

4.7 Energie eines Systems von Teilchen

4.7.1 Kinetische Energie

Die kinetische Energie eines Systems von n Teilchen ist die Summe der kinetischen Energien aller Teilchen

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_k^i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad . \quad (1)$$

Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_i des i -ten Teilchens wird zerlegt in die Geschwindigkeit \mathbf{v}_c der Translation des Massenpunktes CM (mit c gekennzeichnet, vgl. 4.4.1), und seine Geschwindigkeit \mathbf{v}_i' in Bezug auf das CM:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i' \quad . \quad (2)$$

Wenn wir Gl. (2) in Gl. (1) einsetzen, erhalten wir

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i |\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i'|^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i') \quad \text{oder}$$

$$E_k = \frac{1}{2} (\sum m_i) v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \mathbf{v}_c \cdot d(\sum m_i \mathbf{r}_i')/dt \quad . \quad (3)$$

Der letzte Term ist Null, denn in 4.3.3 sahen wir, dass

$$\sum m_i \mathbf{r}_i' = \sum m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c (\sum m_i) = \mathbf{0} \quad .$$

Damit erhalten wir den folgenden Satz über die Zerlegung der kin. Energie:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 \quad . \quad (4)$$

m ist die Gesamtmasse des Systems.

Der erste Term in (4) ist die kin. Energie der Translation des Systems. Der zweite Term bedeutet die innere kin. Energie des Systems in Bezug auf CM, die wir die *innere Energie* des Systems nennen wollen.

Die mittlere kin. Energie eines Teilchens ist $E_{k,mittl.} = (\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2)/N$, worin N die Gesamtzahl der Teilchen im System bedeutet. Man bezeichnet dies auch mit $\langle E_k \rangle$.

Die Größe $\langle E_k \rangle$ wird in der Thermodynamik (bzw. stat. Mechanik) dazu benutzt, die *Temperatur* eines Systems aus N Teilchen zu definieren.

Der Term $\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$ ist in einem *starr*en System (*starrer Körper*) Null, denn ein *starrer Körper* ist ein System, in dem die Entfernung zweier beliebiger Teilchen unveränderlich ist, so dass die Teilchen keine Bewegungen in Bezug auf den Schwerpunkt CM ausführen können. Das System ist daher auch nicht verformbar. Natürlich ist ein derartiger Körper eine Idealisierung, denn alle wirklichen Körper sind verformbar. Dennoch ist es aus praktischen und theoretischen Gründen vorteilhaft, einen *starr*en Körper zu definieren, da viele Materialien praktisch nicht deformierbar sind und als starr betrachtet werden können.

Beim starren Körper gibt es dennoch eine "innere Bewegung", nämlich die *Rotation*, bei der sich alle Teilchen auf Kreisbahnen um den Massenschwerpunkt bewegen.

Um die kinetische Energie der Rotation eines starren Körpers zu berechnen, ist es nötig, die Masse durch das Trägheitsmoment und v durch ω zu ersetzen:

$$E_k^{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad , \quad (5)$$

denn die Geschwindigkeit eines Teilchens ist $v_i = \omega r_i$, mit r_i = senkrechtem Abstand von der Rotationsachse. Wir haben dann $E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \cdot \omega^2$, oder, wenn wir die Definition des Trägheitsmoments berücksichtigen, vgl. 4.3.1, $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$.

Wenn der starre Körper eine stetige Massenverteilung besitzt, müssen wir in (5) die Summe durch ein Integral ersetzen und berücksichtigen, dass $d(\mathbf{r}_i')/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, vgl. 3.5.1. Es folgt dann

$$\begin{aligned} E_k^{rot} &= \frac{1}{2} \int dm (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int dm \boldsymbol{\omega} [\mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{2} \int dm \boldsymbol{\omega} [r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})] \\ &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega} | \{ \int dm [r^2 \mathbf{E} - |\mathbf{r}\rangle\langle \mathbf{r}|] \} | \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega} | L \rangle \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir auch mit Bra und Ket schreiben

$$E_k^{rot} = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega} | I | \boldsymbol{\omega} \rangle \quad . \quad (6)$$

Beispiel 1:

Ein starrer Körper (Ellipsoid) dreht sich um eine feste Achse, die durch den Punkt A geht. Während das Massenzentrum CM einen vollen Kreis mit dem Radius a um den Punkte A beschreibt, dreht sich der auf den Körper gemalte Pfeil S einmal um CM.

