

## 4.6 Das Gradientenvektorfeld

In diesem Paragraphen werden wir sehen, warum wegunabhängige Vektorfelder auch *konservativ* genannt werden. Es zeigt sich nämlich, dass dann, wenn ein Teilchen sich unter dem Einfluss eines konservativen Vektorfeldes bewegt, seine Gesamtenergie erhalten bleibt.

Das Kraftfeld erhält man dann als *Gradient* einer *Potentialfunktion*, vgl. auch das vorige Kapitel.

### 4.6.1 Der Gradient von $\Phi$ (Fortsetzung von 4.5)

Die Arbeit, die  $\mathbf{F}$  während einer Verschiebung  $d\mathbf{r}$  verrichtet, ist gleich  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Dieses Skalarprodukt werden wir auch folgendermaßen schreiben:  $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ , denn  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$  und  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ .

Die Gesamtarbeit, die bei der Bewegung eines Teilchens von Punkt 1 bis Punkt 2 entlang der Kurve C verrichtet wird, ist gegeben durch

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (1)$$

Das Integral ist ein Linienintegral, das i.Allg. von der Form des Weges abhängig ist. Wenn aber  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  ein exaktes (oder totales, vollständiges) Differential  $d\Phi$  einer skalaren Funktion  $\Phi(x,y,z)$  ist, erhalten wir

$$W_{12} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (2)$$

Eine Differentialform  $Pdx + Qdy + Rdz$  ist ein exaktes Differential der Koordinaten  $x, y, z$ , wenn gilt:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad (3)$$

Die partiellen Ableitungen können wir auch folgendermaßen schreiben:  $D_x Q(x,y,z) = \partial Q / \partial x$ . Anstelle von  $D_x, D_y, D_z$  schreibt man auch  $D_1, D_2, D_3$ .

Wir können formulieren:

**Definition:**

Der Differentialausdruck  $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$  heißt *exakt*, wenn es eine Funktion  $\Phi(x,y,z)$  gibt, derart, dass  $\partial\Phi/\partial x = P$ ,  $\partial\Phi/\partial y = Q$  und  $\partial\Phi/\partial z = R$ .

Wenn  $\Phi$  existiert, dann gilt:

$$d\Phi = \partial\Phi/\partial x \cdot dx + \partial\Phi/\partial y \cdot dy + \partial\Phi/\partial z \cdot dz \quad (4)$$

Aus  $d\Phi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$  folgt

$$F_x = \partial\Phi/\partial x, F_y = \partial\Phi/\partial y, F_z = \partial\Phi/\partial z \quad (5)$$

Man kann sagen, dass  $\mathbf{F}(x,y,z) = \partial\Phi/\partial x \mathbf{i} + \partial\Phi/\partial y \mathbf{j} + \partial\Phi/\partial z \mathbf{k}$  sich aus der Anwendung eines Operators auf  $\Phi$  ergibt. Nämlich des Vektoroperators  $\nabla$  "Nabla" oder **grad** (Gradient).

Der Operator Nabla wird im Englischen "Del" genannt, obgleich er kein großes Delta ist. (Der Operator hat die Gestalt eines alten Musikinstruments, das im Hebräischen "Nabla" heißt.) In kartesischen Koordinaten lautet Nabla wie folgt:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\mathbf{k}} \quad (6)$$

Wir werden aber bei der Bezeichnung "grad" bleiben:  $\text{grad} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

oder auch  $\text{grad} = (D_1, D_2, D_3)$ . Dann ist  $\text{grad } \Phi = (D_1\Phi, D_2\Phi, D_3\Phi)$  und

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \text{grad } \Phi(x,y,z). \quad (7)$$

Ich hatte schon erwähnt, dass man  $\Phi$  in der Physik mit einem Minuszeichen definiert, d.h.

$$\Phi(\mathbf{r}) := -E_p(\mathbf{r}) \quad (8)$$

weil man der Funktion  $\Phi(\mathbf{r})$  dann eine physikalische Bedeutung beilegen kann.

**Beispiel:**

Für ein Teilchen der Masse  $m$  nahe der Erdoberfläche gilt

$$\Phi(\mathbf{r}) := - E_p(\mathbf{r}) = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \quad \text{mit } \mathbf{g} = (0, 0, -g).$$

Die Gravitationskraft ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \text{grad } \Phi(\mathbf{r}) = - \text{grad } E_p(\mathbf{r}) = m \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (g_x x + g_y y + g_z z) \\ &= m(g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k}) = -mg \mathbf{k} \end{aligned}$$

Im Energieerhaltungssatz der Mechanik (4.5.2., Gl.(9)) haben wir das Integral

$$W' = - \int_a^b \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}, \quad (9)$$

das die Arbeit bedeutet, die *gegen* das Kraftfeld verrichtet wird.

