

5 Bewegung unter Zentralkräften

Zentralkräfte zeigen immer auf denselben Raumpunkt und haben die Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \mathbf{r}/r \quad (1)$$

In den vorhergehenden Abschnitten, vgl. 4.6.2, sahen wir, dass Zentralkräfte zu der wichtigen Klasse der konservativen Kräfte gehören. Wir wissen, dass eine Kraft konservativ ist, wenn die von ihr geleistete Arbeit sich wie folgt darstellen lässt

$$E_p(\mathbf{r}) - E_p(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

Viele Kräfte in der Natur sind zentral:

Beispiel 1

Die Erde bewegt sich um die Sonne unter dem Einfluss einer Zentralkraft, deren Richtung immer durch das Zentrum der Sonne geht. So ist der Drehimpuls der Erde in Bezug auf die Sonne konstant. Eine Konsequenz davon ist, dass der Radiusvektor der Erde in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht (Flächensatz oder zweites Keplersches Gesetz, vgl. 4.2.3)

Beispiel 2

Ein weiteres Beispiel ist das Wasserstoffatom. Das Elektron dieses Atoms bewegt sich unter dem Einfluss einer Zentralkraft infolge der elektrischen WW mit dem Atomkern (Proton). Die Kraftrichtung weist immer auf den Kern.

Beispiel 3

Historisch gesehen wurde das Problem der Streuung von Alphateilchen durch Atomkerne (Rutherford Experiment, 5.3.4) zuerst als ein klassisches Zweikörperproblem behandelt. Die Rechnung ergab die berühmte Streuformel von Rutherford.

Wenn es sich um Bewegungen unter Zentralkräften handelt, haben wir stets zwei Erhaltungssätze, nämlich

das Prinzip von der Erhaltung des Drehimpulses: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{const.}$ (3)

und den Satz von der Erhaltung der Energie: $E = m v^2/2 + E_p(\mathbf{r}) = \mathbf{const.}$ (4)

Da die Bewegung in einer Ebenen abläuft, ist es von Vorteil, sich der Polarkoordinaten r und φ zu bedienen:

$$L = m r^2 d\varphi/dt \quad (5)$$

$$E = m ((dr/dt)^2 + r^2 (d\varphi/dt)^2)/2 + E_p(r) \quad (6)$$

In 5.2 werden wir bei der numerischen Behandlung eines Problems kartesische Koordinaten benutzen.

5.1 Das Zweikörperproblem

Die Beispiele gehören zur Gruppe der Zweikörperprobleme, die wir schon in 4.4.2 einführten. Wir erinnern uns, dass man die beiden Bewegungsgleichungen durch Einführung der *reduzierten Masse* auf eine einzige Gleichung reduzieren kann:

$$\mathbf{F} = \mu d^2\mathbf{r}/dt^2 \quad (7)$$

mit $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ als "Positionsvektor" der reduzierten Masse
 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m_2 / (1 + m_2/m_1)$.

Die Ortsvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 werden vom (ruhenden) Schwerpunkt CM der beiden Körper aus gemessen.

Wenn wir $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \mathbf{r}/r$ in Gl. (7) einsetzen, erhalten wir

$$F_r = \mu a_r = \mu(d^2r/dt^2 - r d\varphi/dt) \quad (8)$$

$$F_\varphi = \mu a_\varphi = \mu(r d^2\varphi/dt^2 + 2 dr/dt \cdot d\varphi/dt) = 0 \quad (9)$$

Die letzte Gleichung können wir integrieren, ohne die Kraft zu kennen. Wir multiplizieren mit r und erhalten

$$\mu(r^2 \cdot d^2\varphi/dt^2 + 2r \cdot dr/dt \cdot d\varphi/dt) = d(\mu r^2 d\varphi/dt)/dt = 0 \quad (10)$$

Die Konstante $\mu r^2 d\varphi/dt$ ist nichts anderes als der Drehimpuls L , vgl. Gl. (5).

Wenn wir $d\varphi/dt = L/(\mu r^2)$ in Gl. (8) einsetzen, ergibt sich

$$\mu d^2r/dt^2 - L^2/(\mu r^3) = F(r) \quad (11) \text{ (radiale Gleichung)}$$

Durch Einsetzen der neuen Variablen $u = 1/r$ vereinfacht sich das Problem.