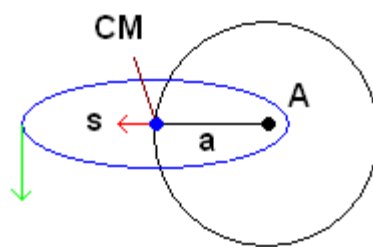


Fig. 4.7-1

Mit der Drehung um A ist die kinetische Energie

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 I_A \quad (7)$$

verbunden. Mithilfe des Satzes von Steiner (4.3.3), $I_A = I_C + m a^2$, erkennen wir, dass diese Energie aus zwei Termen besteht:

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 I_C + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \quad . \quad (8)$$

Der erste Term stellt die kinetische Energie dar, die der Körper wegen seiner Drehung um CM hat. Um den zweiten Term zu verstehen, können wir uns vorstellen, dass die Masse m des Körpers in CM konzentriert ist. Dieser "Massepunkt" beschreibt den Kreis vom Radius a mit der Geschwindigkeit $v = a \omega$ und besitzt die kinetische Energie $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$.

(Wenn wir die Argumente umkehren, erhalten wir eine einfache Methode, um die Gültigkeit des Steinerschen Satzes zu beweisen. Z.B.: die kin. Energie des Körpers besteht aus zwei Teilen: $E_k = \frac{1}{2} \omega^2 I_C + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$. Dies kann man schreiben als $E_k = \frac{1}{2} \omega^2 (I_C + m a^2) := \frac{1}{2} \omega^2 I_A$, woraus folgt $I_A = I_C + m a^2$.)

Beispiel 2:

Ein System bestehe aus 5 Teilchen.

$m_1 = 12 \text{ kg}$; $\mathbf{v}_1 = 3 \text{ m/s } \mathbf{i} + 6 \text{ m/s } \mathbf{j}$ usw.

(Die restlichen Daten stehen im Programm.)

Bestimme die kinetische Energie des Systems auf zwei Arten:

- benutze Gleichung (1): $E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$
- verwende den Satz (4): $E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$.

Lösung:

Die Teile a und b sind im Programm vermerkt.

- `reset() //Kin. Energie eines Systems`

```

u:=J://Energieeinheit ist "Joule"

n:=5:
m[1]:=12:m[2]:=8:m[3]:=6:m[4]:=4:m[5]:=20:
v[1]:=matrix([[3, 6]]):
v[2]:=matrix([[4, -5]]):
v[3]:=matrix([[3, 1]]):
v[4]:=matrix([[-14, -5]]):
v[5]:=matrix([[-12, - 5]]):
//Teil a:
ekin:=0.5*sum(m[i]*(v[i][1]^2+v[i][2]^2),i=1..n)*u;

//Teil b:

masse:=sum(m[i],i=1..n):
vc:=sum(m[i]*v[i],i=1..n)/masse;//Vektor v der
Geschw. von CM

vrel1:=abs(v[i][1]-vc[1])://rel. Geschw.
vrel2:=abs(v[i][2]-vc[2]):
Ec:=0.5*masse*linalg::scalarProduct(vc,vc)*u:
Erel:=0.5*sum(m[i]*(vrel1^2+vrel2^2),i=1..n)*u:
Ek:=Ec+Erel

```

Ergebnis:

```

2596.0 J
+-          +-
| -21/5, -41/25 |
+-          +-
2596.0 J

```

Mit Erläuterungen:

Teil a: 2596.0 J

$-21/5$ m/s **i** $-41/25$ m/s **j** (Geschw.-Vektor von CM)

