein Feld, das von (6) gegeben wird. Die Massen der Schichten addieren sich, um erneut Gl. (6) zu liefern. Das bedeutet, dass eine homogene Vollkugel in ihrem Äußeren ein Potenzial und ein Gravitationsfeld erzeugt, das gleich ist dem, das ein im Zentrum konzentriertes Teilchen gleicher Masse erzeugen würde.

Bei einem Punkt im *Innern* der Kugel können wir die Schalen vernachlässigen, die P als inneren Punkt haben, denn diese erzeugen nach Gl. (6) kein Feld. Es sei nun M' die Masse derjenigen Schalen, die P als äußeren Punkt haben. Nach (6) haben wir für das Feld \mathbf{G} in P

$$\mathbf{G} = -G_0 M' / r^2 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (7)$$

Da die massive Kugel homogen ist, haben wir für M' in einer Kugel vom Radius r

$$M' = Mr^3/a^3$$

Wir substituieren dieses Ergebnis in Gl. (7) und erhalten für das Feld in einem Punkt P im Innern der Kugel die Beziehung, die wir schon in den Programmen benutzten, nämlich

$$\mathbf{G} = -G_0M r/a^3 \cdot \mathbf{r}_0, \quad (r < a) \quad (8)$$

Während das Potenzial in einem äußeren Punkt ($r > a$) der massiven Vollkugel mit dem Radius a von Gl. (4) gegeben wird, gilt für einen Punkt mit $r < a$ der Ausdruck

$$V(r) = G_0M (r^2 - 3a^2) / (2a^3), \quad (r < a) \quad (9)$$

Mithilfe von $\mathbf{G} = -\mathbf{grad} V(r) = -dV(r)/dr \cdot \mathbf{r}_0$ erhalten wir dann (8).

Interessant ist der Fall einer massiven *Hohlkugel* mit dem Innenradius a_1 und dem Außenradius a_2 . Die direkte Rechnung verlangt die Lösung eines Dreifachintegrals. Man kann diese Rechnung in Büchern über Potentialtheorie finden, z.B. *Einführung in die höhere Mathematik*, Vol. III, S. 428 von Mangoldt-Knopp.

Die Rechnung liefert ebenfalls das Ergebnis: Eine homogene, massive Hohlkugel erzeugt in ihrem *Äußeren* ein Potenzial und ein Gravitationsfeld, die identisch sind mit denen, die von einem "Teilchen" derselben Masse erzeugt würden, das sich im Zentrum befände.

Das Potenzial im *Innern* der massiven Hohlkugel ist konstant.

5.3.3 Die Stabilität einer kreiförmigen Bahn.

Wir wollen in diesem Abschnitt für eine kreisförmige Bahn ein Beispiel aus der *Störungstheorie* betrachten.

Kreisbahnen können in jedem Zentralfeld vorkommen, aber es stellt sich heraus, dass derartige Bahnen nicht immer stabil sind.

Eine Bahn ist kreisförmig mit dem Radius r_0 , wenn in jedem Augenblick für $r = r_0$ gilt: $dr/dt = 0$. Das ist nur möglich, falls $\partial V_{\text{ef}}/\partial r = 0$.

Aber, eine Kreisbahn kann nur stabil sein, wenn der Graph von V_{ef} ein Minimum in $r = r_0$ hat.

Betrachten wir als Beispiel die folgende anziehende Zentralkraft.

$$F(r) = -k/r^n, \quad k > 0 \quad (10)$$

Das effektive Potenzial ist

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (11)$$

Die Bedingungen für ein Minimum, also für eine stabile Kreisbahn, sind $\partial V_{\text{ef}}/\partial r = 0$ und $\partial^2 V_{\text{ef}}/\partial^2 r > 0$. Aus der ersten Bedingung folgt $r_0^{n-3} = \mu k/L^2$ und aus der zweiten $-nk/r_0^{n+1} + 3L^2/(\mu r_0^4) > 0$. Wenn wir die letzte Bedingung mit r_0^4 multiplizieren und die Gleichung $r_0^{n-3} = \mu k/L^2$ benutzen, erhalten wir

$$(3-n) L^2/\mu > 0 \quad (12)$$

Dieses Ergebnis sagt uns, dass es nur für $n < 3$ Kreisbahnen gibt. Wenn wir Gl. (10) in der Form $F(r) = -kr^s$ benutzt hätten, so hätten wir $s > -3$ als Stabilitätsbedingung erhalten. Dies schließt also die Gravitationskraft mit r^{-2} ein und auch die elastische Kraft mit $s = 1$.

