

## 4.5 Erhaltung der Energie

Wir sind bis hierhin gekommen, ohne dass es nötig war, den Energiebegriff zu benutzen, wir waren nie gezwungen, von **Energie** zu sprechen, wenn wir ein Problem lösten. Aber es wäre völlig verfehlt, wenigstens aus praktischen Gründen, das Gesetz von der Erhaltung der Energie nicht benutzen zu wollen, denn es enthält keine zweite Ableitung, da keine Beschleunigung auftritt. Schon aus diesem Grunde sind wir mit dem Energiesatz einen Schritt näher an der Lösung eines gegebenen Problems.

### 4.5.1 Arbeit und kinetische Energie.

Welche physikalische Bedeutung kann ein Kurvenintegral (oder Linienintegral) der folgenden Form haben?

$$\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

Dieses Integral über  $\vec{F}$  summiert die Skalarprodukte von  $\vec{F}$  und  $d\vec{r}$  entlang einer ebenen oder räumlichen Kurve zwischen den Punkten  $P_0$  und  $P_1$ .  $d\vec{r}$  ist eine infinitesimale Verschiebung.

Gibt es eine physikalische Größe, die sich unter dem Einfluß einer bestimmten Kraft  $\vec{F}$  entlang eines *Weges* ändert, ähnlich der Impulsänderung, die ein Teilchen unter dem Einfluss einer Kraft während eines *Zeitintervalls* erleidet?

Die Integration von (1) beginnt im Punkt  $P_0$  und erstreckt sich bis hin zum Endpunkt  $P_1$ . Die Frage, die sich dabei stellt, ist, ob der Wert des Integrals von der Form des Weges abhängt, den das Teilchen durchläuft, oder nicht.

Wenn das Integral von der Form des Weges abhängig sein sollte, hätte es wenig Sinn, es einzuführen, denn dann ergäben sich für zwei gegebene Punkte  $P_0, P_1$  unendlich viele Integralwerte.

Historisch gesehen hat man dieses Problem durch Einführung zweier neuer Größen behandelt, der **Arbeit** und der **kinetischen Energie**.

Zunächst bezeichnen wir das Integral (1) als die **Arbeit**  $W$ , die die am Körper (Teilchen) angreifenden Kräfte verrichten, während sie es von  $P_0$  nach  $P_1$  bewegen. Die Arbeit ist positiv, wenn die Gesamtkraft in Bewegungsrichtung zeigt (vgl. ein Beispiel in 4.5.5).

Alsdann definieren wir durch den Ausdruck

$$E_k = m v^2/2 \quad (2)$$

die **kinetische Energie** des Teilchens.

Am Anfang wurde der Faktor  $\frac{1}{2}$  nicht benutzt, und man nannte das Produkt  $mv^2$  *vis viva*, lebendige Kraft. Diese neuen Größen sind durch die folgende Beziehung miteinander verknüpft:

$$\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (3)$$

Gl. (3) wird auch das *Arbeits-Energie-Theorem* genannt und ist eine Folge des zweiten Newtonschen Gesetzes. Um das zu zeigen, ersetzen wir  $\vec{F}$  durch  $m \cdot d^2\vec{r}/dt^2$  und benutzen die folgende allgemeine Vektorbeziehung:

$$2 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right)}{dt} \quad (4)$$

Indem wir  $d\vec{r}/dt \cdot d\vec{r}/dt = v^2$  schreiben, erhalten wir

$$\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{m}{2} \int_{v_0}^{v_1} \frac{d(v^2)}{dt} \cdot dt = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} \quad (5)$$

Das aber ist die Beziehung (3).

Beachte: Das Integral einer Kraft über die *Zeit* der Art  $\int \vec{F} dt$  erzeugt die Änderung einer *vektoriellen* Größe, nämlich des linearen Impulses (Kraftstoß):

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (6)$$

Wir nennen  $\vec{I}$  den **Impuls** der Kraft. Das *räumliche* Integral einer Kraft erzeugt nach (5) die Änderung einer positiven *skalaren* Größe, der *kinetischen Energie*.

Es ist interessant, dass im *Arbeits-Energie-Theorem* (3) nur die Anfangs- und Endgeschwindigkeit vorkommen. Was auf dem ganzen Weg passiert, hat keinen Einfluss auf die Änderung der kinetischen Energie. Wir werden später Beispiele betrachten.

Wir wissen, dass der lineare Impuls eines abgeschlossenen Systems eine Konstante ist. Das aber gilt nicht für die kinetische Energie. Stellen wir uns zwei mit elastischen Stoßfedern versehene Wägeln vor, die reibungsfrei gegeneinanderlaufen und zusammenstoßen. Während des Zusammenstoßes werden die Wägeln kurzzeitig zur Ruhe kommen und sich dann wieder trennen.

Während in jedem Augenblick die Summe  $\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$  immer die gleiche ist, gilt das nicht für die Summe  $E_k = m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 := E_{k1} + E_{k2}$ , die im Augenblick der Ruhe sogar Null wird.

Wenn wir jedoch die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß vergleichen, werden wir feststellen, dass  $E_{k,vor} = E_{k,nach}$  ist, denn wir haben einen elastischen Zusammenstoß (eine elastische Wechselwirkung) angenommen.

Bei alltäglichen Zusammenstößen, etwa bei der Wechselwirkung zweier Autos, gibt es immer eine Übertragung von kinetischer Energie in andere Energieformen (plastische Verformung, Wärmebildung, Schallerzeugung ...). Die kinetische Energie bleibt also nicht erhalten, und wir nennen diese Wechselwirkungen unelastisch oder plastisch.