$W = -W'$  ist die Arbeit des Feldes. Mit  $\mathbf{F} = \text{grad } \Phi = - \text{grad } E_p$  erhalten wir

$$E_p(\mathbf{r}) - E_p(\mathbf{r}_0) = W' = \int \text{grad } E_p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \text{worin das Integral von } \mathbf{r}_0 \text{ bis } \mathbf{r} \text{ geht.}$$

Das besagt, dass die gegen das Feld (unendlich langsam = quasistatisch) verrichtete Arbeit gleich ist der Differenz der potenziellen Energien in den Punkten  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}_0$ .

Wenn wir  $E_p(\mathbf{r}_0) := 0$  festlegen, können wir sagen:

$$E_p(\mathbf{r}) = \text{gegen das Feld verrichtete Arbeit beim Transport eines Teilchens von } \mathbf{r}_0 \text{ nach } \mathbf{r}.$$

Wenn  $\mathbf{F}$  ein konservatives Feld ist, bleibt die mechanische Energie konstant, d.h.

$$dE/dt = 0 \quad \text{mit } E = mv^2/2 + E_p(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Diese bedeutsame Aussage können wir folgendermaßen beweisen:

Aus (10) folgt  $dE/dt = d[mv^2/2 + E_p(\mathbf{r})]/dt = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} + \text{grad } E_p)$ , denn

$$dE_p/dt = \frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot dx/dt + \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot dy/dt + \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot dz/dt = \text{grad } E_p \cdot \mathbf{v}$$

Somit gilt:  $dE/dt = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} + \text{grad } E_p) = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} - \mathbf{F}) = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} - m\mathbf{a}) = 0$ .

Dieses Ergebnis erklärt endlich den Gebrauch des Begriffes *konservativ* für eine Kraft, deren Linienintegral unabhängig ist vom Integrationsweg.

Wie aber können wir feststellen, ob eine Kraft Gradient einer Potentialfunktion ist oder nicht?

Es gibt ein sehr einfaches Verfahren, mit dem sich feststellen lässt, ob ein Vektorfeld wegunabhängig ist oder nicht.

Für diesen Test müssen wir ein neues Vektorfeld definieren: das *Rotationsfeld* "rot" des gegebenen Feldes  $\mathbf{F}$ . Dieses neue Feld definiert man folgendermaßen:

$$\text{rot } \mathbf{F} = (\partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z) \mathbf{i} + (\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x) \mathbf{j} + (\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y) \mathbf{k} \quad (11)$$

-falls die partiellen Ableitungen existieren...

Das Rotationskriterium für Vektorfelder in  $\mathbb{R}^3$  lautet:

$$\text{Das Linienintegral } \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ ist wegunabhängig, wenn } \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Gl. (11) lässt sich leichter merken, wenn wir folgende mnemonische Determinantenschreibweise benutzen:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ D_x & D_y & D_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} := \nabla \times \bar{\mathbf{F}} \quad (13)$$

Die explizite Form lautet:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= (D_y F_z - D_z F_y) \mathbf{i} + (D_z F_x - D_x F_z) \mathbf{j} + (D_x F_y - D_y F_x) \mathbf{k} \quad (14) \\ &= (\partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z) \mathbf{i} + (\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x) \mathbf{j} + (\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Für eine Funktion im  $\mathbb{R}^2$  bedeutet die Bedingung  $\text{rot } \mathbf{F}(x,y) = \mathbf{0}$  einfach  $\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y = 0$ , denn in diesem Fall sind die anderen Terme Null.

Es gibt ein weiteres Feld, das sich aus  $\mathbf{F}$  mithilfe von partiellen Ableitungen bilden lässt. Es handelt sich um das skalare *Divergenzfeld*  $\text{div } \mathbf{F}$ , das folgendermaßen definiert ist:

$$\text{div } \mathbf{F} = \partial F_x / \partial x + \partial F_y / \partial y + \partial F_z / \partial z := \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (15)$$

Wir werden einige **Beispiele** betrachten.

1. Für das Feld  $\mathbf{F}(x,y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= (\partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z) \mathbf{i} + (\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x) \mathbf{j} + (\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y) \mathbf{k} \\ &= (\partial 0 / \partial y - \partial x / \partial z) \mathbf{i} + (\partial (-y) / \partial z - \partial 0 / \partial x) \mathbf{j} + (\partial x / \partial x - \partial (-y) / \partial y) \mathbf{k} \\ &= 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + (1 - (-1)) \mathbf{k} = 2 \mathbf{k} \end{aligned}$$

2.  $\mathbf{F}$  sei ein radiales Feld:  $\mathbf{F}(x,y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$ . Hier folgt:

$$\text{rot } \mathbf{F} = (\partial 0 / \partial y - \partial y / \partial z) \mathbf{i} + (\partial x / \partial z - \partial 0 / \partial x) \mathbf{j} + (\partial y / \partial x - \partial x / \partial y) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