Wir wissen bereits, dass die Bewegung eines Elektrons in einem Zentralfeld, das prop. zu r^{-1} ist, kreisförmig und stabil sein kann, siehe 5.2.3. Nach der Diskussion der V_{ef} -Kurve in 5.1.1 wissen wir, dass eine kleine Störung des Objekts in seiner kreisförmigen Trajektorie nur kleine Schwingungen um die Kreisbahn hervorrufen kann.

Es ist sehr instruktiv, diese kleinen Störungen gründlicher zu untersuchen. Technisch gesehen handelt es sich, wie schon zu Beginn erwähnt, um ein Beispiel der *Störungsrechnung*.

Wir schreiben die Kraft dazu in der Form $F(r) = -\mu g(r)$ und substituieren diesen Ausdruck in die radiale Gleichung (11) in 5.1. Nach Division durch μ ergibt sich

$$d^2r/dt^2 - L^2/(\mu^2 r^3) = -g(r) \quad (13)$$

Wenn sich das Objekt zu Beginn auf einer Kreisbahn mit $r = r_0$ bewegt, so wird eine kleine Störung $x(t)$ den Radius ändern:

$$r = r_0 + x(t) \quad (14)$$

Da $r'' = x''$, ergibt sich für die Störfunktion $x(t)$ die folgende Differenzialgleichung

$$x'' - L^2/[\mu^2 r_0^3 (1+x/r_0)^3] = -g(r_0 + x) \quad (15)$$

Wir wollen annehmen, dass die Störung sehr klein ist, d.h. $x/r_0 \ll 1$, und dass wir die folgende Näherung benutzen können

$$(1 + x/r_0)^{-3} \approx 1 - 3x/r_0 \quad (16)$$

Wir nehmen auch an, dass $g(r) = g(r_0 + x)$ sich in eine Taylor-Reihe in der Umgebung des Punktes $r = r_0$ entwickeln lässt

$$g(r_0+x) = g(r_0) + x g'(r_0) + \dots \quad (17)$$

Mit diesen beiden Näherungen erhalten wir

$$x'' - L^2(1-3x/r_0)/(\mu^2 r_0^3) = -(g(r_0) + x g'(r_0)) \quad (18)$$

Wir berücksichtigen Gl. (13) und $r'' = 0$:

$$\begin{aligned} x'' - g(r_0)(1-3x/r_0) &= -(g(r_0) + x g'(r_0)) \quad \text{oder} \\ x'' + (3g(r_0)/r_0 + g'(r_0))x &= 0 \quad (19) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Definition

$$\omega_0^2 := 3g(r_0)/r_0 + g'(r_0) \quad (20)$$

erhalten wir die Differenzialgleichung des harmonischen Oszillators, vgl. 3.6.3, 4.7.4 :

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \quad (21)$$

Die Lösung von (21) ist

$$x(t) = \mathbf{A} e^{i\omega_0 t} + \mathbf{B} e^{-i\omega_0 t} \quad (22)$$

Wenn $\omega_0^2 < 0$, d.h., wenn ω_0 imaginär ist, wächst der zweite Term ohne Grenzen und das Objekt entfernt sich immer mehr von der Kreisbahn. Also bleibt das Objekt nur in Kreisbahnnähe, falls $\omega_0^2 > 0$.

Es muss also gelten

$$3g(r_0)/r_0 + g'(r_0) > 0 \quad (23)$$

Die Periode der kleinen Schwingungen der Funktion $x = x(t)$ um den Kreis mit $r = r_0$ ist durch folgenden Ausdruck gegeben

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g(r_0)}{r_0} + g'(r_0)}} \quad (24)$$

In der Zeit $T/2$ verändert sich der Radius r von einem Minimum bis zum nächsten Maximum. Da die Änderungen nur klein sind, können wir die zeitliche Änderung des Polarwinkels als konstant ansehen, d.h.

$$d\varphi/dt \approx L/(\mu r_0^2) = (g(r_0)/r_0)^{1/2} = \Delta\varphi/\Delta t \quad (25)$$

Für $\Delta t = T/2$ ergibt sich folgende Änderung des Polarwinkels

$$\Delta\varphi = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{g(r_0)}{r_0}} = \pi \left(3 + r_0 \frac{g'(r_0)}{g(r_0)}\right)^{-1/2} \quad (26)$$

Aus Gl. (26), zusammen mit $F(r) = -\mu g(r)$ und $F(r) = -k/r^n$, erhalten wir $g'(r)/g(r) = -n/r$ und damit

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3-n}} \quad (27)$$

Die Extrempunkte von r heißen *Apsiden* (Periapsis, Apoapsis) und $\Delta\varphi$ ist der Winkel zwischen zwei Apsiden (= Winkel zwischen r_{\min} und r_{\max}). Es ist bemerkenswert, dass $\Delta\varphi$ nicht vom Radius r_0 abhängt.