Wenn Sie einen Ball zu Boden fallen lassen, wird er nach dem Aufprallen nicht wieder in die Ausgangshöhe zurückkehren, denn während des Zusammenstoßes mit dem Boden wird ein Teil der kinetischen Energie, die der Ball kurz vor dem Aufprall erreicht hatte, in andere Energieformen umgewandelt. Durch Messung der Rückprallhöhe kann man dem Ball einen "Elastizitätskoeffizienten" zuordnen.

## 4.5.2 Potenzielle (potentielle) Energie

Während einer Wechselwirkung (WW) übt ein Körper A die Kraft  $\mathbf{F}(t)$  auf einen Körper B aus. B wirkt auf A mit der Kraft  $-\mathbf{F}(t)$  zurück. Beide Kräfte bilden ein Kräftepaar nach dem 3. Gesetz von Newton. Die Beträge (Intensitäten) der Kräfte ändern sich während der Dauer der WW, aber in jedem Augenblick sind sie gleich. Während der WW fällt die kinetische Energie bis auf Null ab, aber nach dem Zusammenstoß "erneuert" sie sich wieder.

Um diese scheinbare Energiegewinnung aus dem Nichts auch formelmäßig beschreiben zu können, werden wir eine neue Größe einführen, die vor und nach der WW Null ist, die aber während der WW kinetische Energie ( $E_k$ ) "speichert". Man nennt diese neue Größe **potenzielle Energie** ( $E_p$ ). Sie gehört nicht einem der beiden Körper an, sondern gehört zum System der in WW stehenden Körper als ganzem. Man kann sie durch die folgende Beziehung kennzeichnen: *Änderung* von  $E_p = -$  *Änderung* von  $E_k$  oder als Formel

$$\Delta E_p = -\Delta E_k = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

oder auch  $W = - \int_{P_0}^{P_1} dE_p(\vec{r})$ , wenn wir den Begriff der *Arbeit* benutzen wollen.

Streng genommen hat es keinen Sinn, einfach von "der potenziellen Energie" zu sprechen, sondern nur von ihrer "Änderung". Einem System einen bestimmten Wert der potenziellen Energie zuzuordnen hat nur Sinn, wenn man einer Bezugsconfiguration einen bestimmten  $E_p$ -Wert zuschreibt.

Wenn wir vorschreiben, dass  $E_p(P_0) = 0$ , so können wir jedem Punkt P eine potenzielle Energie zuschreiben mit wohldefiniertem Wert. Im eindimensionalen Fall können wir z.B. definieren  $E_p(x_0) = 0$  und berechnen  $E_p(x)$  mithilfe der Gleichung

$$E_p(x) = - \int_{x_0}^x F dx' + E_p(x_0) = - \int_{x_0}^x F dx' \quad . \quad (7)$$

In eindimensionalen Fällen können wir immer schreiben

$$F(x) = - \frac{dE_p(x)}{dx} \quad , \quad (8)$$

wenn  $\mathbf{F}$  nur von  $x$  abhängt. Wir können jetzt sehen, dass in einem System mit potenzieller Energie (sogenanntes *konservatives* System) die Summe aus  $E_p$  und  $E_k$  konstant bleibt, denn aus der Definition von  $E_p$  und aus dem Arbeits-Energie-Theorem ergibt sich

$$E_{p_b} - E_{p_a} = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{k_a} - E_{k_b} \quad . \quad (9)$$

Das können wir in der Form des *Erhaltungssatzes der mechanischen Energie* schreiben:

$$E_p(A) + E_k(A) = E_p(B) + E_k(B) = E = \text{const.} \quad (10)$$

Die Größe  $E = E_p + E_k$  heißt *Gesamtenergie*. Die durch A und B gekennzeichneten Konfigurationen sind beliebig.

Beim Beispiel eines fallenden Körpers sahen wir in 1.1.2, dass  $E_p = mgy$  und  $E_k = mv^2/2$  und dass ihre Summe konstant ist.

### 4.5.3 Kraftfelder

Kräfte spüren wir in vielen Fälle als Kontaktkräfte, z.B. beim Händeschütteln oder bei einer Umarmung. Viele Kräfte können aber in jedem Raumpunkt gespürt werden –oder wenigstens in einem gewissen Raumgebiet. Beispielsweise erzeugt die Erde eine Gravitationskraft, die von allen anderen Massen "gespürt" wird.

In diesen Fällen ist jeder Raumpunkt durch einen *Kraft-Vektor* gekennzeichnet. In der Mathematik ist ein **Vektorfeld** eine Funktion, die jedem Raumpunkt einen Vektor zuordnet. Genauer

Ein Vektorfeld im  $R^3$  ist eine Funktion  $\mathbf{F}(x,y,z)$ , deren Werte Vektoren im  $R^3$  sind.

Man kann schreiben  $\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ .

Wenn jeder Raumpunkt mit einem Skalar anstatt mit einem Vektor belegt ist, sprechen wir von einem skalaren Feld  $\Phi(\mathbf{r})$ , wie z.B. das Temperaturfeld, das jedem Punkt eines Raumgebiets eine reelle Zahl zuordnet, die Temperatur im fraglichen Punkt.

Die Vektorfelder, die wir betrachten werden, sind alle unabhängig von der Zeit; sie werden *stationäre Felder* genannt.

#### Beispiel 1:

Skizziere im  $R^2$  das folgende Vektorfeld:  $\mathbf{F}(x,y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$ .

**Lösung:**

Um die Vektoren darzustellen, legen wir ihren Anfang nach  $(x,y)$  und die Spitze in  $(x,y) + (F_x,F_y)$ . Wir können das Feld aber nur durch einige repräsentative Pfeile darstellen. Für Fig. 4.5-1 legen wir uns eine Tabelle mit den Werten von  $x$ ,  $y$ ,  $F_x$  und  $F_y$  an. In Fig. 4.5-2 wählen wir Punkte eines Kreises vom Radius  $2^{1/2}$  als Anfangspunkte. Die Länge der Pfeile können wir verändern, indem wir einen Skalenfaktor  $d$  einführen.