Teil b: 2596.0 J

Hier folgt eine kleine Abwandlung des vorigen Programms.
Die Daten wurden in den Listen "massen" und "vel" gespeichert.
Die Größe einer Liste bestimmt man mit der Funktion **nops**, vgl. auch 3.9.3.

- ```

reset()//Kin. Energie eines Systems
u:=J//"Joule"
n:=5:
m[1]:=12:m[2]:=8:m[3]:=6:m[4]:=4:m[5]:=20:
massen:=[]//Liste der Massen
for j from 1 to n do
massen:=append(massen,m[j]):
end_for:
N1:=nops(massen)//Summe der Listenelemente
masse:=sum(massen[k],k=1..n)//Gesamtmasse
v[1]:=matrix([[3, 6]]): // vel = Geschwindigkeit
v[2]:=matrix([[4, -5]]):
v[3]:=matrix([[3, 1]]):
v[4]:=matrix([[-14, -5]]):
v[5]:=matrix([[-12, - 5]]):
vel:=[]//Liste der Geschwindigkeiten
for j from 1 to n do
vel:=append(vel,v[j]):
end_for:
N2:=nops(vel):
ekin:=0.5*sum(massen[i]*(vel[i][1]^2+vel[i][2]^2),
i=1..n)*u;
vc:=sum(massen[i]*vel[i],i=1..n)/masse;
//Geschw.vektor von CM

```

```

vrel1:=abs(v[i][1]-vc[1]):
vrel2:=abs(v[i][2]-vc[2]):
Ec:=0.5*masse*linalg::scalarProduct(vc,vc)*u:
Erel:=0.5*sum(m[i]*(vrel1^2+vrel2^2),i=1..n)*u:
Ek:=Ec+Erel

```

2596.0 J

```

+- +-
| -21/5, -41/25 |
+- +-

```

2596.0 J

Wir erhalten also wieder das vorige Ergebnis.

## 4.7.2 Potenzielle Energie

Die potenzielle Energie eines Systems aus  $n$  Teilchen können wir folgendermaßen definieren

$$E_p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = E_p(\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0) - \int \sum \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \quad (9)$$

siehe 4.5.2. Das Integral geht von  $(\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0)$  bis  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ , die Summe erstreckt sich über alle Teilchen.

$(\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0)$  und  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  sind Anfangs- und Endzustand. Die Kräfte könnten innere und äußere sein. Wir nehmen aber an, dass keine Bindungen vorhanden sind. Das bedeutet, wir nehmen an, dass das System *isoliert* ist, also keinen äußeren Kräften unterliegt. Wenn die inneren Kräfte Zentralkräfte sind, was man oft antrifft, z.B. bei Gravitation und elektromagnetischen Wechselwirkungen, so können wir sie von einem Potenzial ableiten, d.h., dass die Kraft, die das Teilchen  $k$  auf das Teilchen  $i$  ausübt, durch folgende Formel gegeben ist:

$$\vec{F}_{ik} = -\nabla_i E_{ik}^p \quad . \quad (10)$$

Das dritte Newtonsche Gesetz verlangt, dass die potenzielle Energie  $E_{ik}^p$  nur abhängig ist von der Entfernung  $r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  der Teilchen  $i$  und  $k$ .

Das Potenzial selbst erhalten wir, wenn wir das Integral in (11) auswerten:

$$E_{ik}^p(\mathbf{r}_{ik}) = E_{ik}^p(\mathbf{r}_0) - \int_{r_0}^{r_{ik}} \mathbf{F}_{ik} d\mathbf{r}_{ik} \quad (11)$$

Für die *innere potenzielle Energie* des Systems ergibt sich

$$E_p^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n E_{ik}^p(\mathbf{r}_{ik}) \quad . \quad (12)$$

In der Summe müssen wir Terme mit  $i = k$  ausschließen. Da  $E_{ik}^p = E_{ki}^p$ , ist es nötig, durch 2 zu teilen, damit die Energien nicht doppelt gezählt werden. Für die Rechnung ist es günstiger, die Summe in (12) folgendermaßen zu schreiben:

$$E_p^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{k=1}^n E_{ik}^p(\mathbf{r}_{ik}) \quad . \quad (13)$$

### Beispiel:

Wir betrachten ein isoliertes System aus 4 Teilchen, die in untereinander in Gravitationswechselwirkung stehen. Bestimme die (innere) potenzielle Energie des Systems.