Im Fall einer Kepler-Ellipse haben wir $n = 2$ und damit $\Delta\varphi = \pi$. Bei einem Elektron, das sich im Feld eines geladenen Drahtes bewegt (oder auch für ein Elektron in einem Zylinderkondensator, dessen Feldlinien ebenfalls radial sind), ergibt sich $n = 1$ und $\Delta\varphi = \pi/(2)^{1/2} \approx 127,3^\circ$.

Von diesem Resultat macht man in Laboratorien für Atomphysik Gebrauch, um monoenergetische Elektronenstrahlen herzustellen, die man z.B. bei Strukturuntersuchungen bei Molekülen verwendet. In der folgenden Figur 5.3-6 sehen wir deutlich, wie Elektronen, deren Energien nur wenig verschieden sind, sich wieder in einem Punkt treffen, nachdem sie 127° durch ein radiales Zentralfeld geflogen sind. Das Programm für den geladenen Draht (5.2.3) wurde dreimal kopiert. Ich habe das ganze Programm hier aufgeführt, weil wir es später wieder benutzen werden, um die die Bewegung dreier Planeten zu verfolgen.

```

reset()://Monoenergetische Elektronen
x0:=0:y0:=1://Anfangsposition
vx0:=1:// x-Koordinate von v0
vy0:=0:
r2(t):=x(t)^2+y(t)^2:
//Differenzialgleichungen
IVP1:={x'(t)=-x(t)/r2(t),y'(t)=-y(t)/r2(t),
x(0)=x0,x'(0)=vx0,y(0)=y0,y'(0)=vy0}:
fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp1:=numeric::ode2vectorfield(IVP1, fields):
Y1 := numeric::odesolve2(ivp1):
IVP2:={x'(t)=-x(t)/r2(t),y'(t)=-y(t)/r2(t),
x(0)=x0,x'(0)=vx0,y(0)=y0,y'(0)=0.05}:
fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp2:=numeric::ode2vectorfield(IVP2, fields):
Y2 := numeric::odesolve2(ivp2):
IVP3:={x'(t)=-x(t)/r2(t),y'(t)=-y(t)/r2(t),
x(0)=x0,x'(0)=vx0,y(0)=y0,y'(0)=-0.05}:
fields:=[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]:
ivp3:=numeric::ode2vectorfield(IVP3, fields):
Y3 := numeric::odesolve2(ivp3):

//Animation
dt:=0.1:imax1:=50:
plot(
plot::Point2d(Y1(t)[1], Y1(t)[2],
Color = RGB::Blue,VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm) $ t in [i*dt $ i = 0..imax1],
plot::Point2d(Y2(t)[1], Y2(t)[2],
Color = RGB::Red,VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm) $ t in [i*dt $ i = 0..imax1],

plot::Point2d(Y3(t)[1], Y3(t)[2],
Color = RGB::Green,VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,
PointSize = 2*unit::mm) $ t in [i*dt $ i = 0..imax1],
plot::Line2d([Y1(t - dt)[1], Y1(t - dt)[2]],
[Y1(t)[1], Y1(t)[2]], Color = RGB::Blue,VisibleAfter = t)
$ t in [i*dt $ i = 1..imax1],
plot::Line2d([Y2(t - dt)[1], Y2(t - dt)[2]],
[Y2(t)[1], Y2(t)[2]], Color = RGB::Red,VisibleAfter = t)
$ t in [i*dt $ i = 1..imax1],
plot::Line2d([Y3(t - dt)[1], Y3(t - dt)[2]],
[Y3(t)[1], Y3(t)[2]], Color = RGB::Green,VisibleAfter = t)
$ t in [i*dt $ i = 1..imax1],

plot::Line2d([0,0],[0.79,-0.6],Color = RGB::Black),
plot::Line2d([0,0],[-0.95,-0.29],Color = RGB::Black),
Scaling=Constrained):