3. Es sei gegeben  $\mathbf{F}(x,y,z) = e^z \mathbf{i} + 2xy^2z \mathbf{j} + (x^2z + y) \mathbf{k}$ . Also folgt:

$$\text{rot } \mathbf{F} = (1 - 2xy^2) \mathbf{i} + (e^z - 2xz) \mathbf{j} + (2y^2z - 0) \mathbf{k}$$

MuPAD berechnet dies so:

```

• u := ([e^z, 2*x*y^2*z, x^2*z+y]) :
v := ([x, y, z]) :
linalg::curl(u,v) : // curl ist die Rotation

```

$$\begin{pmatrix} -2 \cdot x \cdot y^2 + 1 \\ e^z \cdot \ln(e) - 2 \cdot x \cdot z \\ 2 \cdot y^2 \cdot z \end{pmatrix}$$

4. Sei  $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

Zeige, dass

$$\text{grad } f = - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = - \mathbf{r} / r^3$$

Lösung:

$$\text{grad } f = \partial f / \partial x \mathbf{i} + \partial f / \partial y \mathbf{j} + \partial f / \partial z \mathbf{k},$$

$\partial f / \partial x = -1/2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -x / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ ; die anderen Ableitungen geben ähnliche Ergebnisse.

MuPAD erzeugt natürlich denselben Vektor, den die manuelle Rechnung ergibt:

$$\mathbf{u} := ((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}) :$$

$$\mathbf{v} := ([x, y, z]) :$$

$$\text{linalg} : \text{grad}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Wenn  $\Phi(x, y, z) = GM/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = GM \cdot f(x, y, z)$ , dann folgt

$$\text{grad } \Phi = -GM/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

Wenn wir diese Gleichung mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz vergleichen (siehe 4.5.3, Gl.(11)), stellen wir fest, dass

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \text{grad } \Phi(x, y, z)$$

Also ist  $\mathbf{F}$  konservativ, und  $\Phi$  ist ein Potential für  $\mathbf{F}$ .

5. Schauen wir uns nochmals  $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$  aus (4.5.5) an, die wir als nicht-konservativ erkannten, denn die Arbeit hängt vom Weg ab.

Wir können jetzt mithilfe der Rotation leichter zeigen als in 4.5.20, dass  $\mathbf{F}$  keine Potenzialfunktion besitzt. Wegen Gl. (14) haben wir nur zu zeigen, dass  $\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y \neq 0$ .

Da  $\partial F_y / \partial x = 2x$  und  $\partial F_x / \partial y = 2y$ , sehen wir, dass  $\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y \neq 0$ . Das bedeutet, dass  $\mathbf{F}$  kein Gradientenfeld sein kann.

6. In diesem Beispiel werden wir sehen, wie man für ein konservatives Kraftfeld  $\mathbf{F}$  die zugehörige Potenzialfunktion finden kann.

Im Paragraph 4.5.5 sagten wir, dass  $\mathbf{F}(x,y) = 1/y \mathbf{i} - x/y^2 \mathbf{j}$  ein konservatives Feld sei. Wir beweisen zunächst, dass diese Behauptung stimmt, dann suchen wir eine Potenzialfunktion.

a.  $\mathbf{F}$  ist konservativ, wenn  $\partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 0$ .

Da  $\partial F_x/\partial y = -1/y^2$  und  $\partial F_y/\partial x = -1/y^2$ , folgt, dass  $\mathbf{F}$  ein Gradient ist -und damit konservativ ist.

b. Eine Potenzialfunktion  $\Phi(x,y)$  genügt der Gleichung  $\mathbf{F}(x,y) = \text{grad } \Phi(x,y)$ . Wir verfahren wie im vorigen Beispiel:  $\partial\Phi/\partial x = 1/y$  und  $\partial\Phi/\partial y = -x/y^2$ .

Integration von  $\partial\Phi/\partial x$  ergibt  $\Phi(x,y) = x/y + C(y)$ , worin  $C(y)$  eine Funktion von  $y$  ist –unabhängig von  $x$ . Ableitung von  $\Phi(x,y)$  in Bezug auf  $y$  und Berücksichtigung von  $\partial\Phi/\partial y = -x/y^2$  ergibt

$$\partial\Phi/\partial y = -x/y^2 + C'(y) = -x/y^2.$$

Daraus folgt  $C'(y) = 0$  und  $C(y) = \text{konst.}$

Die gesuchte Potenzialfunktion lautet also  $\Phi(x,y) = x/y + \text{konst.}$

Das folgende **Programm** enthält die Rechenschritte aus den vorigen Beispielen. Man hat nur die Ausdrücke von  $F_x$  und  $F_y$  einzufügen, und das Programm bestimmt anschließend die Potenzialfunktion – falls eine existiert, sonst wird "False" angezeigt.

### Beispiel:

Gegeben ist das Vektorfeld  $\mathbf{F}(x,y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ .

Zeige, dass  $\Phi(x,y) = (x^2 + y^2)/2 + \text{konst.}$  (das Programm zeigt die Konstante nicht).

- ```

fx(x,y) := x:
fy(x,y) := y:
fxy := diff(fx(x,y), y) // ∂Fx/∂y
fyx := diff(fy(x,y), x) :
bool(fxy=fyx) ;
phi := int(fx(x,y), x) ;
phiy := diff(phi, y) :
h1 := fy(x,y) - phiy:
h := int(h1, y)

```

TRUE

$$\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{y^2}{2}$$

Es existiert eine Potenzialfunktion und lautet  $\Phi(x,y) = x^2/2 + y^2/2 + \text{konst.}$

Wende das Programm auf die folgenden Felder an:

$$\mathbf{F}(x,y) = (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) / (x^2 + y^2) \quad \rightarrow \Phi(x,y) = \ln(x^2 + y^2)/2 + \text{konst.}$$

$$\mathbf{F}(x,y) = 2xy \mathbf{i} + xy \mathbf{j} \quad \rightarrow \text{False, } \mathbf{F} \text{ kann kein Gradientenfeld sein.}$$

$$\mathbf{F}(x,y) = 2x \cos(y) \mathbf{i} - x^2 \sin(y) \mathbf{j} \quad \rightarrow \Phi(x,y) = x^2 \cos(y) + \text{konst.}$$

#### 4.6.2 Zentralkräfte ( $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{r}/r$ , vgl. 4.5- 10)

Jedes Zentralkraftfeld ist konservativ, und seine potenzielle Energie  $E_p = E_p(r)$  hängt nur vom Betrag von  $\mathbf{r}$  ab.

Jeder Weg in einem Zentralfeld kann durch eine Folge von abwechselnd radialen und tangentialen Wegstücken angenähert werden.

Entlang der radialen Verschiebungen haben wir  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F(r) \mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0, r} F(r') dr'$ . Entlang der tangentialen Verschiebungen gilt  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ , was bedeutet, dass auf den tangentialen Wegstücken keine Arbeit vom Zentralkraftfeld verrichtet wird.



Daher hängt die potenzielle Energie nur vom Betrag des Ortsvektors  $r$  ab. Mit der Normierung  $E_p(r_0) = E_p(r_0) = 0$  können wir die potenzielle Energie mithilfe der schon bekannten Formel

$$E_p(r) = - \int_{r_0}^r \mathbf{F}(r') dr' \quad (16)$$

berechnen (4.5- 4).

Daraus ergibt sich, dass alle Zentralkräfte konservativ sind, d.h. sie können als Gradienten dargestellt werden.

Dies können wir auch analytisch zeigen, denn der Gradient einer Funktion des Betrages von  $r$  ist

$$\text{grad } f(r) = df(r)/dr \mathbf{r}^0 \quad (17)$$

Wenn wir (16) ableiten, ergibt sich  $dE_p(r)/dr = -F(r)$ , und wenn wir  $E_p(r)$  statt  $f(r)$  setzen, erhalten wir aus Gl. (17)

$$\text{grad } E_p(r) = -F(r) \mathbf{r}^0 = -F(r) \mathbf{r}/r \quad (18)$$

In dem wichtigen Spezialfall der *Gravitationskraft* haben wir  $F(r) = -GmM/r^2$ . Die Gravitationskonstante hat den Wert  $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ .

Um die potenzielle Energie zu erhalten, ist es nur nötig, Gl. (16) anzuwenden:

$$E_p(r) = E_p(r_0) + GmM \int_{r_0}^r (1/r')^2 dr' = E_p(r_0) + GmM [1/r_0 - 1/r]$$

Üblicherweise wählt man  $r_0 = \infty$  mit  $E_p(\infty) = 0$ . Mit dieser Festsetzung ergibt sich

$$E_p(r) = -GmM/r \quad (19)$$

(Mit  $\text{grad } (1/r) = -\mathbf{r}/r^3$  können wir schreiben  $\text{grad } E_p(r) = -GmM \mathbf{r}/r^3$ , was erneut das Newtonsche Gravitationsgesetz ist.)

$W_{\text{Feld}} = -E_p(r)$  ist die Arbeit des Gravitationsfeldes, wenn es eine Masse  $m$  aus dem Unendlichen bis an eine Stelle mit dem Abstand  $r$  vom Zentrum bringt.

Wir können auch sagen:  $W_{\infty} = GmM/r$  ist die Arbeit, die wir aufwenden müssen, um die Masse  $m$  aus der Entfernung  $r$  bis ins Unendliche zu transportieren. Man nennt  $W_{\infty}$  auch die *Fluchtenergie* (Ablösearbeit oder Ionisationsenergie in der Atomphysik).