### Lösung:

Die potenzielle Gravitationsenergie zwischen den Teilchen  $i$  und  $k$  ist gegeben durch  $E_{ik}^p = -G m_i m_k / r_{ik}$ .

Um das System aufzubauen, bringen wir zunächst die Teilchen 1 und 2 an ihre Stellen, ihre pot. Energie ist  $E_{12}^p = -G m_1 m_2 / r_{12}$ . Wenn wir jetzt das 3. Teilchen an seine Stelle bringen, hat das Dreiteilchensystem die interne pot. Energie

$$E^{\text{int}}_p = E^p_{12} + E^p_{13} + E^p_{23} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G \frac{m_2 m_3}{r_{23}} .$$

Beachten Sie, dass wir keine gleichen Indizes haben dürfen wie  $r_{11}$ ,  $r_{22}$  oder  $r_{33}$ .

Schließlich müssen wir das 4. Teilchen auf seinen Platz bringen. Diese Operation verlangt drei weitere Terme:

$$E^{\text{int}}_p = -G(m_1 m_2 / r_{12} + m_1 m_3 / r_{13} + m_1 m_4 / r_{14} + m_2 m_3 / r_{23} + m_2 m_4 / r_{24} + m_3 m_4 / r_{34}) .$$

Im Falle eines Zweiteilchensystems haben wir nur 1 Term:  $E^p_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$  im Ausdruck für die pot. Energie. Die *gesamte* Energie eines isolierten Zweikörpersystems ist gegeben durch

$$E = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (14)$$

mit  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ;  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  und  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ .  $\mu$  ist die *reduzierte Masse* des Systems, siehe 4.2.2.

Um die Doppelsumme (13) mit MUPAD zu berechnen, können wir eine Liste für die Massen und eine weitere für die Abstände anlegen. Die Summe selbst berechnen wir mit der Funktion `_plus`, vgl. das folgende Programm.

```

reset() :
//Pot. Energie eines Teilchensystems mit Doppelsumme

massen:=[m1,m2,m3,m4] :

n:=nops(massen)://Zahl der Elemente in der Liste

dist:=[[0,r12,r13,r14],[r12,0,r23,r24],[r13,r23,0,r34],[r14,r24,r34,0]]:

epot:=_plus(_plus(massen[i]*massen[k]/dist[i][k]
$ i=1..k-1) $ k=1..n);

```

Das Ergebnis ist

$$\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_1 m_4}{r_{14}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_2 m_4}{r_{24}} + \frac{m_3 m_4}{r_{34}}$$

Die Grenzen der 2. Summe müssen zuerst eingegeben werden.



Es kann passieren, dass die externen Kräfte, die eventuell auf das System einwirken, ebenfalls konservativ sind. In diesem Fall können wir eine Potenzialfunktion für die externe Kraft auf das Teilchen  $m_i$  berechnen. Die Gesamtenergie des Systems wäre dann

$$E = E_k + E_p^{\text{int}} + E_p^{\text{ext}} .$$

Ein Beispiel wäre ein Wasserstoffatom in einem externen Feld. Dieses Atom besteht aus einem Elektron und einem Proton. Seine Eigenenergie besteht aus der Summe der kin. Energien von Elektron und Proton sowie der inneren pot. Energie der elektrischen Wechselwirkung zwischen beiden. (Die Gravitations-WW können wir vernachlässigen.) Wenn das H-Atom isoliert ist, bleibt die Summe dieser beiden Energien konstant. Wenn das Atom sich aber in einem äußeren Feld befindet, z.B. in einem magnetischen Feld, so muss auch die externe pot. Energie bei der Berechnung der Gesamtenergie berücksichtigt werden. Diese Gesamtenergie bleibt dann konstant, wenn das Magnetfeld homogen und zeitlich konstant ist.