```

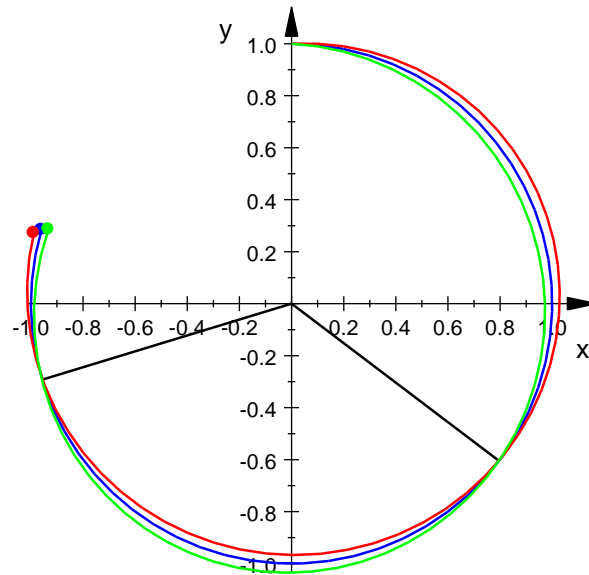


Fig.: 5.3-6

Elektronen, die mit einer Energiebreite von $\Delta E = E - E(r_0)$ in einen Zylinderkondensator eintreten, werden zunächst auseinanderstreben, aber nach 127° werden sie wieder zusammenkommen. Wegen dieses Verhaltens ist es möglich, jene Elektronen zu trennen, die sich energetisch um $\pm \Delta E$ unterscheiden. Aber ein Zylinderkondensator funktioniert nicht nur als Energiefilter, er hat auch die Eigenschaft, jene Elektronen zu vereinigen, die mit einer kleinen Winkeldifferenz eintreten. Diese Elektronen werden um den Kreis mit dem Radius r_0 oszillieren.

In der Zeit $T/2$ überstreicht φ das Intervall $\Delta\varphi$. Für eine volle Periode benötigt man eine Winkelöffnung von $2 \Delta\varphi$. Wenn dieses Intervall oder ein ganzzahliges Vielfaches davon genau in 2π passt, wird die gestörte Bahn geschlossen sein.

Da die Zahl i der vollständigen Schwingungen, die in 2π passen, eine natürliche Zahl sein muss, erhalten wir mit $i = 2\pi/(2\Delta\varphi) = (3-n)^{1/2}$ die Bedingung dafür, dass eine Bahn geschlossen sein wird. Dies geschieht für $n = 2; -1; -6; -13$ usw.

Die Fälle $n = 2$ und $n = -1$ beziehen sich auf Planetenbahnen und auf den harmonischen Oszillator. Da für ein Elektron in einem Radialfeld (geladener Draht oder Zylinderkondensator) $n = 1$ ist, können seine Bahnen nicht geschlossen sein. Wir könnten dies den "caso triste" nennen, den traurigen Fall.

Unsere Störungsrechnung könnten wir auch auf den Planeten Merkur anwenden. Dieser erleidet wie alle Planeten Bahnstörungen infolge der WW mit anderen Planeten. Eine derartige Rechnung ergibt, dass das Perihel des Merkur 531 Bogensekunden pro Jahrhundert voreilt (Periheldrehung). Die Beobachtungen ergeben jedoch eine Drehung von 574 Bogensekunden pro Jh. Die allgemeine Relativitätstheorie erklärt diesen Unterschied. Dieses Ergebnis ist einer der vielen Beweise für die Richtigkeit der Einstein'schen Theorie.

Im nächsten Abschnitt werden wir die Störungen der Planetenbahnen infolge der WW mit anderen Planeten studieren. Um z.B. die Bewegung von drei Körpern zu berechnen, muss man die Kräfte berücksichtigen, die sie gegenseitig aufeinander ausüben. Schon im 4. Kapitel haben wir Systeme betrachtet, die aus vielen Teilchen bestehen. Aber diese Teilchen konnten keine freien Bewegungen ausführen, denn sie waren durch unsichtbare "Stangen" miteinander verbunden. In dem Abschnitt "Das n-Körperproblem" sind alle Körper frei.

Ein weiteres Beispiel zur Störungsrechnung werden wir bei der Betrachtung des anharmonischen Oszillators im 6. Kapitel kennenlernen.

5.3.4 Streuung von Alphateilchen (II) (Rutherfordstreuung)

In 5.2.2 sahen wir die hyperbolische Trajektorie eines positiv geladenen Teilchens, das von einem positiven Streuzentrum (schwerer Atomkern) abgestoßen wurde. In jenem Abschnitt hatte ich bereits angekündigt, dass wir uns später auch mit der Theorie dieser Streuung beschäftigen werden. Wir sind angekommen und beschäftigen uns heute mit der Streuung von geladenen Teilchen in einem Coulomb-Feld mit $k < 0$ und $E_i > 0$.