Die Gesamtenergie eines Teilchens in der Entfernung  $r$  vom Zentrum beträgt  
 $E = E_k + E_p(r)$  oder

$$mv^2/2 + (-GmM/r) = E \quad (20)$$

Wenn  $E$  Null wäre, hätte die Geschwindigkeit  $v$  in  $r$  den Wert

$$v = (2GM/r)^{1/2} \quad (21)$$

Diese Geschwindigkeit vermindert sich mit der Entfernung, und wenn das Projektil das "Unendliche" erreicht hat, wird es stehen bleiben, da seine Geschwindigkeit "dort oben" Null sein wird. (Das wird natürlich eine Weile dauern, denn Unendlich ist ganz schön weit.)

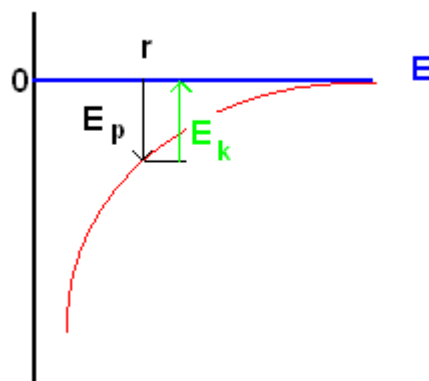


Fig.: 4.6.-1

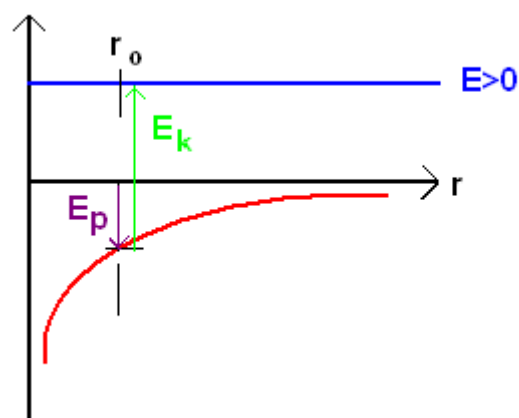


Fig.: 4.6-2

Die Abbildung 4.6-1 mit  $E = 0$  zeigt, dass im Unendlichen  $E_k$  und  $E_p$  beide Null sein werden. Abbildung 4.6-2 zeigt den Fall  $E > 0$ . Das Teilchen wird nicht zur Ruhe kommen.

Wenn ein Projektil von der Erdoberfläche nach oben geschossen wird, braucht es eine Anfangsgeschwindigkeit von  $v = 11,2$  km/s, um die Erde zu verlassen (*Fluchtgeschwindigkeit*). ( $M = 5,98 \cdot 10^{24}$  kg,  $R_{\text{Erde}} = 6,37 \cdot 10^6$  m)

Auf dem Mond braucht es nur 2,38 km/s (ungefähr).

### Aufgabe:

Ein Asteroid, der sich der Erde nähert, kann näherungsweise als ein nach unten geschossenes Projektil angesehen werden. Wir nehmen an, dass der Asteroid eine Geschwindigkeit von 12 km/s in Bezug auf die Erde hat, wenn er sich in 10 Erdradien Entfernung vom Erdzentrum befindet ( $r = 10R$ ). Vernachlässige den Einfluss der Erdatmosphäre auf den Asteroiden, und berechne seine Geschwindigkeit unmittelbar vor dem Aufschlag ( $v_{\text{End}}$ ).

### Lösung:

Die Gesamtenergie des Systems Erde-Asteroid ( $M-m$ ) bleibt beim Fall erhalten, d.h.:

$$E_{k,\text{End}} + E_{p,\text{End}} (R) = E_{k,\text{Beginn}} + E_{p,\text{Beginn}} (10R)$$

$$m v_{\text{End}}^2/2 - GmM/R = m v_{\text{Beginn}}^2/2 - GmM/(10R)$$

Die Masse des Asteroiden kürzt sich weg. Nach einigen Umformungen erhalten wir  $v_{\text{End}} = 16$  km/s.

Wenn der Asteroid nur 5m Durchmesser hat, könnte der Aufschlag fast soviel Energie freisetzen wie die Atombombe in Hiroshima. Der Aufschlag eines Asteroiden von 500 m Durchmesser könnte das Ende der Zivilisation bedeuten und vielleicht die menschliche Rasse auslöschen.

Ist es nicht besorgniserregend, zu wissen, dass ca. eine Million derartiger "Bomben" sich nahe der Erdumlaufbahn aufhalten?

### 4.6.3 Beispiele

Wenn wir wissen, dass  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  unabhängig ist vom Weg (in diesem Fall haben wir  $\partial F_x / \partial y = \partial F_y / \partial x$ ), können wir einen "guten Weg" aussuchen und das Integral auswerten. Wir sahen, z.B., dass  $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  nicht vom Weg abhängt, und dass man, um von  $(x_0, y_0)$  nach  $(x, y)$  zu gehen, zuerst von  $(x_0, y_0)$  nach  $(x, y_0)$  gehen kann und dann von  $(x, y_0)$  bis  $(x, y)$ :

- `f:=t:`  
`phi:=int(f, t=x0..x)+int(f, t=y0..y)`

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}$$

d.h.:  $\Phi(x,y) = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0,x} t \, dt + \int_{y_0,y} t \, dt = x^2/2 + y^2/2 + \text{konst.}$   
Dies ist dasselbe Resultat, das wir in 4.6.1 erhielten.