Zuächst eine Tabelle mit einigen Koordinaten:

Anfangspunkt		$F(x,y)$	Endpunkt	
$x_1$	$y_1$	$-y_1 + x_1j$	$x_2$	$y_2$
1	1	$-i + j$	0	2
-1	1	$-i - j$	-2	0
-1	-1	$+i - j$	0	-2
1	-1	$+i + j$	2	0
2	1	$-i + 2j$	1	3
1	2	$-2i + j$	-1	3
-1	2	$-2i - j$	-3	1

Der Vektor  $-i + j$ , der dem Punkt  $(1,1)$  zugeordnet ist, beginnt in  $(1,1)$  und endet in  $(0,2)$ . Der zweite Vektor beginnt in  $(-1,1)$  und hat seine Spitze in  $(-2,0)$ , usw.

Mit dem folgenden Programm zeichnen wir 4 Punkte (an roten Pfeilen) zusammen mit den vier (blauen) Kraftvektoren.

- `reset()` :

```

x:=t->2^0.5*sin(t):y:=t->2^0.5*cos(t)//Kreis

kurve:=plot::Curve2d([x(t),y(t)],t=0..2*PI,Color=
RGB::Black):
p:=[[1,1],[0,2],[-1,1],[-2,0],[-1,-1],[0,-2],
[1,-1],[2,0],[2,1],[1,3],[1,2],[-1,3],[-1,2],[-
2,-1]]:
s1:=plot::Arrow2d(p[1],p[2])// F-Vektoren
s2:=plot::Arrow2d(p[3],p[4]):
s3:=plot::Arrow2d(p[5],p[6]):
s4:=plot::Arrow2d(p[7],p[8]):

s11:=plot::Arrow2d(p[1],Color=RGB::Red)//Orts-
vektoren
s22:=plot::Arrow2d(p[3],Color=RGB::Red):
s33:=plot::Arrow2d(p[5],Color=RGB::Red):
s44:=plot::Arrow2d(p[7],Color=RGB::Red):
punkte:=plot::PointList2d([p[1],p[3],p[5],p[7]],
PointSize=2):
plot(s1,s2,s3,s4,s11,s22,s33,s44,punkte,kurve,
Scaling=Constrained)

```

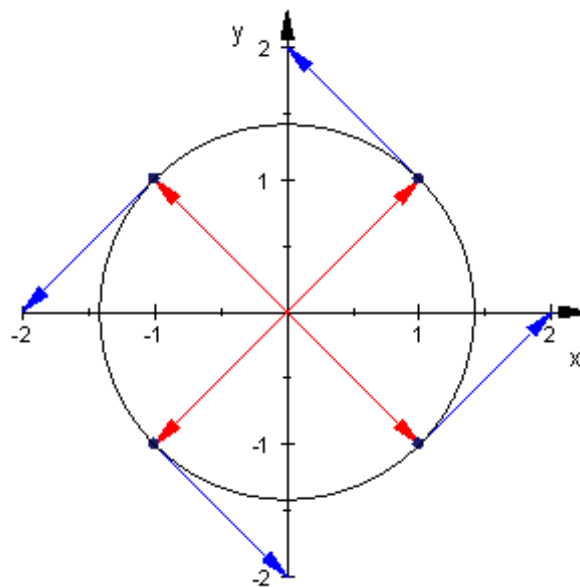


Fig.: 4.5-1

Die Abbildung zeigt, dass die Vektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{F}$  orthogonal sind, d.h. die  $\mathbf{F}$ -Vektoren sind Tangenten an einen Kreis, der sein Zentrum im Ursprung hat.  $\mathbf{F}$ -Vektoren und Ortsvektoren haben dieselbe Länge.

In der folgenden Figur 4.5-2 haben wir eine "automatisierte" Darstellung desselben Vektorfeldes, mit den Anfangspunkten der  $\mathbf{F}$ -Vektoren auf einem Kreis. Die Endpunkte wurden mit  $(x,y)+(\mathbf{F}_x,\mathbf{F}_y)$  berechnet.

- `reset() :`  
`r:=2^0.5//Radius`  
`d:=1//Skalenfaktor`  
`werte:=[0,PI/4,PI/2,3*PI/4,PI,5*PI/4,3*PI/2,7*PI/4,2*PI] :`  
`x:=t->r*cos(t)//Weg`  
`y:=t->r*sin(t) :`  
`u:=t->-y(t)// x-Komponente der Kraft`  
`v:=t->x(t) :`  
`pos:=matrix([[x(t),y(t)]])//Position`  
`kurve:=plot::Curve2d(pos,t=0..2*PI,Color=RGB::Black) :`  
`F:=matrix([[u(t),v(t)]])//Kraft`  
`x1:=pos[1]:y1:=pos[2]//Anfangspunkt`  
`x2:=pos[1]+d*F[1]:y2:=pos[2]+d*F[2]//Endpunkt`  
`pfeil1:=plot::Arrow2d(subs([x1,y1],[x2,y2]),t=werte[i]),`  
`Color=RGB::Blue) $i=1..9:`  
`pfeil2:=plot::Arrow2d(subs([x1,y1]),t=werte[i]),`  
`Color=RGB::Red) $i=1..9:`  
`plot(kurve,pfeil1,pfeil2,Scaling=Constrained)`