Von (11) gelangen wir nach einigen Umformungen zur folgenden Beziehung

$$\left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u\right)u^2 = -\frac{\mu}{L^2} F(r) \quad (12)$$

Wenn wir die Bewegungsenergie des CM vernachlässigen, ergibt sich als *innere Energie* des Systems

$$E_i = \mu(dr/dt)^2/2 + E_p^{\text{int}}(r) := E_{\text{kin}} + E_p(r) \quad (14)$$

Wir nennen $E_p(r)$ die *zentrale pot. Energie*, E_{kin} ist die kin. Energie in Bezug auf den Schwerpunkt CM. Unter Verwendung von (5) und (6), können wir schreiben

$$E_i = \frac{1}{2}\mu v^2 + (L^2/(2\mu r^2) + E_p(r)) := \frac{1}{2}\mu v^2 + E_p^{\text{ef}}(r) \quad (15)$$

Der Term $E_p^c := L^2/(2\mu r^2)$ heißt *zentrifugale pot. Energie*. E_p^c ist für große Entfernungen sehr klein, wächst aber sehr schnell bei Annäherung ans Zentrum. E_p^{ef} ist die *effektive pot. Energie* und wird wie folgt definiert:

$$E_p^{\text{ef}}(r) := E_p^c + E_p(r) \quad (16)$$

In der Literatur benutzt man oft die folgenden Bezeichnungen:

$$E_i = T + V(r) \quad \text{und} \quad V_{\text{ef}}(r) = V(r) + L^2/(2\mu r^2)$$

Mit der Einführung des *effektiven Potentials* nimmt der Energiesatz dieselbe Form an wie im eindimensionalen Fall. Indem man (15) nach $v = dr/dt$ auflöst und integriert, ergibt sich

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E_i - V_{\text{ef}}(r')]}} = f(r) \quad (17)$$

Diese Gleichung gibt uns die Entfernung r als Funktion der Zeit. Dann haben wir nur $r(t)$ in $d\phi/dt = L/(\mu r^2)$ einzusetzen und zu integrieren. Es folgt

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{L}{\mu r(t')^2} dt' \quad (18)$$

Wir kennen damit $r(t)$ und $\phi(t)$ und haben so das Problem der Bewegung zweier Körper –im Prinzip- gelöst. Aber unglücklicherweise sind die Zwischenschritte oft schwierig und man ist genötigt, auf numerische Methoden zurückzugreifen.

Normalerweise sind wir jedoch nicht an den Gleichungen für $r(t)$ und $\varphi(t)$, beide als Funktionen der Zeit, interessiert, vielmehr suchen wir einen Ausdruck, der r und φ miteinander verbindet, d.h., was wir suchen, ist die Gleichung der Trajektorie in Polarkoordinaten.

In den folgenden Paragraphen werden wir dieses Problem lösen und für die Bewegung im Gravitationsfeld die folgende Gleichung erhalten

$$r = \left(\frac{\mu k}{L^2} + \frac{\alpha}{L} \cos \varphi \right)^{-1}$$

Diese Beziehung gibt uns für jeden Wert von φ den entsprechenden Wert von r .

In vielen physikalisch interessanten Fällen können wir eine Beschreibung der Bewegung mithilfe von Energiebetrachtungen erhalten, indem wir das *effektive Potential* benutzen. Z.B. erlaubt die Tatsache, dass $E_i - V_{ef}$ größer oder gleich Null sein muss, vgl. (17), viele Schlüsse zu ziehen über mögliche Bahnen.

5.1.1 Qualitative Beschreibung der Zentralbewegung

In der folgenden Illustration studieren wir die *pot. Gravitationsenergie* (rot) zusammen mit der *zentrifugalen pot. Energie* (blau), deren Summe die *effektive pot. Energie* (grün) darstellt.