Für das Feld  $\mathbf{F} = 2x \cos(y) \mathbf{i} - x^2 \sin(y) \mathbf{j}$  benutzen wir

- `phi:=int(2*t*cos(y), t=0..x)-int(x^2*sin(t), t=0..y)`

$$x^2 \cdot \cos(y)$$

In diesem Fall beginnen wir mit der Integration im Ursprung. Wieder erhalten wir dasselbe Ergebnis, das wir schon mit einem anderen Verfahren erhalten hatten.

Wir fügen zum Schluss dieses Abschnitts einige Programme zu unserem Thema an.

- `reset() //Gradient von Zentralpotenzialen`

```
//mit kartesischen Koordinaten
export(linalg):
r:=sqrt(x^2+y^2+z^2):
g1:=grad(r, [x,y,z]):
g2:=grad(1/r, [x,y,z]):
```

- `reset()://Gradient von Zentralpotenzialen`  
`//mit sphärischen Koordinaten`  
  
`/*Die Ergebnisse müssen mit dem radialen`  
`Einheitsvektor multipliziert werden. */`  
  
`export(linalg):`  
`g1:=grad(r,[r,theta,phi])[1]:`  
`Simplify(g1);`  
`g2:=grad(1/r,[r,theta,phi])[1]:`  
`Simplify(g2);`  
`g3:=grad(F(r),[r,theta,phi])[1]:`  
`Simplify(g3);`  
`g4:=grad((1+a*r/2)*e^(-a*r)/r,[r,theta,phi])[1]:`  
`Simplify(g4);`

#### 4.6.4 Die Potenzialfläche des Systems Erde-Mond

Zur Illustration des Gravitationsfeldes einer Masse  $M$  können wir  $E_p(r)$  durch eine Oberfläche darstellen, die über der  $x$ - $y$ -Ebene liegt. D.h. wir können jedem Punkt  $(x,y)$  eine Koordinate  $E_p(r) = -GM/(x^2 + y^2)^{1/2}$  im Raum  $E_p$ - $x$ - $y$  zuordnen. Die Gesamtheit dieser Punkte ist die Fläche der potenziellen Energie (Potential-Fläche). Das Unbequeme an dieser Darstellung ist die Tatsache, dass sie nicht nur von  $M$  sondern auch von  $m$  abhängt.

Man benutzt daher eine weitere Größe, um das Gravitationsfeld darzustellen, und zwar die Größe *Gravitationspotenzial*  $V$ , die man wie folgt definiert:

$$V := E_p(r)/m = -GM/r := - C/r \quad (22)$$

mit  $C := GM$ .

Das *Gravitationspotenzial* im Punkt  $P = (x,y,z)$  ist also die potenzielle Energie einer Masse  $m = 1\text{kg}$  (Einheitsmasse) in demselben Punkt  $P$ . Das Gravitationspotenzial wird daher in  $\text{J/kg}$  oder in  $\text{MJ/kg}$  (Megajoule/kg) gemessen. Auf der Erdoberfläche beträgt das Potenzial  $-62,565 \text{ MJ/kg} = -62,656 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ . (Auf der Mondoberfläche beträgt es nur  $-2,821 \text{ MJ/kg}$ .)

Das Potenzial des Systems *Erde-Mond* in einem Punkt P erhält man einfach durch skalare Addition der Potenziale von Erde und Mond:  $V = V_E + V_M = -G(M_E/r_E + M_M/r_M)$ . Hierin bedeuten:  $M_E$  = Erdmasse,  $M_M$  = Mondmasse,  $r_E$  = Entfernung des Punktes P von der Erde,  $r_M$  = Entfernung P – Mond. Die numerischen Werte sind  $M_E = 5,974 \cdot 10^{24}$  kg und  $M_M = 7,348 \cdot 10^{22}$  kg. Wir nehmen an, dass der Mond sich in der mittleren Entfernung von  $x_m = 60 \cdot R_E$  befindet mit  $R_E = 6,37 \cdot 10^6$  m.

```

• reset();//Potenzialfläche des Systems Erde-Mond.

e1:=62.5:// = G M_E

e2:=7.75:// = 10 ·G M_M

xm:=60:ym:=0://xm =60 ·R_E

a:=10:b:=70:c:=10:d:=10:

f(x,y):=-e1/sqrt(x^2+y^2)-e2/sqrt((xm-x)^2+(ym-y)^2):

flaeche:=plot::Surface([x,y,2*f(x,y)],x=-a..b,y=-c..d):

plot(flaeche,Scaling=Constrained)