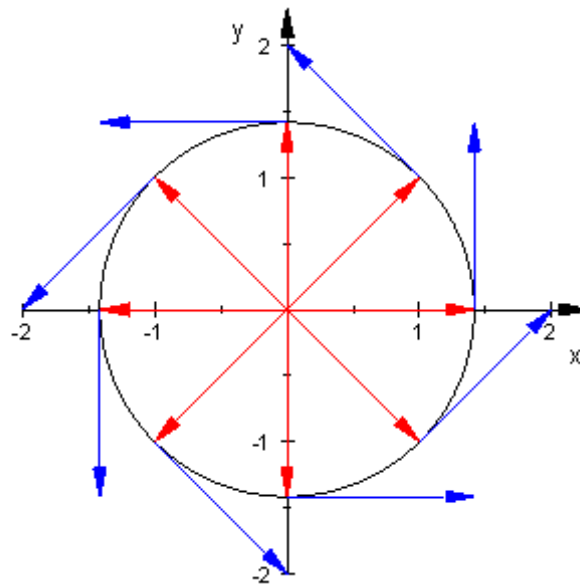


Fig.: 4.5-2

Man kann allgemein zeigen, dass jeder Vektor des Feldes  $\mathbf{F}(x,y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$  Tangentenvektor an einen Kreis ist und dass die Norm (Länge) eines jeden Vektors gleich ist dem Radius des Kreises.

1. Sei  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$  der Ortsvektor des Punktes  $(x,y)$ .  
 Dann gilt:  $\mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{r} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -xy + xy = 0$ , d.h.,  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{F}$  sind orthogonal.  
 Dies bedeutet, dass die Vektoren dieses Feldes Tangenten sind an Kreise, deren Zentrum im Ursprung liegt.
2. Die Norm von  $\mathbf{F}$  beträgt  $\|\mathbf{F}(x,y)\| = \|-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}\| = (x^2 + y^2)^{1/2} = \|\mathbf{r}\|$ , was bedeutet, dass die Länge eines jeden Vektors  $\mathbf{F}$  gleich ist der Entfernung des Punktes  $(x,y)$  vom Ursprung.

Also: Alle Vektoren, die denselben Abstand vom Ursprung haben, sind gleich lang. Mit wachsendem Abstand wächst auch die Länge.

### Beispiel 2:

Um ein Vektorfeld zu erhalten, das strahlenförmig nach außen zeigt, schreiben wir

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \quad \text{mit } \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Um  $\mathbf{F}$  darzustellen, haben wir den Anfang von  $\mathbf{r}$  in den Punkt  $(x,y,z)$  zu legen.

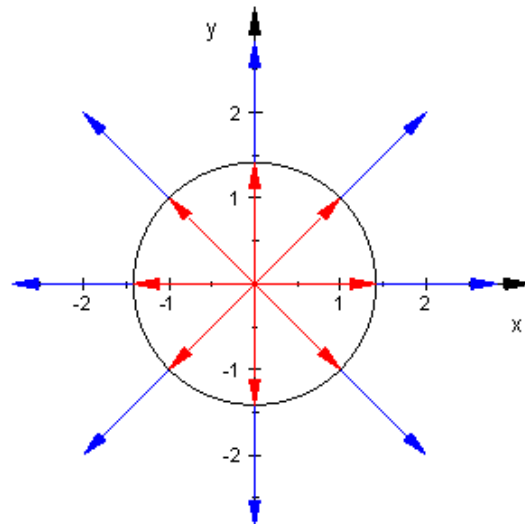


Fig.: 4.5-3

Die Abbildung zeigt acht Vektorrepräsentanten auf einem Kreis im  $\mathbb{R}^2$ . Auch hier gilt, dass die Pfeillänge mit dem Abstand vom Ursprung wächst.

(Im letzten Programm haben wir nur zwei Zeilen zu ändern

```
u:=t->x(t) ://x-Komponente der Kraft
v:=t->y(t) :)
```

Das von  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$  dargestellte Vektorfeld ist ein **Zentralkraftfeld**. Allgemein haben wir  $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{r}^\circ$ , worin  $\mathbf{r}^\circ$  der Einheitsvektor  $\mathbf{r}/r$  bedeutet.

Beispiele derartiger Zentralkraftfelder sind

1.  $F(r) = -kr, k>0$  (elastische Kraft)
2.  $F(r) = -k/r^2, k>0$  (Gravitationskraft)
3.  $F(r) = +/- k/r^2, k>0$  (elektrostatische Kraft)

Das Minuszeichen zeigt an, dass die Kraft auf den Ursprung hinweist (diese Kräfte sind anziehend). Nur im letzten Beispiel kann es eine Abstoßung geben. Das tritt ein, wenn die Ladung im Ursprung und die im Punkt (x,y,z) dasselbe Vorzeichen haben.

Die Gravitationskraft gehorcht dem Gesetz von Newton (vgl. 2.1.4):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = - G m M / [(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}] \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \quad (11)$$

G = allgemeine Gravitationskonstante  
 m = Masse im Punkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$   
 M = Masse im Ursprung (Erde)

Fig. 4.5-4 ist eine Skizze des Gravitationsfeldes. Die Vektoren zeigen überall auf den Ursprung (Erde) hin. Ihre Länge fällt mit wachsendem Abstand vom Zentrum.