In Fig. 5.3-6 sehen wir eine Skizze des berühmten Rutherford-Experiments, bei dem man beabsichtigte, den Kernradius zu bestimmen. Die theoretische Basis ist die Coulomb-WW zwischen einem Atomkern mit der Ladung $+Ze$ mit $Z = 79$ (Goldatomkern) und einem Alphateilchen (Heliumkern) mit der Ladung $+2e$. Im Experiment wurde ein Strahl von Alphateilchen benutzt, die aus einem Material, das einige Milligramm Radium (Ra) enthielt, emittiert wurden. Die "Alphas" hatten eine Energie von 7,38 MeV ($1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Im Kraftgesetz $F(r) = -k/r^2$ haben wir jetzt bei der Coulomb-Wechselwirkung

$$k = - 2Ze^2/(4\pi\epsilon_0) = - 3.644 \cdot 10^{-26} \text{ Nm}^2.$$

Die Figur 5.3-6 zeigt das Schema des Experiments. Weiter unten zeige ich Ihnen einen genaueren experimentellen Aufbau.

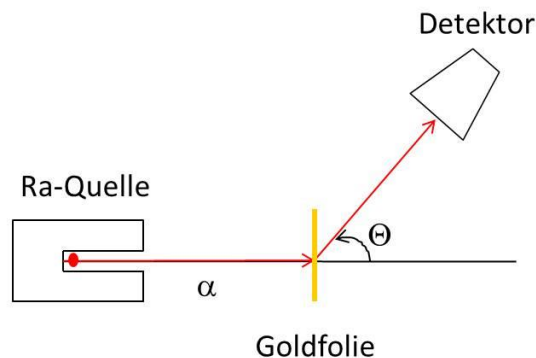


Fig.: 5.3-6

Die Alphas trafen auf eine dünne Goldfolie (ca. 400 Atomlagen dick) und wurden von den Goldkernen abgelenkt (gestreut). Ein Nachweisgerät (Detektor) "zählte" diejenigen Teilchen, die um einen Winkel θ abgelenkt worden waren. Der Detektor bestand aus einem dünnen Stückchen Tuch, das mit Zinksulfid (ZnS) bestrichen und an einem Mikroskop angebracht war.

Rutherford, zusammen mit seinen Mitarbeitern *Geiger* (erfand später den nach ihm benannten Zähler) und *Marsden*, erwartete, dass er das "Rosinenkuchenmodell" seines Chefs *J.J. Thomson* bestätigen könnte. Aber die experimentellen Ergebnisse entsprachen nicht den Erwartungen.

Thomson (Physiknobelpreis 1906) entwickelte ein Modell, das unter einem Atom eine Art mikroskopischer Plumpudding verstand, bei dem die Elektronen durch die Rosinen (Pflaumen?) dargestellt wurden.

Die experimentellen Daten zeigten Erstaunliches. Man beobachtete, dass die meisten Alphateilchen die Goldfolie ohne Ablenkung passierten, so als wäre die Folie nicht vorhanden. Aber eine kleine Anzahl zeigte ungewöhnlich große Ablenkungen, einige wurden sogar reflektiert. Diese großen Streuungen ließen sich mit dem Thomson-Modell nicht erklären.

Um die experimentellen Daten zu erklären, postulierte Rutherford, dass die positive Ladung des Atoms in einem Kern konzentriert sein müsse, dessen Radius etwa 10^4 -mal kleiner sein muss als der des Atoms. Von den Elektronen nahm er an, dass sie den Kern umkreisen, ähnlich wie Planeten die Sonne.

Wir werden jetzt die Rutherford'schen Rechnungen wiederholen. Wir werden zu einer Formel gelangen, die es erlaubt, die Zahl der Teilchen zu berechnen, die unter einem bestimmten Winkel θ abgelenkt werden (Rutherford'sche Streuformel).

Schauen wir uns nochmals Fig. 5.2.2 an, in der ein α -Teilchen sich von links kommend mit $y_0 = b = 0,4 F$ einem ruhenden Atomkern nähert, der sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet. Den Abstand b nennt man Stoßparameter.