### 4.7.3 Potenzialkurven

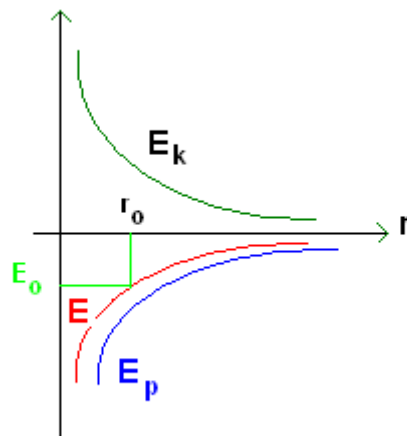


Fig.: 4.7-2

Wir können sehr viel über die Bewegung eines Teilchens sagen, wenn wir den Graphen seiner pot. Energie (Potenzialkurve) besitzen. Bereits in 4.6 haben wir einige dieser Kurven betrachtet.

In Fig. 4.7-2 sehen wir die Verläufe von  $E_k$ ,  $E_p$  und Gesamtenergie  $E$  in Abhängigkeit vom Radius  $r$  für einen Satelliten auf einer Kreisbahn.

Für jeden Radius sind die Werte von  $E_p$  und  $E$  negativ,  $E_k$  ist überall positiv. Wenn  $r$  sich dem "Unendlichen" nähert, nähern sich alle Energiekurven dem Wert Null. Ein Satellit mit der Gesamtenergie  $E_0 < 0$  beschreibt eine Kreisbahn mit Radius  $r_0$ .

Die folgende Figur zeigt die pot. Energie  $E_p(r)$  von zwei Atomen, die ein zwei-atomiges Molekül bilden, z.B.  $H_2$  oder  $HCl$ .  $r_0$  ist der Gleichgewichtsabstand.

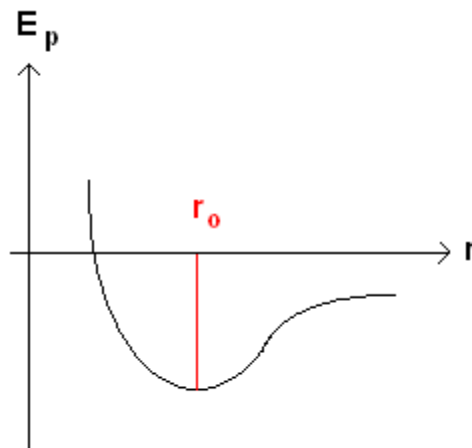


Fig.: 4.7-3

Für Abstände kleiner als  $r_0$  ist die intermolekulare Kraft abstoßend. ( $E_p(r)$  ist eine fallende Funktion und  $F = -\partial E_p/\partial r > 0$ ). Für Entfernungen, die größer als  $r_0$  sind, ist die intermolekulare Kraft anziehend ( $F = -\partial E_p/\partial r < 0$ ). Im Gleichgewichtspunkt, ist die Steigung von  $E_p(r)$  Null –auch die Kraft ist Null. Den Teil der Kurve in der näheren Umgebung von  $r_0$  nennt man *Potentialtopf*. Ein komplexes System kann mehrere Potentialtöpfe haben.

Für Schwingungen in der Nähe von  $r_0$  kann man die Potentialkurve durch eine Parabel annähern, d.h. man kann die Wechselwirkung so behandeln als wären beide Atome durch eine elastische Spiralfeder verbunden, vgl. 4.7.4.

In der wissenschaftlichen Literatur wurden viele Potenzialkurvenmodelle veröffentlicht. Es handelt sich immer um Näherungsausdrücke, so wie die bekannte (6-12)-Formel des englischen Naturwissenschaftlers J. Lennard-Jones:

$$E_p(r) = -E_{p,0} [2(r_0/r)^6 - (r_0/r)^{12}] \quad . \quad (15)$$

Beim  $O_2$ -Molekül lauten die experimentell bestimmten Werte  $E_{p,0} = 8,196 \cdot 10^{-9} \text{ J} = 5,12 \text{ eV}$  und  $r_0 = 1,207 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,1207 \text{ nm}$  (Nanometer).  $r$  = Entfernung der beiden Atomkerne

- `reset()://Lennard-Jones- Potenzial für O2`

```
Ep0:=5.12: r0:= 0.1207:
Ep:=Ep0*((r0/r)^12-2*(r0/r)^6):
plotfunc2d(Ep,r=0.1..0.15,AxisTitles=["r/nm", "Ep/
eV"],
YRange=-6..5,GridVisible=TRUE)
```