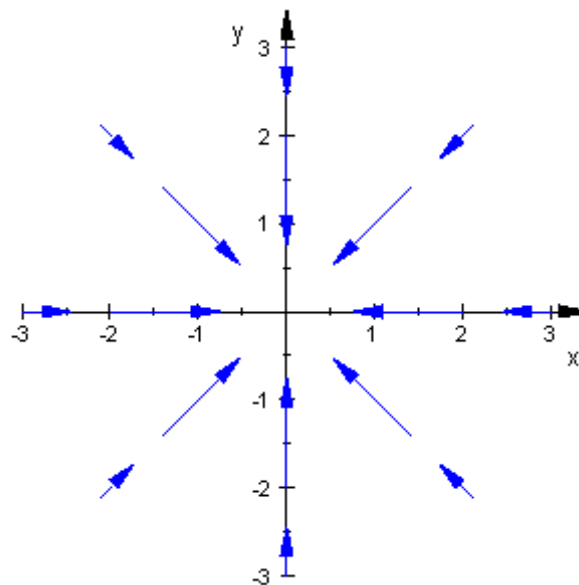


Fig.: 4.5-4

#### 4.5.4 Arbeit und Linienintegral

In diesem Abschnitt werden wir einige Beispiele mit Integralen über einem Vektorfeld betrachten. Ein einfaches Beispiel über den Begriff der *Arbeit* steht im Abschnitt "Mit Bleistift und Papier" in 4.5-16. Hier betrachten wir die Arbeit als Linienintegral von  $\mathbf{F}$  entlang einer Kurve (Linie)  $C$ , vgl. 4.5.1.

Wir können das Integral  $W$  berechnen, indem wir  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  durch  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$  ersetzen, d.h.:

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot dt \quad (12)$$

Der erste Schritt besteht in der Parametrisierung der Kurve  $C$  und der Einfügung dieser Parameterdarstellung in  $\mathbf{F}$ , um  $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$  zu erhalten.

Der Text der Beispiele hat fast immer den folgenden Wortlaut:

Berechne die Arbeit der Kraft  $\mathbf{F}$  (oder des Feldes  $\mathbf{F}$ ) bei der Verschiebung eines Teilchens (Körpers) entlang einer (Geraden, Kreis, Parabel usw.).

Ein ausführliches Beispiel behandeln wir, wie schon gesagt, in 4.5.5. Jetzt benutzen wir MUPAD, um die Kurve und das Feld zu zeichnen und um die Arbeit  $W$  zu berechnen.

##### Beispiel 1:

Zunächst benutzen wir das Programm zu Fig.4.5-2 –mit kleinen Modifikationen-, um die Arbeit zu berechnen, die die Kraft (das Feld)  $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  verrichtet, wenn sie ein Teilchen im Gegenuhrzeigersinn auf einem Einheitskreis bewegt.

##### Lösung:

Um das Integral (12) zu berechnen, ist die Geschwindigkeit zu bestimmen und das Skalarprodukt  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  zu berechnen. Der Parameter  $t$  variiert zwischen 0 und  $2\pi$ . Den Wert von  $W$  berechnen wir mit

$W := \text{int}(\mathbf{F}[1] * \text{vel}[1] + \mathbf{F}[2] * \text{vel}[2], t=0..2*PI)$  die Geschwindigkeit (velocity) bestimmen wir mit  $\text{vel} := \text{matrix}([\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t)])$

```

• reset():r:=1://Radius
d:=0.5://Skalenfaktor
werte:=[0,PI/4,PI/2,3*PI/4,PI,5*PI/4,3*PI/2,7*PI/4,2*PI]:
I]:
x:=t->r*cos(t)://Weg
y:=t->r*sin(t):
u:=t->-y(t)://x-Komp. der Kraft
v:=t->x(t):
pos:=matrix([[x(t),y(t)]]):
vel:=matrix([[x'(t),y'(t)]]):
kurve:=plot::Curve2d(pos,t=0..2*PI,Color=RGB::Black):
F:=matrix([[u(t),v(t)]])://Kraft
x1:=pos[1]:y1:=pos[2]://Anfangspunkt
x2:=pos[1]+d*F[1]:y2:=pos[2]+d*F[2]://Endpunkt
pfeil:=plot::Arrow2d(subs([x1,y1],[x2,y2]),t=werte[i]),
),
Color=RGB::Red) $i=1..9:
W:=int(F[1]*vel[1]+F[2]*vel[2],t=0..2*PI);
//Linienintegral

plot(pfeil,kurve,Scaling=Constrained)

```

**Ergebnis:**

$$W = 2 \text{ PI}$$

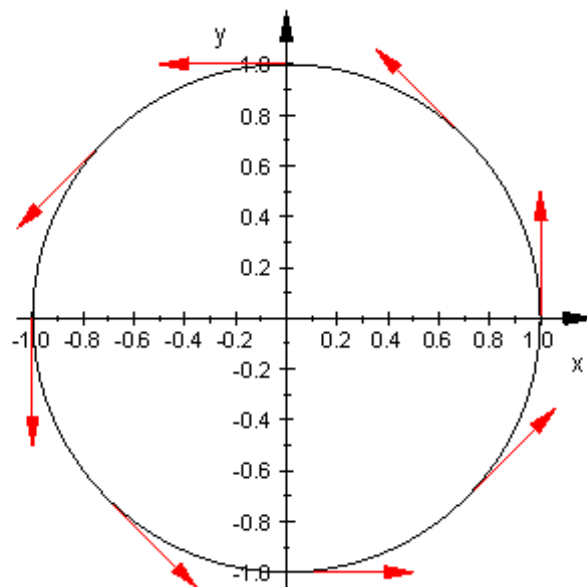


Fig.: 4.5-5

Die Arbeit beträgt  $W = 2\pi \text{ J}$ . Ein *Joule*, 1 J, ist die Arbeit, die eine konstante Kraft von 1 N verrichtet, wenn sie einen Körper um 1 m (in ihrer Richtung und Richtungssinn) verschiebt. Wir konnten einen positiven Arbeitswert erwarten, da alle  $\mathbf{F}$ -Vektoren in jedem Augenblick die Orientierung der Kurve C haben, d.h. der Winkel zwischen  $\mathbf{F}$  und  $d\mathbf{r}$  ist immer Null. Im Falle der Radialkraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$  (Fig. 4.5-3) sind die Vektoren  $\mathbf{F}$  immer orthogonal zu  $d\mathbf{r}$ , und die Arbeit ist Null.