- `reset()://Energie bei Zentralkräften (Gravitation)`

```
l:=0.5:k:=10://rel. Einheiten
```

```
Vc:=1/r^2:
```

```
V:=-k/r:
```

```
Vef:=Vc+V:
```

```
E1:=-50://rel. Einheiten
```

```
E2:=-35:
```

```
E3:=20:
```

```
plotfunc2d(Vc,V,Vef,E1,E2,E3,r=0.01..0.5,YRange=-60..50,
```

```
AxisTitles=["r","V"],
```

```
Title="Vef",TitlePosition=[0.06,-25],TitleAlignment=Left)
```

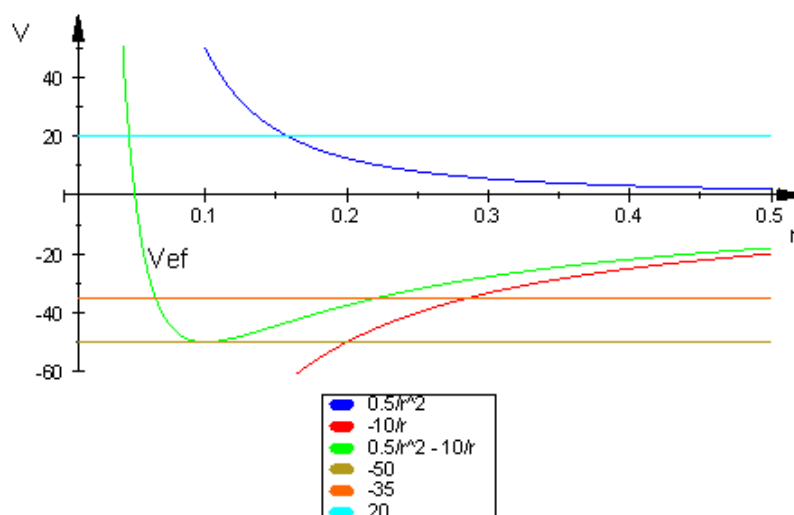


Fig.: 5.1-1

Die horizontalen Linien gehören zu drei verschiedenen Gesamtenergien E_i . Die Gestalt von V_{ef} und der Wert von E_i bestimmen, ob die Bewegung eingeschränkt oder offen ist.

Wenn die Gesamtenergie E_i 20 rel. Einheiten beträgt (E_3), ist der Orbit nicht beschränkt, und der "Körper" der Masse μ kommt aus dem Unendlichen bis zum Schnittpunkt $A = (0,0458|20)$ von E_i und V_{ef} ($r_{min} = 0,0458$) und kehrt anschließend wieder zurück ins Jenseits.

Aus Gl. (15) folgt $\frac{1}{2} \mu v_r^2 = E_i - V_{ef}$. Im Schnittpunkt der Graphen ist $\frac{1}{2} \mu v_r^2 = 0$, d.h. $v_r = dr/dt = 0$, was bedeutet, dass der Schnittpunkt ein Punkt der Umkehr der Bewegung ist – aber ohne stehenzubleiben, denn aus $L = \mu r^2 d\phi/dt > 0$ folgt $d\phi/dt > 0$, was als Folge hat, dass ϕ mit der Zeit wächst und dass der Ortsvektor r sich im Gegenuhrzeigersinn dreht. Für $L < 0$ ergibt sich, dass ϕ mit der Zeit abnimmt und dass r sich im Uhrzeigersinn dreht

Die Bahn des "Teilchens" μ wird also so aussehen, wie in fig. 5.1-2 skizziert. A ist der Punkt der größten Annäherung. Im analogen Fall der linearen Bewegung des harmonischen Oszillators, vgl. 4.7.4, blieb das Teilchen in den Umkehrpunkten einen Augenblick stehen. Aber das "Teilchen" in Fig. 5.1-2 hält nicht an, denn $d\phi/dt = \omega \neq 0$.

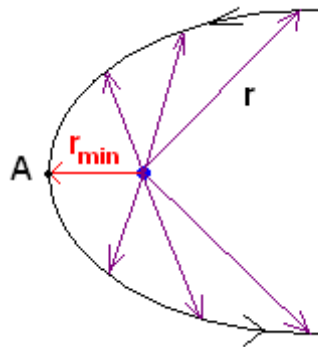


Fig.: 5.1-2

Die Gerade der Energie $E_1 = -50$ Einheiten ist eine Tangente der Kurve von $V_{\text{ef}} = L^2/(2\mu r^2) - k/r$ ($= 0.5/r^2 - 10/r$ in rel. Einheiten), was bedeutet, dass nur ein Berührungspunkt existiert. Der Radius dieses Minimums der Kurve von V_{ef} ist $r_0 = L^2/(k\mu)$, da im Minimum $dV_{\text{ef}}/dr = k/r^2 - L^2/r^3 := 0$. Der Wert des Minimums ist

$$V_{\text{min}} = -k^2\mu/L^2 + L^2k^2\mu^2/(2\mu L^4) = -k^2\mu/(2L^2).$$

Mit den relativen Werten des Programms erhalten wir $V_{\text{min}} = -50$. Das "Teilchen" beschreibt in diesem Fall eine kreisförmige Bahn mit dem Radius $r_0 = L^2/(k\mu)$ ($= 0.1$, denn $L^2/(2\mu) = 0.5$ und $k = 10$).