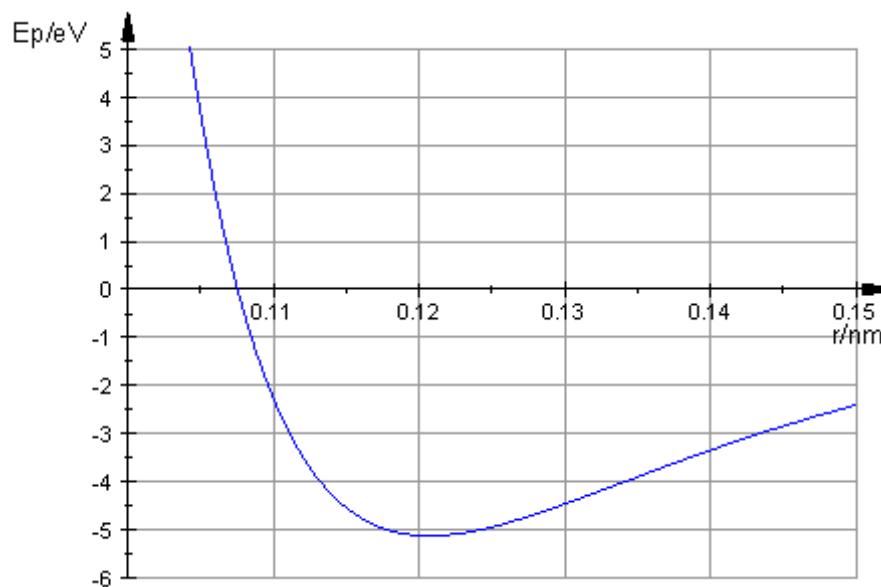


Fig.:4.7-4

In der Gleichgewichtsentfernung  $r_0 = 0.1207 \text{ nm}$  beträgt  $E_p = -E_{p,0} = -5.12 \text{ eV}$ . Diese Energie wird Dissoziationsenergie des Moleküls genannt.

#### 4.7.4 Der Phasenraum

Ein O<sub>2</sub>-Molekül verhält sich wie ein harmonischer Oszillator (3.2,6.1ff), z.B. eine Masse  $m$ , die horizontal am Ende einer Spiralfeder schwingt. Die Feder übt die Kraft  $F = -k x$  auf die Masse  $m$  aus, wenn diese sich in der Entfernung  $x$  vom Gleichgewichtspunkt befindet.  $k$  = Federkonstante.

Die Kurve der pot. Energie ist eine Parabel mit  $E_{p(x)} = \frac{1}{2} k x^2$ , denn  $F(x) = -dE_p(x)/dx = -k x$ .

Die Umkehrpunkte  $-x_0$  und  $+x_0$  werden durch die Gesamtenergie definiert

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Die Maximalgeschwindigkeit wird in dem Moment erreicht, in dem die Masse die Stelle  $x = 0$  passiert. An den Stellen  $-x_0$  und  $x_0$  kehrt  $m$  die Bewegungsrichtung um und  $E_k = 0$ . In den Umkehrpunkten ist  $E = E_k + E_p = 0 + \frac{1}{2} k x_0^2$ , d.h.  $x_0 = \pm\sqrt{(2E/k)}$ . In  $x = 0$  haben wir  $E = \frac{1}{2} m v_0^2$ , d.h.  $v_0 = \pm\sqrt{(2E/m)}$ . Immer, wenn  $m$  eine Extremlage erreicht, ist ihre Geschwindigkeit Null. Die folgende Illustration verdeutlicht die Verhältnisse.

- ```

reset()://harmonischer Oszillator
k:=10:x0:=4:
e:=k*x0^2/2://Gesamtenergie
Ep:=k*x^2/2:
Ek:=e-Ep:
F:=-diff(Ep,x)//Federkraft auf m
plotfunc2d(e,Ep,Ek,F,
x=-5..5,AxisTitles=["x","Energie"],GridVisible=TRUE)