Die Vektoren des Feldes  $\mathbf{F}(x,y) = (x+y)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  zeigen i.Allg. in eine Richtung, die der Orientierung von C entgegengesetzt ist, sodass wir eine negative Arbeit erwarten.

Tatsächlich erhalten wir  $W = -\pi \text{ J}$ . Die folgende Figur zeigt das Feld (rot) und die Verschiebungen (blau).

Um das Diagramm zu zeichnen, sind die folgenden Zeilen hinzuzufügen:

```
x3:=pos[1]+0.5*vel[1]:y3:=pos[2]+0.5*vel[2]:
pfeill:=plot::Arrow2d(subs([x1,y1],[x3,y3]),
t=werte[i]),
Color=RGB::Blue) $i=1..9:
```

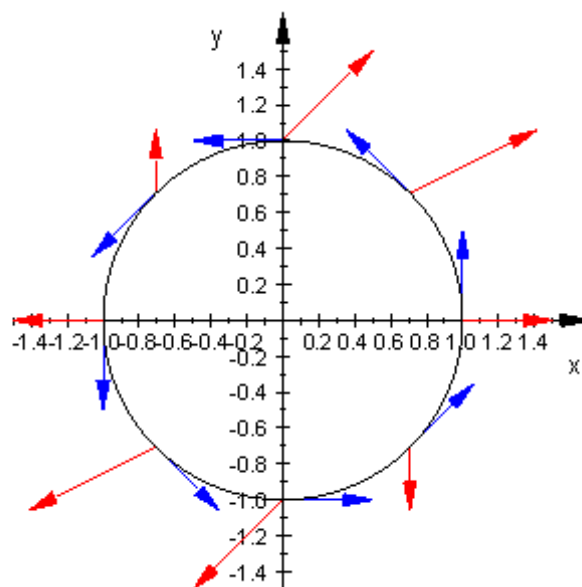


Fig.: 4.5-6

**Beispiel 2:**

Die folgende Kraft (Feld) bewegt ein Teilchen im  $\mathbb{R}^3$  einmal auf einem Kreis mit dem Radius  $r = 3$  m in der Höhe  $z = 2$  m.

$$\mathbf{F} = (2x-y+z)\mathbf{i} + (x+y-z^2)\mathbf{j} + (3x-2y+4z)\mathbf{k}$$

Berechne die von  $\mathbf{F}$  verrichtete Arbeit. (Ergebnis:  $W = 18\pi$  J)

**Lösung:**

- ```

reset():
x:=t->3*cos(t)://Kreis
y:=t->3*sin(t):
z:=t->2:
u:=t->2*x(t)-y(t)+z(t)://x-Komp. der Kraft
v:=t->x(t)+y(t)-z(t)^2:
w:=t->3*x(t)-2*y(t)+4*z(t):
pos:=matrix([[x(t),y(t),z(t)]]):
kurve:=plot::Curve3d([x(t),y(t),z(t)],t=0..2*PI):
vel:=matrix([[x'(t),y'(t),z'(t)]])://Geschwindigkeit
F:=matrix([[u(t),v(t),w(t)]])://Kraft
W:=int(linalg::scalarProduct(F,vel),t=0..2*PI);
arbeit:=int(F[1]*vel[1]+F[2]*vel[2]+F[3]*vel[3],t=0..2*PI); plot(kurve)
18 PI
18 PI

```

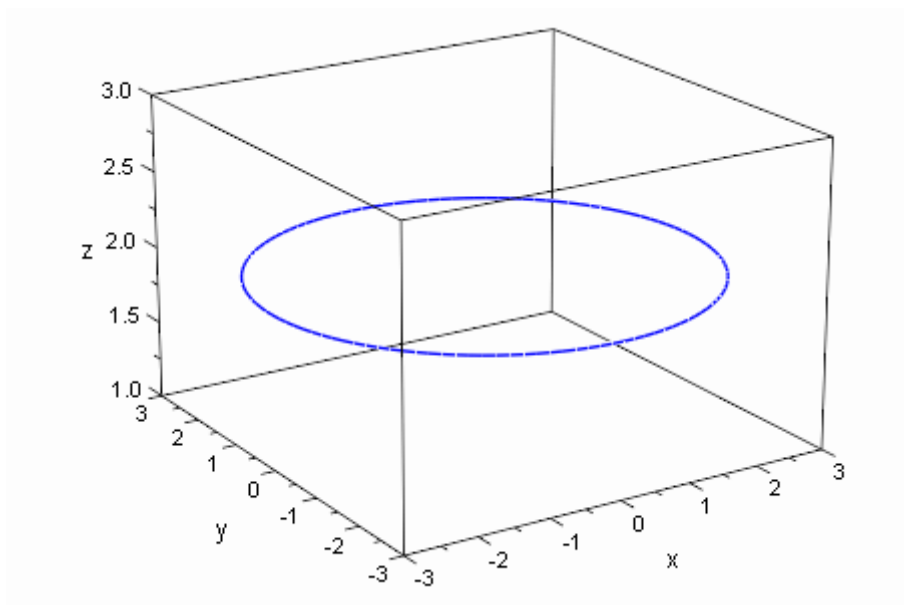


Fig.: 4.5-7

In der Natur sind viele Kraftfelder *unabhängig vom Weg*, z.B. das Gravitationsfeld und das elektrische Feld ruhender Ladungen. Die Tatsache, dass das Gravitationsfeld unabhängig ist vom Weg, bedeutet, dass die von der Gravitationskraft an einem von ihr bewegten Körper geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig ist und nicht vom Weg, auf dem der Körper bewegt wurde.

Wenn ein Vektorfeld wegunabhängig ist, können wir die *potenzielle Energie* des Körpers definieren.