Wenn das Potenzial $V(r) = k/r$ abstoßend wäre ($k > 0$), so wären $V_{\text{ef}} = L^2/(2\mu r^2) + k/r$ und E_i immer > 0 und der Orbit wäre offen (eine Hyperbel).

Betrachten wir jetzt den Fall zweier Schnittpunkte B und C bei $E_2 = -35$ Einheiten. Der Radius der Bahn variiert in diesem Fall zwischen r_{min} (B) und r_{max} (C). Der Orbit ist eine Rosette, vgl. die animierte Figur 5.1-3 (Polarplot). Die Bewegung ist beschränkt.

```

reset()://Orbit bei einer Zentralkraft mit 2 Schnittpunkten
l:=1.434:
r:=1/(1.04+0.4*cos(1*a)-0.0133*cos(2*1*a)+
0.0013*cos(3*1*a)):
ros:=plot::Polar([r,a],a=0..5*PI)//Animation
circ1:=plot::Circle2d(0.7,[0,0],Color=RGB::Red,t=0..2*PI):
circ2:=plot::Circle2d(1.6,[0,0],Color=RGB::Green,t=0..2*PI):

plot(ros,circ1,circ2)

```

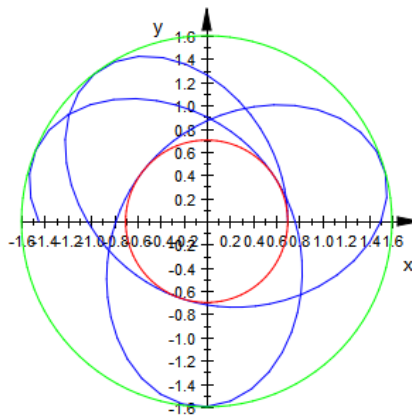


Fig.: 5.1-3

Im nächsten Paragraphen analysieren wir detailliert die Bewegung von **Planeten**.

5.1.3 Die Bewegung von Planeten

In diesem Paragraphen werden wir die möglichen Bahnen in einem Gravitationsfeld untersuchen. Wir wollen die Funktion $r = r(\varphi)$ bestimmen, wie bereits in 5.1 diskutiert wurde.

Wir wollen zunächst dt aus den Beziehungen $d\varphi/dt = L/(\mu r^2)$ und $dr/dt = (2(E_{\text{ef}} - V_{\text{ef}})/\mu)^{1/2}$ eliminieren und bilden dann

$$\varphi = \int \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu E_{\text{ef}} - 2\mu V - \frac{L^2}{r^2}}} dr + \text{const.} \quad (19)$$

wobei $V(r) = -k/r$ mit $k = G mM$.

Indem wir die Konstante α^2 und die neue Variable β einführen, transformieren wir Gl. (19) in eine integrierbare Beziehung:

$$\alpha^2 := 2\mu E_i + \mu^2 V^2 r^2 / L^2 = 2\mu E_i + (\mu k / L)^2 \quad (20)$$

$$\beta := -\mu V r / L - L / r = \mu k / L - L / r \quad (21)$$

Wir erhalten

$$\alpha^2 - \beta^2 = 2\mu E_i - 2\mu V - L^2 / r^2 \quad (22)$$

Mit $d\beta/dr = L/r^2$ können wir Gl. (19) in das folgende Integral umformen

$$\varphi = \int d\beta / (\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} + \text{const.} \quad (23)$$

Die Lösung ist $\varphi = \arcsin(\beta/\alpha) - C$, woraus folgt

$$\beta = \alpha \sin(\varphi + C) = \mu k / L - L / r \quad (24)$$

Wenn wir dieses Ergebnis nach $1/r$ auflösen, ergibt sich

$$1/r = \mu k / L^2 - A \sin(\varphi + C) \quad (25)$$

Hierin bedeutet A

$$A = \alpha / L = + (2\mu E_i / L^2 + (\mu k / L^2)^2)^{1/2} \quad (26)$$

Wir lösen nach r auf und erhalten

$$r = \frac{1}{\frac{\mu k}{L^2} - \frac{\alpha}{L} \sin(\varphi + C)} \quad (27)$$