```

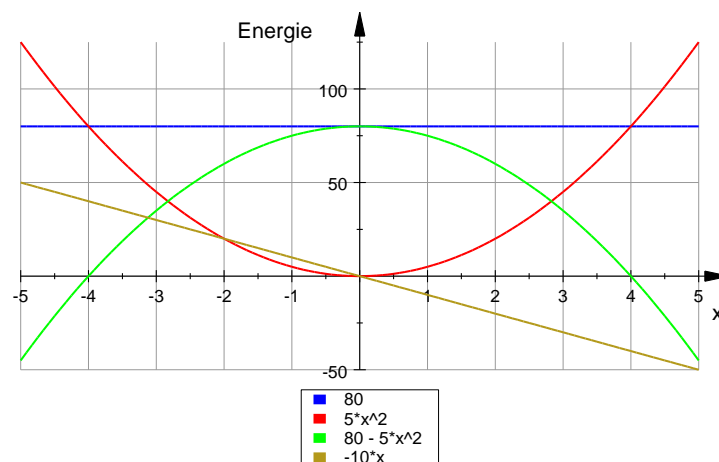


Fig.:4.7-5

Die Kraft $F(x) = -dE_p/dr$ ($\mathbf{F} := -\text{diff}(E_p, \mathbf{x})$) wird von der Ursprungsgeraden $F(x) = -10x$ dargestellt. Der Teil unter der pos. x-Achse bedeutet Anziehung, die pos. F-Werte links vom Ursprung stellen die Abstoßung dar. Die Bewegung geschieht zwischen $x = -4$ und $x = 4$. Es sind die Stellen, an denen $E_k = 0$ und $E = E_p$.

An einer beliebigen Stelle x zwischen $-x_0$ und x_0 hat m die Geschwindigkeit $v = v_0 (1 - (x/x_0)^2)^{1/2}$ oder auch

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = 1 \quad (16)$$

Mit diesem Ergebnis können wir eine Kurve zeichnen, die die Beziehung zwischen den beiden Variablen x und v anschaulich darstellt.

- `reset()://harmonischer Oszillator`
`k:=10:x0:=4:m:=80:`
`v0:=k*x0^2/m:`
`ellipse:=(x/x0)^2+(y/v0)^2-1:`
`plot(plot::Implicit2d(ellipse, x = -4..4,`
`y = -2..2),AxesTitles=["x","v"])`

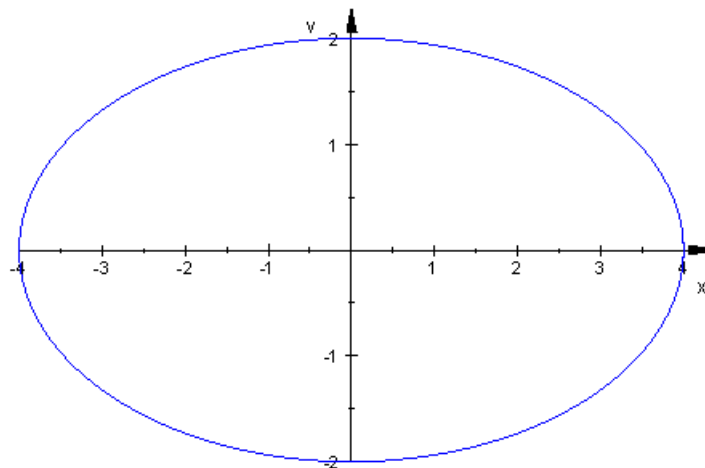


Fig.:4.7-6

Gl. (16) beschreibt die Geschwindigkeit in Funktion der Lage der Masse. Die Ellipse stellt die *Phase* des Oszillators dar. Jeder Punkt $P(x,v)$ der Ellipse ist ein "Bild" der Bewegung.

Ein Vorteil dieser figurativen Darstellung des realen Systems (Masse + Feder) besteht auch darin, dass sich eine eventuelle Störung der Bewegung leicht erkennen lässt. Der geometrische Raum, in dem die Kurve gezeichnet ist, heißt auch *Phasenraum*.