### 4.5.5 Mit Bleistift und Papier

#### 1. Arbeit

Um den Begriff *Arbeit* besser zu verstehen, betrachten wir eine Masse, die auf einem Tisch gleiten kann und mit einer Feder an einer Wand befestigt ist.

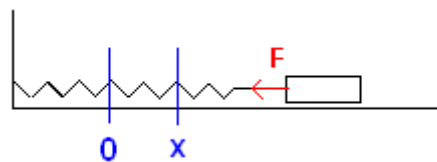


Fig.: 4.5-8

Die Feder ist um 10 cm über die Ausgangslänge hinaus gedehnt und wird dann losgelassen. In der Entfernung  $x$  erzeugt die Feder nach dem Hookeschen Gesetz die Kraft  $\mathbf{F}(x) = -k x \mathbf{i}$  auf die Masse.

Welche Arbeit hat die Feder an der Masse verrichtet, wenn sie sich erneut im Abstand  $x = 0$  befindet?

#### Lösung:

Der Weg beginnt in  $P_0 = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$  und erstreckt sich bis  $P_1 = 0$ . Die Gesamtarbeit, die die Feder an der Masse verrichtet, beträgt



$$W = \int_{0.1}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0.1}^0 (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \left[ -\frac{kx^2}{2} \right]_{0.1}^0 = \frac{k(0.1)^2}{2}$$

Wenn die Federkonstante  $k = 10\,000$  N/m beträgt, ergibt sich die Arbeit  $W = 50$  N·m oder 50 J.

Beachte, dass die Arbeit positiv ist, denn die Kraft wirkt in Bewegungsrichtung. In diesem Beispiel sehen wir, wie ein Linienintegral über einen zur x-Achse parallelen Weg sich auf ein Integral einer Variablen reduziert. In der Mathematik zeigt man, wie sich jedes Linienintegral in ein gewöhnliches Integral einer einzigen Variablen transformieren lässt, vgl. Gl. (12).

## 2. Linienintegral

Ein Teilchen bewege sich entlang der Parabel  $y = x^2$  von (1,1) bis (2,4). Berechne die insgesamt von dem Kraftfeld  $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$  verrichtete Arbeit. (Weg in Meter und Kraft in Newton.)

### Lösung:

Zuerst haben wir C zu parametrisieren. Die Parametergleichungen der Parabel lauten  $x = t$  und  $y = t^2$ , oder in Vektorform

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \text{ mit } -1 \leq t \leq 2$$

Um das Integral (12) auswerten zu können, benötigen wir die Geschwindigkeit  $d\mathbf{r}/dt$ . In unserem Fall haben wir  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ . Diese Gleichungen sorgen dafür, dass C im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, denn  $t = 0$  ergibt (0,2), und  $t = 1$  ergibt (1,0). Da  $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} = (x^2 + y^2, 3x^2y)$ , folgt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(t, t^2) = (t^2 + t^4, 3t^4)$$

$W = \int ((t^2 + t^4)\mathbf{i} + 3t^4\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) dt = \int (t^2 + t^4 + 6t^5) dt$ . Das Integral geht von  $t = -1$  bis  $t = 2$ , so dass  $W = t^3/3 + t^5/5 + t^6/6 \Big|_{-1}^2 = 363/5 (= 72,6 \text{ J})$ .

## 3. Vom Weg abhängige und unabhängige Linienintegrale.

In den meisten Fällen sind Linienintegrale vom Weg abhängig, wie auch das folgende Beispiel zeigt.

Berechne die Arbeit, die die Kraft  $\mathbf{F}(x,y) = (x+y) \mathbf{i} + y \mathbf{j}$  verrichtet, wenn sie ein Teilchen im Gegenuhrzeigersinn über ein Viertel eines Einheitskreises bewegt, (vgl. Fig. 4.5-6).

Vergleiche diese Arbeit mit der, die geleistet wird, wenn der Weg das Geradenstück ist, das (1,0) mit (0,1) verbindet.

### Lösung:

Die von der Vektorgleichung  $\mathbf{r}(t) = r \cos(t) \mathbf{i} + r \sin(t) \mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , definierte Kurve ist ein Ursprungskreis vom Radius  $r$ . Für ein Viertel des Einheitskreises gilt dann  $r=1$  und  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

Wir setzen  $x(t) = \cos(t)$  und  $y(t) = \sin(t)$  in  $\mathbf{F}(x,t)$  ein und erhalten

$$\mathbf{F}(x(t),y(t)) = (\cos(t) + \sin(t)) \mathbf{i} + \sin(t) \mathbf{j}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} = -\sin(t) \mathbf{i} + \cos(t) \mathbf{j}$$

Für die Arbeit (Linienintegral von 0 bis  $\pi/2$ ) folgt

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} ((\cos(t) + \sin(t))\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}) \cdot (-\sin(t) \mathbf{i} + \cos(t) \mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos(t)\sin(t) - \sin^2(t) + \sin(t) \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -\sin^2(t) dt = [-\sin(t) \cos(t)/2 + t/2]_0^{\pi/2} = -\pi/4 \text{ J} \end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt die Arbeit auf dem Geradenstück von (1,0) bis (0,1).  
Geradengleichung:  $y = -x + 1$

Für die Parametrisierung können wir  $x = t$  oder  $y = t$  wählen. Wenn wir uns für  $y = t$  entscheiden, ist  $x = 1 - t$ .

Mit dieser Wahl erhalten wir  $\mathbf{r}(t) = (1-t) \mathbf{i} + t \mathbf{j}$  com  $0 \leq t \leq 1$ .