Die Konstante C legen wir so fest, dass der Radiusvektor minimal ist für $\varphi = 0$. Aber r ist minimal, wenn $\sin(\varphi + C) = -1$. Das ist für $\varphi + C = 3\pi/2$ und $\varphi = 0$ der Fall, was bedeutet, dass $C = 3\pi/2$. Da $\sin(\varphi + 3\pi/2) = -\cos\varphi$, erhalten wir als gesuchte Bahngleichung

$$r = \frac{1}{\frac{\mu k}{L^2} + \frac{\alpha}{L} \cos\varphi} \quad (28)$$

Wenn wir dieses Ergebnis mit der bekannten Kegelschnittgleichung

$$r = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi} \quad (29)$$

vergleichen, sehen wir, dass die möglichen Bahnen Kegelschnitte sind.

Die Substitutionen sind

- a. $p = L^2/(\mu k)$ (*Halbparameter* = Wert von r für $\varphi = 90^\circ$)
- b. $\varepsilon = \alpha L/(\mu k) = [1 + 2L^2 E_i/(\mu k)^2]^{1/2}$

(*numerische Exzentrizität* $\varepsilon = r/s$; s = Entfernung eines Punktes P von der *Leitlinie* (Directrice). $s = f - r \cos \varphi$, worin f die Entfernung des *Brennpunktes* F von der Leitlinie ist.)

Je nach dem Wert von ε , ergeben sich drei verschiedene Kegelschnittformen. Für $\varepsilon > 1$ erhalten wir eine *Hyperbel*, für $\varepsilon = 1$ eine *Parabel*, für $0 < \varepsilon < 1$ eine *Ellipse*, und für $\varepsilon = 0$ wird aus der Ellipse ein *Kreis*.

Bei einer *anziehenden* Kraft sind k und p positiv. Wenn $E_i < 0$, ergibt sich $\varepsilon < 1$ und die Bahn ist eine Ellipse. Wenn E_i positiv ist, ergibt sich $\varepsilon > 1$ und die Bahn ist eine Hyperbel, z.B. die Bahn eines *Kometen*.

Wir erhalten auch eine Hyperbel, wenn die Kraft *abstoßend* ist ($k < 0$) und $E_i < 0$. Diesen Fall beobachten wir bei der Streuung eines Alphateilchens durch eine abstoßende Kernkraft, die umgekehrt proportional ist zum Quadrat der Entfernung.

Elliptische Bahnen ($k > 0$, $E_i < 0$)

In der Figur sehen wir die geometrischen Bedeutungen der verschiedenen Variablen, die wir verwenden werden.

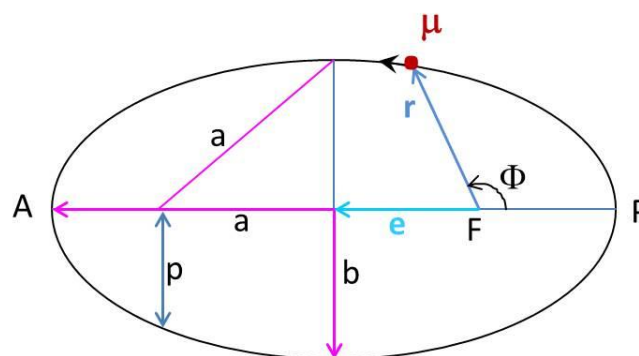


Fig.: 5.1-4

Die *große Halbachse* a , die *kleine Halbachse* b , die *lineare Exzentrizität* e und der *Halbparameter* p sind die wichtigsten Charakteristiken einer *Ellipse*. $\epsilon = e/a$ ist die *numerische Exzentrizität*. Die *lineare Exzentrizität* e ist die Entfernung eines Brennpunktes F vom Mittelpunkt. p ist der senkrechte Abstand eines Brennpunktes von der Ellipse.