```

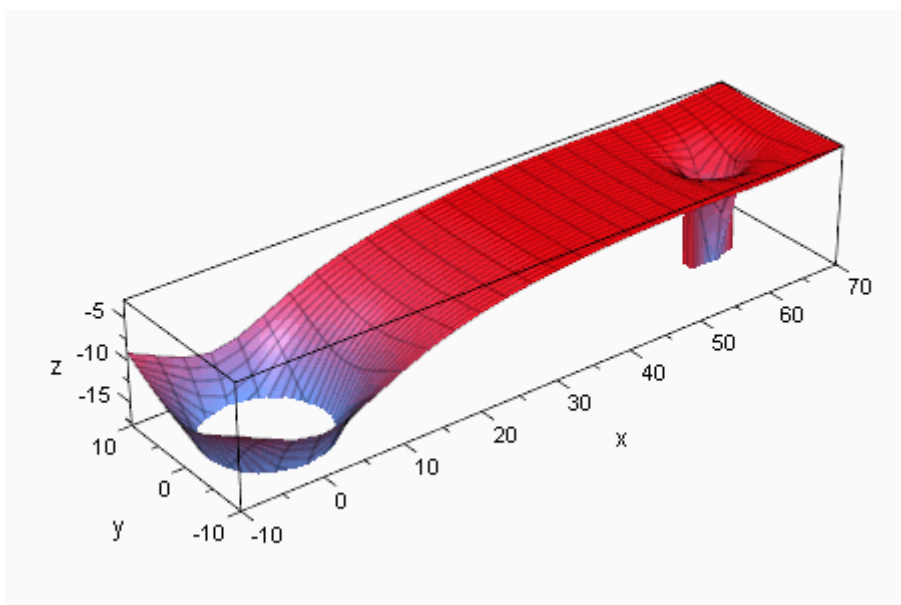


Fig.: 4.6-3

4.6-4 zeigt eine andere Perspektive desselben Systems.

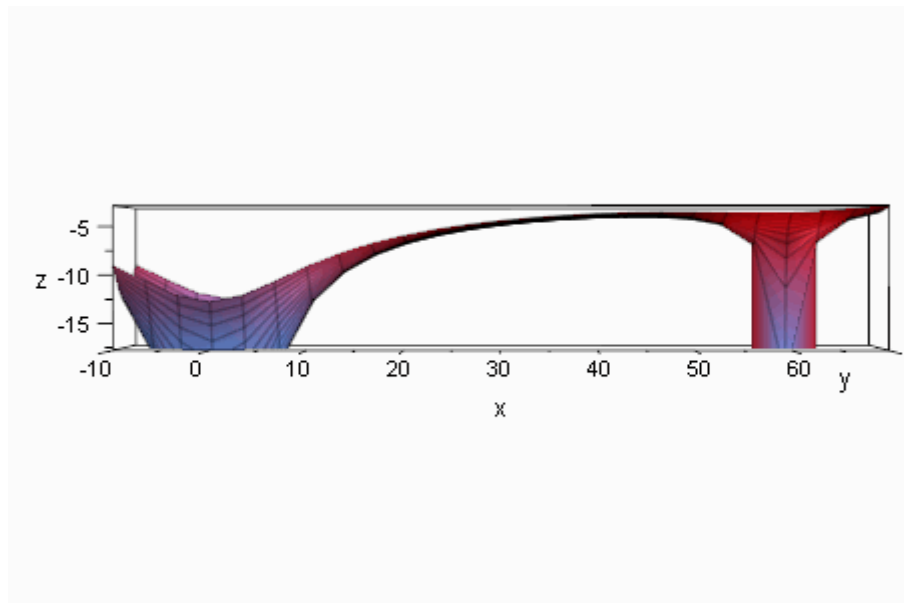


Fig.: 4.6-4

Der "Potentialtopf" der Erde macht den Eindruck eine Kraters, auf dessen Boden sich die Erde befindet. Um der Gravitationsanziehung zu entkommen, muss man die Wände des "Kraters" hochklettern. Aber eine derartige Flucht ist nicht möglich, es sei denn mit einer Rakete oder durch Schuss aus einer riesigen Kanone mit einer Mündungsgeschwindigkeit von 11,188 km/s. Die Rakete haben wir, die Kanone (noch) nicht.

In Erdnähe steigt der "Potentialberg" um 0.0098MJ/kg auf jedem Höhenkilometer. Auf dem Mond beträgt der Anstieg nur 0.0016 MJ/kg/km.

Auf der Verbindungslinie von Erde und Mond gibt es einen Punkt N, in dem die Potenzialkurve horizontal verläuft und in dem das Gesamtpotenzial Null ist. Dieser Punkt befindet sich in einer Entfernung von 54  $R_E$  vom Erdzentrum, vgl. 4.6- 18.