Die Ableitung (Geschwindigkeit) ist  $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ . Die Arbei auf dieser Geraden ist

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{F}(1-t,t) \cdot (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt = \int_0^1 ((1-t) + t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt = \int_0^1 (-1+t) dt = [-t+t^2/2]_0^1 = -1/2 \text{ J}$$

Auf dem Viertelkreis war  $W = -\pi/4 \text{ J}$ , also hängt der Wert des Inetegrals in diesem Fall vom Weg ab.

Hätten wir Felder wie  $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  oder  $\mathbf{F}(x,y) = 1/y \cdot \mathbf{i} - x/y^2 \cdot \mathbf{j}$  verwendet, so wären die Integrale gleich gewesen, denn in diesen Fällen handelt es sich um *konservative Vektorfelder*.

Der Grund dafür, dass  $\mathbf{F}$  ein konservatives Feld ist, hat damit zu tun, dass es eine Funktion  $\Phi$  gibt, mit der Eigenschaft  $\mathbf{F} = \mathbf{grad} \Phi$ , worin **grad** (Gradient) ein Operator ist (den wir noch genauer betrachten werden).

Man nennt  $\Phi$  eine *Potentialfunktion* für  $\mathbf{F}$ . Wir wollen jetzt schon festhalten, dass ein Vektorfeld  $\mathbf{F}$  vom Weg unabhängig ist, genau dann, wenn  $\mathbf{F}$  ein Gradientenfeld ist. (In der Physik muss  $\Phi$  gewöhnlich die Gleichung  $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} \Phi$  befriedigen. Die Bedeutung des Minuszeichens wird später erklärt.)

Die Existenz einer Potentialfunktion erleichtert sehr die Auswertung eines Linienintegrals, denn in einem solchen Fall haben wir

$$\int_C \mathbf{grad} \phi \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \phi(\mathbf{B}) - \phi(\mathbf{A}) \quad (13)$$

Als Beispiel erwähne ich, dass das Vektorfeld  $\mathbf{F}(x,y) = y \cos x \mathbf{i} + \sin x \mathbf{j}$  eine Potentialfunktion besitzt, nämlich  $\Phi(x,y) = y \sin x + \text{const.}$

Aber  $\mathbf{F}(x,y) = 2xy \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$  besitzt keine Potentialfunktion.

Das Feld  $\mathbf{F}(x,y) = 1/y \cdot \mathbf{i} - x/y^2 \cdot \mathbf{j}$  ist konservativ mit der folgenden Potentialfunktion:  $\Phi(x,y) = x/y + \text{const.}$

Mit (13) erhalten wir für die Arbeit auf dem geraden Linienstück zwischen  $A = (5,-1)$  und  $B = (9,-3)$  den Wert

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(9,-3) - \Phi(5,-1) = (9/(-3) + \text{const.}) - (5/(-1) + \text{const.}) = 2 \text{ J}$$

Die direkte Berechnung des Linienintegrals über die Gerade  $\mathbf{r}(t) = (3 + 2t) \mathbf{i} - t \mathbf{j}$  mit  $1 \leq t \leq 3$  ergibt dasselbe Ergebnis:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^3 (-1/t, -(3+2t)/t^2) \cdot (2, -1) dt = (-2/t + (3+2t)/t^2) dt = -3/t \Big|_1^3 = 2 \text{ J.}$$

Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass es für  $\mathbf{F}(x,y) = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$  keine Potentialfunktion gibt, denn das Integral ist abhängig vom Integrationsweg. Wir wählen als Weg die Kurve  $y = 2x^n$  mit  $n = \text{konst.}$  Startpunkt ist  $(0,0)$  und Endpunkt  $(1,2)$ . Die Rechnung können wir folgendermaßen durchführen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= (y^2, x^2) \cdot (dx, dy) = y^2 dx + x^2 dy = 4x^{2n} dx + x^2 2nx^{n-1} dx \\ &= (4x^{2n} + 2nx^{n+1}) dx \end{aligned}$$

Die Integration ergibt

$$W = 4x^{2n+1}/(2n+1) + 2nx^{n+2}/(n+2) \Big|_0^1 = 2(2n^2 + 3n + 4)/((n+2)(2n+1))$$

Setzen wir für  $n$  verschiedene Werte ein, so ergeben sich verschiedene Ergebnisse für den Wert von  $W$ :

$$n = 1 \rightarrow W = 18/9 = 2 \text{ J} \quad (\text{Gerade})$$

$$n = 2 \rightarrow W = 9/5 = 1,8 \text{ J} \quad (\text{Parabel})$$

Die Arbeit hängt also vom Weg ab und das Feld  $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$  ist nicht konservativ.

(Wir könnten auch annehmen, dass  $\mathbf{F}$  eine Potentialfunktion  $\Phi$  besitzt, so dass gilt:  $\mathbf{F} = \text{grad } \Phi$ . Wir wollen zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt. Denn die Annahme besagt, dass eine Funktion  $\Phi(x,y)$  existiert derart, dass  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} = \partial \Phi / \partial x \mathbf{i} + \partial \Phi / \partial y \mathbf{j}$  mit  $\partial \Phi / \partial x = y^2$  und  $\partial \Phi / \partial y = x^2$ .

Die Integration von  $\partial \Phi / \partial x$  ergibt  $\Phi(x,y) = xy^2 + C(y)$ , wobei  $C$  eine Funktion von  $y$  ist. Wenn wir  $\Phi(x,y)$  nach  $y$  ableiten und beachten, dass  $\partial \Phi / \partial y = x^2$ , so ergibt sich  $\partial \Phi / \partial y = 2xy + C'(y) = x^2$ . Daraus folgt

$$C'(y) = x^2 - 2xy.$$

Das aber ist ein Widerspruch, denn  $C'$  kann nur Funktion von  $y$  sein.

Diese Überlegung hat also gezeigt, dass es keine Potentialfunktion für das gegebene Vektorfeld gibt.)