Solange das Teilchen noch "weit" vom Atomkern entfernt ist, besitzt es nur kinetische Energie:

$$E_i = E_k = \mu v_0^2 / 2 \quad (1)$$

v_0 ist die Geschwindigkeit des α -Teilchens nach Verlassen der Ra-Quelle. Der Impulsbetrag ist $P = \mu v_0$. Der Stoßparameter ist $b = L/P$ und hat hier den Wert $b = L/(\mu v_0)$. Wir sahen in 5.1.3 (Gl. (37)), dass der Kosinus des Asymptotenwinkels α durch $1/\varepsilon$ gegeben ist. Mit dem Wert von ε nach Gl. (30) aus 5.1.3 erhalten wir

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu b v_0^2}{k} \right)^2}, \quad (2)$$

was wir noch umformen können:

$$\tan \alpha = \frac{\mu b v_0^2}{|k|} = \cot \frac{\theta}{2}. \quad (3)$$

Diese Beziehung vereinfacht sich noch, wenn wir r_{\min} einführen, die kleinste Entfernung des α -Teilchens vom Kern. Denn mit dem Energieerhaltungssatz

$$\mu v_o^2/2 = \mu v_{\min}^2/2 + |k|/r_{\min} = |k|/r_{\min}$$

erhalten wir $r_{\min} = |k|/E_k = 2 Ze^2/(4\pi\epsilon_0 \cdot 0.5\mu v_o^2)$. Setzen wir dies in Gl. (3) ein, so ergibt sich für den Stoßparameter die einfache Beziehung

$$b = \frac{r_{\min}}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (4)$$

Weiter unten benötigen wir die Ableitung von b nach θ :

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{r_{\min}}{4} \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \quad (5)$$

Setzen wir die numerischen Daten ein, so erhalten wir für α -Teilchen von 7,38MeV eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_o = 1,96 \cdot 10^7$ m/s und für Gold den Minimalabstand $r_{\min} = 2,9 \cdot 10^{-14}$ m.

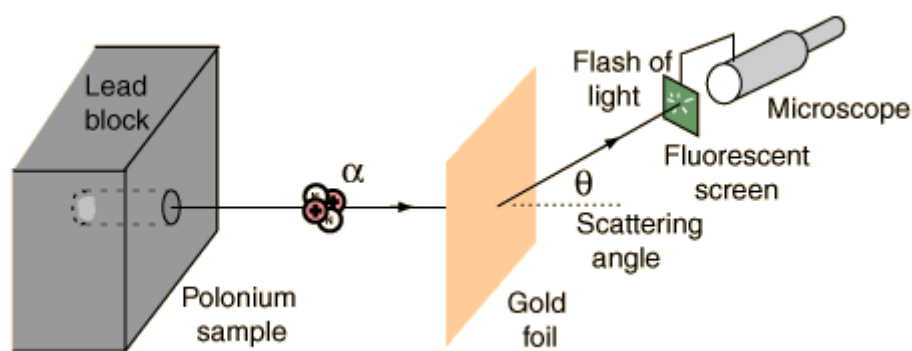
Es fehlt uns nun nur noch ein "Interface", das die Gln. (3) und (4) mit experimentell messbaren Werten verbindet, also mit Streuwinkel, Teilchenzahl und Raumwinkel, denn niemand kann b direkt messen. In Wirklichkeit kann man kein Experiment durchführen mit nur einem α -Teilchen und nur einem Kern. Wir haben immer einen Strahl vom Querschnitt A von Alphas, der auf eine Goldfolie der Dicke t einfällt. Wir haben nt Streuzentren mit n = Anzahl der Kerne pro Volumeneinheit. Wir wollen auch annehmen, dass ein Teilchen nicht mehrfach mit Kernen zusammenstoßen kann, d.h. dass die Entfernung zwischen den Kernen hinreichend groß ist. Die Anzahl der Streuzentren ist für unseren Strahl also nAt . Jedes α -Teilchen, das sich mit einem Stoßparameter zwischen 0 und b einem Kern nähert, wird um wenigsten θ Grad (oder Radiant) abgelenkt.

Die Fläche $\sigma = \pi b^2$ heißt Stoßquerschnitt und die nAt Streuzentren haben als Gesamtstoßquerschnitt $n \cdot A \cdot t \cdot \sigma$.

Der Bruchteil der α -Teilchen, die um mehr als θ gestreut werden, beträgt

$$f = n \cdot A \cdot t \cdot \sigma / A = n \cdot t \cdot \sigma = N/N_0 \quad (6)$$

N = Anzahl der gestreuten Teilchen, N_0 = Anzahl der während der Messzeit einfallenden Teilchen. Wir zeichnen um jedes Streuzentrum einen Ring mit den Radien b und $b + db$. Alle Teilchen, die parallel durch diesen Ring fliegen, werden sich nach dem Streuvorgang in dem Raumwinkel zwischen θ und $\theta + d\theta$ befinden. Um die Anzahl der Alphas zu finden, die in den Raumwinkel $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ gestreut wurden, leiten wir $f = N/N_0$ in Bezug auf N ab und dividieren das Ergebnis durch $d\Omega$.