Folgende Beziehungen sind wichtig:

$$a^2 = e^2 + b^2 = b^2/(1 - \epsilon^2) \quad \text{und} \quad p = b^2/a = a(1 - \epsilon^2)$$

Mit $p = L^2/(\mu k)$ und $\epsilon = [1 + 2L^2 E_i/(\mu k)^2]^{1/2}$ erhalten wir auch

$$a = p/(1 - \epsilon^2) = L^2/[\mu k(1 - \epsilon^2)] = -k/(2E_i) = k/(2|E_i|) \quad (30)$$

$$b = (ap)^{1/2} = L/(2\mu|E_i|)^{1/2} \quad (31)$$

Wir sehen, dass die große Halbachse a nur von der Gesamtenergie E_i abhängt und nicht vom Drehimpuls L . Der Halbparameter p hängt nur vom Drehimpuls L ab. Die kleine Halbachse b hängt sowohl von L als auch von E_i ab.

Der kleinste r-Wert ergibt sich für $\varphi = 0$, und aus Gl. (29) folgt, dass

$$r_{\min} = p/(1+\varepsilon) = a(1 - \varepsilon^2)/(1 + \varepsilon) = a(1 - \varepsilon) = a - e$$

Für $\varphi = \pi$ ergibt sich der größte r-Wert:

$$r_{\max} = a(1 + \varepsilon) = a + e$$

Der Punkt P heißt *Perigäum* und ist der Punkt der größten Annäherung an das Kraftzentrum. Das *Apogäum* A ist die größte Entfernung vom Kraftzentrum.

Wenn sich die Sonne in einem der Brennpunkte befindet, nennt man P das *Perihel* und A das *Aphel*.

Wenn wir den Flächensatz $dA = L/(2\mu) \cdot dt$ (gültig für alle Zentralkräfte), vgl. 4.2.3, über eine *Periode* T integrieren, erhalten wir $A = \pi ab = LT/(2\mu)$ oder $T = 2\pi\mu ab/L$. ($dA = L/(2\mu) \cdot dt$ drückt das *zweite Keplersche Gesetz* aus, vgl. 4.2.3, nach dem in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstrichen werden.)

Den Ausdruck für die Periodendauer können wir auch folgendermaßen darstellen

$$T^2 = \frac{\pi^2 k^2 \mu^2}{-2\mu E_i^3} \quad (32)$$

Mit $E_i = -k/2a$, vgl. Gl. (30), ergibt sich das *3. Keplersche Gesetz*, siehe 4.2.3:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2 \mu} \quad (33)$$

In Worten: Für alle elliptische Bahnen ist die 3. Potenz der großen Halbachse proportional zum Quadrat der Umlaufdauer T. $C := k/(4\pi^2 \mu)$ ist eine Proportionalitätskonstante.

Im Falle der Anziehung gibt es außer Ellipsen auch Hyperbeln und (für $E_i = 0$) Parabeln.

Etwa 10% aller Kometen haben Hyperbelbahnen und ca. 43% Parabelbahnen. (Die hyperbolischen Bahnen bei abstoßender Zentralkraft studieren wir noch besonders.)

Den Fall eines künstlichen **Erdsatelliten** können wir als Bewegung eines Einzelkörpers behandeln ($\mu \approx m =$ Satellitenmasse), da man die Erdmasse als im Raum ruhend betrachten kann

Die Kraft auf eine Masse m auf der Erdoberfläche ist $F = GmM/R^2$. Diese Kraft wird durch die Gl. $F_g = mg$ als *Gewicht* der Masse m definiert. Es gilt also $mg = GmM/R^2$. Daraus ergeben sich $g = GM/R^2$ und $M = gR^2/G$.

Die zweite Beziehung erlaubt uns, die Erdmasse zu berechnen, wenn wir g , R und G experimentell bestimmen.

Mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R = 6370 \text{ km}$, $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ ergibt sich $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Mit diesen Beziehungen erhalten wir für das 3. Keplersche Gesetz im Falle eines Satelliten eine einfachere Form: $a^3/T^2 = GM/(4\pi^2) = gR^2/(4\pi^2)$, und die Periode ist $T = 2\pi a^{3/2}/(R \cdot g^{1/2})$.

Der Energieerhaltungssatz lautet $\frac{1}{2}mv^2 - mgR^2/r = E$.

Mit $E = -k/(2a) = -gR^2m/(2a)$ erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$v^2 = 2gR^2(1/r - 1/(2a)) \quad (34).$$

Wenn wir r_{\min} und r_{\max} für *Perigäum* und *Apogäum* einführen, erhalten wir für die Geschwindigkeiten eines Satelliten in diesen Punkten

$$\begin{aligned} v_p &= R(g' r_{\max}/r_{\min})^{1/2} \\ v_A &= R(g' r_{\min}/r_{\max})^{1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

mit $g' = g/a$.