Die Fläche der Phasenellipse beträgt $A = \pi x_0 v_0 = E \cdot T/m$. T ist die Periode der Schwingung (vgl. das nächste Kapitel). Dieser Ausdruck reduziert sich auf $A = E \cdot T$, wenn wir den Impuls $p = m v$ in Funktion von x auftragen. In diesem Fall erhalten wir anstelle von (16) die folgende Gleichung für die Phasenellipse:

$$\frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{p^2}{2mE} = 1 \quad (17)$$

Die Phasenellipsen wachsen mit der Gesamtenergie des Oszillators. Da E jeden Wert (in einem gewissen Bereich) annehmen kann, kann die p - x -Ebene dicht mit Phasenebenen belegt werden. Dies gilt nicht für ein diatomares Molekül wie HCl , O_2 usw., da für Quantensysteme keine kontinuierlich verteilten Energien existieren; die Energie ist hier diskret (quantifiziert) verteilt.

Für einen Quantenoszillator gibt es nur die folgenden Energiewerte:

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) h f, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (18)$$

$h = 6,636 \cdot 10^{-34}$ Js ist die Planck'sche Konstante; f = Oszillatorfrequenz.

Setzt man (18) in $A = E \cdot T$ ein, so sehen wir, dass es nur Ellipsen mit den folgenden Flächen gibt:

$$A(E_n) = \frac{1}{2} h, \quad \frac{3}{2} h, \quad \frac{5}{2} h, \quad \text{etc.} \quad (19)$$

Die kleinstmögliche Ellipse in der x - p -Ebene hat die Fläche $A(E_0) = h/2 = 3,313 \cdot 10^{-34}$ Js.

4.7.5 Mit Bleistift und Papier

Bei der Betrachtung einer Potenzialkurve fällt uns sofort auf, ob ein System Schwingungen um einen Gleichgewichtspunkt ausführen kann oder nicht.

Was wir nicht ohne zusätzliche Rechnungen erschließen können ist die Periodendauer T . Aber mithilfe der in 4.7.4 gegebenen Informationen (Energiesatz) können wir folgendes ableiten

$$v = dx/dt = [2(E-E_p(x))/m]^{1/2}, \text{ woraus sich ergibt}$$

$$\frac{T}{2} = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}}$$

Die Integration ergibt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (20)$$

$$\left(\int dx/(x_0^2-x^2)^{1/2} = [\sin^{-1}(x/x_0)] = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) = \pi\right).$$

T ist unabhängig von der Amplitude x_0 , was bedeutet, dass T nicht von der Gesamtenergie E abhängig ist. Wenn wir aus der Potentialkurve auch ablesen können, dass die Bewegung periodisch ist, so wissen wir doch nicht, ob sie streng sinus- oder kosinusförmig ist. Aber wir können die obige Beziehung $v = dx/dt = [2(E-E_p(x))/m]^{1/2}$ erneut integrieren und bestätigen, dass x von folgender Gestalt ist: $x = A \cos(\omega t + c)$. Wir nehmen an, dass das Teilchen seine Bewegung in $t = t_0$ in $x = x_0$ beginnt.

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{x_0^2 - x'^2}} = \text{sen}^{-1} \frac{x}{x_0} - \text{sen}^{-1}(1) = \text{sen}^{-1} \frac{x}{x_0} - \frac{\pi}{2}$$

D.h. $\sin^{-1}(x/x_0) = (t-t_0)(k/m)^{1/2} + \pi/2$. Wir werden eine Kosinusfunktion benutzen, die sich von einer Sinusfunktion ja nur um $\pi/2$ in der Anfangsphase unterscheidet:

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) \quad (21)$$

Wir wählen $t_0 = 0$ und $(k/m)^{1/2} = 2\pi/T := \omega$ und erhalten schließlich

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad . \quad (22)$$

Wir kommen in Kapitel 6 ausführlich auf die Untersuchung von Schwingungen zurück. Bis dahin lohnt es sich aber, nochmals die Untersuchungen an einem Pendel in 3.2 zu studieren, die wir mithilfe verschiedener Animationen ausgeschmückt hatten.