Diese Figur 5.3-8 stammt aus "Hyperphysics", wo Sie viel Material über "Rutherford scattering" finden können. Sehr schön ist auch die Darstellung in

http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_stoss/stoss_ruth_02.html

Wir erhalten den folgenden Ausdruck

$$df/d\Omega = dN/(N_0 d\Omega) = - n t \pi r_{\min}^2 \cotg(\theta/2)d\theta/(8\pi \sin\theta d\theta \cdot \sin^2(\theta/2))$$

Das negative Vorzeichen berücksichtigt, dass f mit wachsendem θ abnimmt.

Jetzt benutzen wir die Identität $\sin\theta = 2 \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ und erhalten

$$|df/d\Omega| = n t r_{\min}^2 / 16 \cdot 1/\sin^4(\theta/2) := K/\sin^4(\theta/2) \quad (7)$$

Während einer Messreihe bleibt K konstant.

Die Detektorfläche hat die Entfernung R von der Goldfolie. Die in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreuten Teilchen gehen auf dem ZnS-Schirm durch die Fläche $dA = R^2 d\Omega = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$.

Damit erhalten wir endlich die bekannte Streuformel von Rutherford

$$|dN/dA| = K_1/\text{sen}^4(\theta/2), \quad (8)$$

in der $K_1 = K \cdot N_0/R^2$ eine neue Konstante ist.

Geiger und *Marsden* zählten die Miniblitze, die die auf dem ZnS-Schirm auftretenden Alphateilchen erzeugten. Dabei hatten sie festzustellen, ob das Produkt $|dN/dA| \cdot \text{sen}^4(\theta/2)$ während einer Messreihe konstant blieb. Bei einer Goldfolie fanden sie $K_1 = 30$ für θ zwischen 30° und 150° . Bei einer Silberfolie fanden sie $K_1 = 19$.

Im Rahmen der damaligen (1911) experimentellen Möglichkeiten hatten sie das Rutherford-Modell bestätigt.

In der Literatur findet man auch andere Formulierungen von Gl. (8), z.B.:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E_k} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \quad (9)$$

Den Bruch $d\sigma/d\Omega$ nennt man den *differentiellen* Wirkungsquerschnitt. Er ist die Wahrscheinlichkeit pro Raumwinkeleinheit dafür, dass ein einfallendes Teilchen in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut wird.

Mit dem folgenden Programm werden wir die experimentellen Daten darstellen, die *Geiger* und *Marsden* 1913 veröffentlichten (die Veröffentlichung kann man im Internet finden: <http://dbhs.wvusd.k12.ca.us/webdocs/Chem-History/GeigerMarsden-1913/GeigerMarsden-1913.html>).

Die theoretische Kurve nach Gl. (9) ist im Programm enthalten.

```

• reset()://Rutherford
  //P1:=[30,7800]://dieser Wert wurde nicht benutzt
  P2:=[45,1435]:// 1435 Impulse bei 45 Grad
  P3:=[60,477]:
  P4:=[75,211]:
  P5:=[105,69.5]:
  P6:=[120,51.9]:
  P7:=[135,43]:
  P8:=[150,33.1]:
  f:=29/(sin(w*PI/360))^4://Gl.(9)
  werteliste:= [P2,P3,P4,P5,P6,P7,P8]:

```

```

Werte:=plot::Point2d(werteliste[i],Color=RGB::Red)
$ i=1..7:
Theorie:=plot::Function2d(f,Color=RGB::Green,w=50..160):
plot(Werte,Theorie,ViewingBoxXRange =0..160,ViewingBoxYRange
=0..500)

```

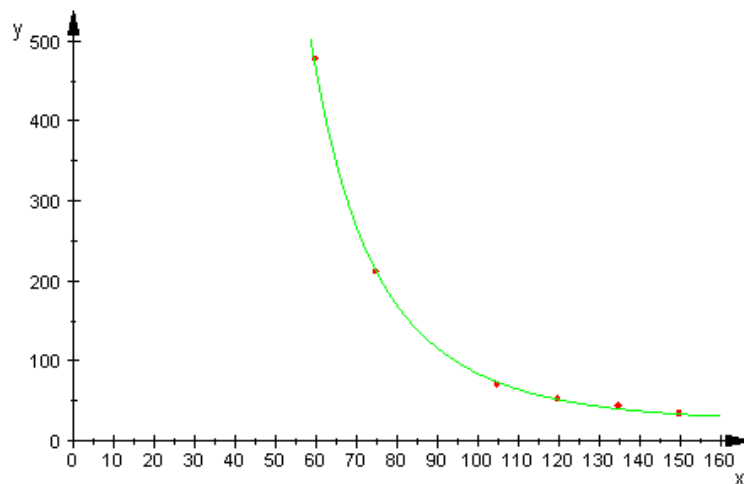


Fig.: 5.3-9

Die Figur zeigt die ausgezeichnete Übereinstimmung von Theorie und Experiment.