Numerisches Beispiel:

Ein künstlicher Erdsatellit wird von einem Punkt B des Äquators mithilfe einer Trägerrakete in eine elliptische Umlaufbahn gebracht. Perigäum = 2000 km, Apogäum 4000 km.

Berechne:

- v_p und v_A
- die Geschwindigkeit in einem Punkt C, in dem die Höhe des Satelliten 2500 km beträgt
- die Periode T (Zeit für einen vollen Umlauf)

Lösung:

Die Geschwindigkeiten sind durch die Gln. (35) gegeben mit

$$r_{\min} = 6370 \text{ km} + 2000 \text{ km} = 8370 \text{ km},$$

$$r_{\max} = 6370 \text{ km} + 4000 \text{ km} = 10\,370 \text{ km}; \quad a = (r_{\min} + r_{\max})/2 = 9370 \text{ km}$$

$$g/a = 9,81 \text{ m/s}^2 / 9370 \cdot 10^3 \text{ m} = 1.047 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}; \quad (g/a)^{1/2} = 1.023 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$v_p = 7253 \text{ m/s} = 26\,110 \text{ km/h}$$

$$v_A = 5854 \text{ m/s} = 21\,076 \text{ km/h}$$

Substitution von $r = 6370 \text{ km} + 2500 \text{ km} = 8\,870 \text{ km}$ in Gl. (34) liefert:

$$v_C = 6875 \text{ m/s} = 24\,750 \text{ km/h}$$

Die Periode folgt aus der Gl. $T = 2\pi a^{3/2} / (R \cdot g^{1/2})$. Mit den angegebenen Werten folgt

$$T = 9032 \text{ s} = 150 \text{ min} = 2,5 \text{ h}$$

Hyperbolische Orbits bei anziehenden Kräften (Kometen, $k > 0$, $E_i > 0$)

Alle geschlossenen Orbits (Ellipsen und Kreise) haben eine negative Gesamtenergie, wenn wir die potenzielle Energie im Unendlichen Null setzen.

Mit $E > 0$ könnte ein Körper bis ins Unendliche entweichen.

Eine Hyperbel besitzt zwei Zweige, aber bei einer anziehenden Kraft (umgekehrt proportional zur Entfernung) wird nur der Zweig beschrieben, der das Kraftzentrum einschließt (der rechte Zweig in Fig. 5.1-5). Der Pfeil markiert die Position des von oben kommenden Kometen. Das Erdzentrum befindet sich im rechten Brennpunkt. Der Winkel φ , 60° in der Figur, wird im Gegenuhrzeiger-sinn gemessen. Vgl. auch die Figuren 5.1-2, 5.1-4 und 5.1-6.

- `reset()://Hyperbel`

```

a:=2.55:
eps:=1.32://eps*a = 3.366
x:=r*cos(fi):y:=r*sin(fi)//Polarkoordinaten
r:=a*(eps^2-1)/(1-eps*cos(fi)):
orb:=plot::Polar([r,fi],fi=0..2*PI)//Hyperbel
fi2:=PI/3://60 Grad
r2:=a*(eps^2-1)/(1-eps*cos(fi2)):
x2:=r2*cos(fi2):y2:=r2*sin(fi2):
f1:=0.8526*t+2.87://Asymptote
f2:=-0.8526*t-2.87:
asympl:=plot::Function2d(f1,Color=RGB::Green,
t=-10..4):
asympt2:=plot::Function2d(f2,Color=RGB::Green,
t=-10..4):
pfeil:=plot::Arrow2d([0,0],[x2,y2],Color=RGB::Red):
plot(orb,pfeil,asympl,asympt2,ViewingBoxYRange = -
5..5,ViewingBoxXRRange=-10..4)