Mit dem folgenden Programm können wir unser System als ein Kugelpaar im Raum darstellen.

- ```

mx:=0:my:=0:mz:=0:r:=2://Zentrum und Radius der
"Erde"
x := r*cos(u)*sin(v)+mx:
y := r*sin(u)*sin(v)+my:
z := r*cos(v)+mz:
s1 := plot::Surface([x, y, z], u = 0 .. 2*PI, v = 0 ..
PI,
Color=RGB::Red):
mx:=2:my:=-2:mz:=3:r:=0.5:// "Mond"
X := r*cos(u)*sin(v)+mx:
Y := r*sin(u)*sin(v)+my:
Z := r*cos(v)+mz:
s2 := plot::Surface([X, Y, Z], u = 0 .. 2*PI, v = 0 ..
PI,
Color=RGB::Blue): plot(s1,s2, Scaling = Constrained)

```

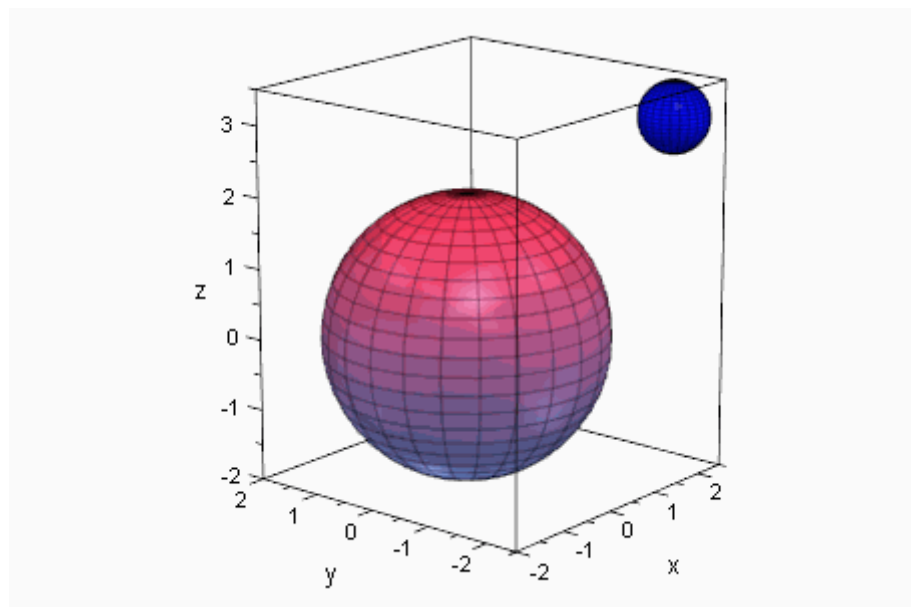


Fig.: 4.6-5



## 4.6.5 Mit Bleistift und Papier

### a. Die Gravitationsbeschleunigung

Die potenzielle Energie der Masse  $m$  in der Entfernung  $r$  vom Erdzentrum ist gegeben durch

$$E_p(r) = G m M (1/r_0 - 1/r) \quad (23)$$

Wenn  $E_p$  sich auf die Erdoberfläche bezieht, gilt  $r_0 = R_E = 6,371 \cdot 10^6$  m.

Für kleine Höhen  $h$  können wir schreiben

$$E_p(r) = G m M ((r-R_E)/(rR_E)) \approx G M/R_E^2 \cdot mh := g \cdot mh \quad (24)$$

mit  $g := GM/R_E^2$  als "Erdbeschleunigung". Es folgt  $g = 9,82$  m/s<sup>2</sup>.

### b. Künstliche Satelliten

Die Fluchtgeschwindigkeit ist die Minimalgeschwindigkeit, mit der ein Körper von der Erde geschossen werden muss, um ins Unendliche zu gelangen.

Ein künstlicher Satellit wird mithilfe einer Trägerrakete von der Erde hochgeschossen. In der Höhe  $h$  erhält der Satellit einen letzten Impuls, der ihm die Horizontalgeschwindigkeit  $v_0$  gibt. Die Gesamtenergie des Satelliten beträgt

$$E = mv_0^2/2 - GmM/(R_E+h) \quad (25)$$

Für  $E < 0$  ist die Bahn eine Ellipse. Wenn die Energie sehr klein ist, schneidet die Bahn (Orbit) die Erde und der Satellit stürzt ab. Im

nächsten Kapitel werden wir Satellitenbahnen mit mehr Detail untersuchen.

4.6- 18

### c. Das Erde-Mond-System

Die Mondmasse beträgt ungefähr 1/81 der Erdmasse, und die beiden Zentren sind etwa  $d = 60 R_E$  voneinander entfernt.

Die resultierende Gravitationskraft  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_M$  ist Null in einem bestimmten Punkt zwischen Erde und Mond. N ist ein "Sattelpunkt", in dem die Potenzialkurve horizontal verläuft.

Die Lage dieses Punktes N folgt aus der Gleichung

$$G m M_E / r^2 = G m M_M / (60 R_E - r)^2.$$

Auflösung nach r liefert  $r := r_N = 54 R_E$

Wenn ein Projektil diesen Punkt überschreitet, wird es von der Gravitationskraft des Mondes beschleunigt.