Es muss noch betont werden, dass die Rechnungen von Rutherford, die wir reproduziert haben, ganz auf der klassischen Newton'schen Mechanik beruhen. Dieses Vorgehen ist nur bei hohen Energien erlaubt. Wenn es sich um Teilchen mit niedriger Energie handelt (z.B. Elektronen mit weniger als 1000 eV), hat man die Rechnungen quantenmechanisch zu gestalten. Man benutzt dabei die *Schrodinger-Gleichung* (sogar ihre relativistische Form bei Energien unter 100 eV). Man beobachtet bei diesen niedrigen Energien, dass die Streukurven Maxima und Minima aufweisen, so wie man es von Wellen her kennt.

5.3.5 Mit Bleistift und Papier (Flugzeit eines Satelliten)

Eine Frage von größter Bedeutung ist das Problem der **Flugzeit** eines Satelliten, d.h. die Zeit, die ein Satellit benötigt, um einen Teil seiner Bahn zurückzulegen oder einen ganzen Umlauf zu vollenden.

Wir müssen wieder nach 5.1.3 gehen, wo wir zu Beginn sahen, dass $dr/dt = (2(E_i - V_{ef})/\mu)^{1/2}$. Wir haben nun einige Transformationen durchzuführen, die keineswegs selbstverständlich sind.

Zunächst notieren wir

$$dt = A \cdot (a^2 \epsilon^2 - (a-r)^2)^{-1/2} \cdot r dr \quad (1)$$

A ist eine Konstante, die folgendermaßen definiert wird: $A = (k/\mu)^{1/2}$.

Um Gl. (1) zu integrieren, führen wir $r dr = rd(a-r)$ ein

$$dt = A \frac{-rd \frac{a-r}{a\epsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\epsilon}\right)^2}} \quad (2)$$

Da $-r = (a-r) - r$, erhalten wir

$$dt = A \left[\frac{a\epsilon \frac{a-r}{a\epsilon} d \frac{a-r}{a\epsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\epsilon}\right)^2}} - \frac{ad \frac{a-r}{a\epsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\epsilon}\right)^2}} \right] \quad (3)$$

Es sieht so aus, als ob wir nichts Brauchbares erhalten hätten. Aber mit der Abkürzung

$$z := (a-r)/(a\varepsilon)$$

gewinnen wir einen integrierbaren Ausdruck

$$dt = a^{3/2} w^{-1/2} \left[-\frac{\varepsilon}{2} \frac{d(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right] \quad (4)$$

mit $w := k/\mu$.

Die Integration von Gl. (4) ergibt

$$t = a^{3/2} w^{-1/2} (-\varepsilon \sqrt{1-z^2} + \arccos z + C) \quad (5)$$

C ist eine Integrationskonstante, die wir verschwinden lassen können, wenn wir für $t = 0$ annehmen, dass $r = a(1-\varepsilon)$ (Perizentrum) ist.

Mit der Abkürzung $\arccos z = \arccos (a-r)/(a\varepsilon) := h$ erhalten wir den folgenden einfachen Ausdruck für t:

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} (h - \sinh) \quad (6)$$

Die Zeit T für einen vollen Umlauf auf einer Ellipse ist:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \quad (7)$$

-was nichts anderes ist als das 3. Kepler'sche Gesetz.

Schließlich erhalten wir für die Zeitspanne, die ein Satellit benötigt, um von dem Punkt r_1 nach dem Punkt r_2 zu gelangen,

$$\Delta t = a \sqrt{\frac{a\mu}{k}} [(h_1 - h_2) - \varepsilon(\sinh_1 - \sinh_2)] \quad (8)$$

worin $h_1 = \arccos [(1-r_1/a)/\varepsilon]$ und $h_2 = \arccos [(1-r_2/a)/\varepsilon]$.

Auf ähnliche Art können wir auch Gleichungen für hyperbolische oder parabolische Bahnen erhalten.

Normalerweise ist es einfacher, bei einer Ellipse T zu messen als die große Halbachse a . Eine Gleichung wie (7) kann dann dazu dienen, a zu berechnen.