```

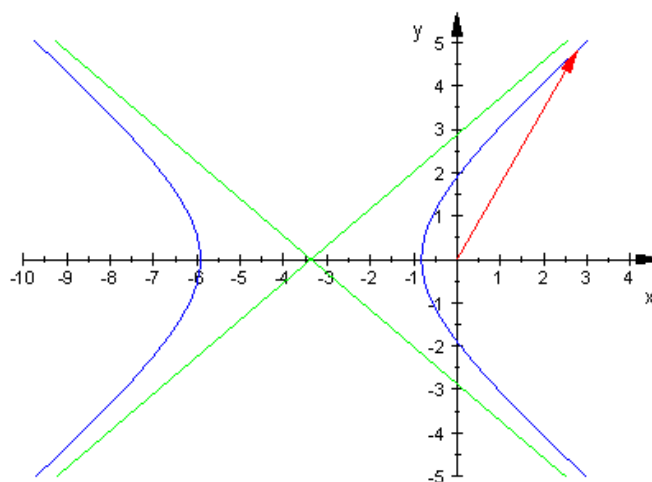


Fig.: 5.1-5

Wir gehen zurück zu Gl. (29) und bringen sie in die Form

$$r = a(\varepsilon^2 - 1)/(1 - \varepsilon \cos \varphi) \quad (36)$$

Die Werte für a und ε stehen im Programm. Aus Gl. (36) erkennen wir, dass die radiale Entfernung r unendlich groß wird, wenn $\varepsilon \cos \varphi$ gegen 1 strebt. Der Polarwinkel φ strebt dann gegen den Winkel α der Asymptote. Für α ergibt sich aus Gl. (36)

$$\cos \alpha = 1/\varepsilon \quad (37)$$

In der Figur 5.1-5 haben wir $\alpha = 40,75^\circ$, da $\varepsilon = 1.32$.

Der Schnittpunkt der Asymptoten (grün) hat von den Brennpunkten die Entfernung $e = \varepsilon \cdot a$ ($= 3.366$); $2e$ ist der Abstand der Brennpunkte.

Der linke Zweig der Hyperbel entspricht einer abstoßenden Kraft $F = -k/r^2$ mit $k < 0$. In diesem Fall sind potenzielle Energie und Gesamtenergie positiv, so dass es keine geschlossenen Bahnen geben kann.

θ ist der Winkel zwischen den Asymptoten des Eintritts und der des Wegflugs (man nennt ihn den "Streuwinkel"). Aus den Figuren 5.1-5.6 entnimmt man, dass $\theta + 2\alpha = \pi$, d.h. $\theta = \pi - 2\alpha$ ($= 98.5^\circ$ in Fig. 5.1-5).

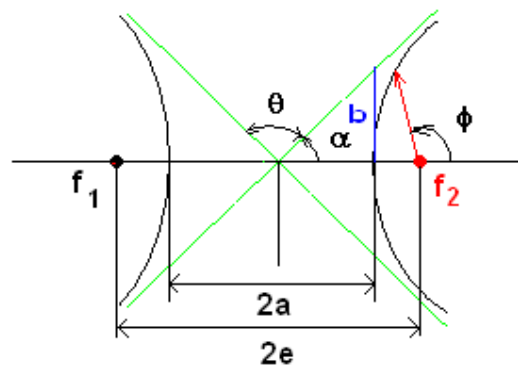


Fig.: 5.1-6

Für Kepler stand die Sonne fest im Raum. Heute wissen wir, dass sich die Sonne praktisch im Schwerpunkt CM des Systems Sonne-Planet befindet. Die Sonne bewegt sich sehr viel langsamer als irgendein Planet. Dies rechtfertigt es, sie als Bezugspunkt zu wählen, sie ist praktisch ein inertiales Bezugssystem.

Ein hypothetischer Beobachter auf der Oberfläche der Sonne M betrachtet sie als ruhend und kann die radiale Entfernung r des Planeten m wie auch dessen Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$ messen. Die Bahn, die dieser Beobachter beschreibt, nennen wir die scheinbare Trajektorie des Planeten, für die die Gleichung (28) gilt:

$$r = \frac{1}{\frac{\mu k}{L^2} + \frac{\alpha}{L} \cos \varphi}$$

Gl. (28) enthält als Spezialfall das erste Keplersche Gesetz :

Die Planeten beschreiben elliptische Bahnen mit der Sonne in einem der Brennpunkte.

Aber Gl. (28) beschreibt außer Ellipsen auch offene Bahnen wie Hyperbeln und Parabeln.

Die *wirklichen* Bahnen ergeben sich aus Gl. (28) zusammen mit der Definition der reduzierten Masse:

$$r_1 = \frac{m}{m+M} \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

$$r_2 = \frac{M}{m+M} \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

r_1 bezieht sich auf die Sonne, r_2 auf einen Planeten. Die Sonne und der Planet beschreiben ähnliche Ellipsen, beide mit dem Brennpunkt in CM.

