# 4.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

## 4.4.1 Die Eulersche Gleichung

Der Drehimpulsvektor kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} I_i \omega_i e_i^{o} \quad , \quad (1)$$

worin die $\mathbf{e_i^o}$ Einheitsvektoren in Richtung der Hauptachsen sind, die wir mit 1, 2 und 3 kennzeichnen. Denn wir können $\boldsymbol{\omega}$ in - zu den Hauptachsen parallele- Komponenten $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{\omega_2}$ und $\boldsymbol{\omega_3}$ zerlegen. Für jede Komponente können wir schreiben $\mathbf{L_i} = I_i\, \boldsymbol{\omega_i}$. Die Momente $I_i$ sind Hauptträgheitsmomente. Der Drehimpuls des starren Körpers in Bezug auf eine beliebige Achse ist

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2} + \mathbf{L_3} = I_i\, \boldsymbol{\omega_1} + I_2\, \boldsymbol{\omega_2} + I_3\, \boldsymbol{\omega_3} \quad . \quad (2)$$

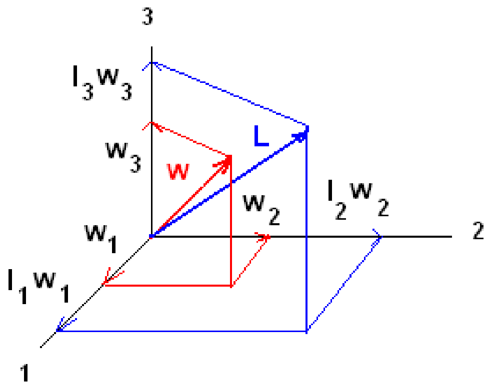


Fig.: 4.4-1

In Fig. 4.4-1 sehen wir die Projektionen von **ω** und **L** auf die Hauptachsen.

Mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e_i^o}$ können wir (2) wie folgt schreiben

$$\mathbf{L} = I_1\,\omega_1\,\mathbf{e_1^o} + I_2\,\omega_2\,\mathbf{e_2^o} + I_3\,\omega_3\,\mathbf{e_3^o} \quad , \quad (3)$$

was aber genau Gl. (1) ist.

**L** und **ω** haben verschiedene Richtungen, wie es auch Fig. 4.4-1 zeigt. Die Summe (3) kann auch als Matrizenprodukt geschrieben werden:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega} \quad . \quad (4)$$

Wir sahen das schon in 4.3.1, Gl. (6).

Die $I_i$ sind unabhängig von der Zeit, wenn wir sie auf ein Koordinatensystem beziehen, das sich im Körper befindet, z.B. im Schwerpunkt. Allerdings drehen sich die Einheitsvektoren zusammen mit dem Körper und sind damit zeitabhängig. Das Drehmoment der äußeren Kräfte beträgt

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} I_i \frac{d\omega_i}{dt} e_i^o + \sum_{i=1}^{3} I_i \omega_i \frac{de_i^o}{dt} \quad . \quad (5)$$

Vgl. mit Gl. (8) in 4.3.1.

Wir können diesen Ausdruck vereinfachen, wenn wir die Tatsache berücksichtigen, dass man die Ableitung eines Vektors von konstantem Betrag als Vektorprodukt mit dem Vektor **ω** schreiben kann (vgl. Gl. (1) in 3.5.1 oder *Shames, I.H.*, Dynamics, Vol. II, p. 488, oder einen ähnlichen Text)

$$\frac{de_i^o}{dt} = \vec{\omega} \times e_i^o \quad . \quad (6)$$

Wir erhalten so die wichtige *Gleichung von Euler* :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} I_i \frac{d\omega_i}{dt} e_i^o + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad . \quad (7)$$

Wenn sich der Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt, vereinfacht sich die vorige Beziehung:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L} \quad . \quad (8)$$

Die Arbeit, die wir uns machten, um zu Gl. (8) zu gelangen, hätten wir uns auch sparen können, denn (8) ist nur eine Folge von Gl. (1) des Paragraphen 3.5.1. Aber ich hatte die Absicht, zu zeigen, dass (8) ein Spezialfall von (5) ist.

Um endlich zum Thema dieses Abschnitts zu kommen, substituieren wir in (8) den Drehimpuls **L** durch den Ausdruck **L** = **I** · **ω** (vgl. Eq.(6) in Paragraph 4.3.1):

$$\vec{M} = \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) \quad . \quad (9)$$

Charakteristisch für die Hauptachsen ist, dass sich der Köper um sie drehen kann, ohne dass ein Drehmoment wirken muss. Wir könnten diese Eigenschaft auch als Definition der Hauptachsen verwenden und diese wiederum dazu benutzen, eine Hauptachse experimentell zu finden. Die Bedingung **M** = **0** ist erfüllt, wenn **I** · **ω** parallel zum Vektor **ω** ist, d.h. wenn gilt

$$I \cdot \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega} \quad . \quad (10)$$

Gleichung (10) wird *Eigenwertgleichung* (eigenvalue equation) genannt.

Gl.(10) hat nur für gewisse Werte von λ Lösungen. Diese λ-Werte werden *Eigenwerte* genannt. Die dazugehörigen Vektoren **ω** sind die *Eigenvektoren*.

Im Falle des Trägheitstensors **I** sind die Eigenwerte von **I** die Hauptträgheitsmomente und die Eigenvektoren sind die Richtungsvektoren der Hauptachsen.

Für jeden starren Körper gibt es wenigstens drei orthogonale Hauptachsen (oder solche, die orthogonalisiert werden können).

**Beispiel**:

Ein Trägheitstensor habe die Darstellung

$$I = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren.

**Lösung**:

Wenn wir uns auf die Definitionen von Eigenwert und Eigenvektor stützen wollen, um ihre Werte zu bestimmen, werden wir einen komplizierten Weg einschlagen. Wir werden daher eine praktischere Methode suchen, mit der wir Eigenwerte und Eigenvektoren einer rellen Matrix n-ter Ordnung bestimmen können.

Zuerst aber werden wir das Problem mithilfe der Funktionen lösen, die MUPAD in seiner Sammlung **linalg** anbietet.

Die Funktion `linalg::eigenvectors` ermittelt Eigenwerte und Eigenvektoren. Zusammen mit den Eigenwerten wird uns auch angezeigt, ob sie eindeutig oder mehrdeutig sind. Unsere Matrix hat drei einfache Eigenwerte, aber die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat nur zwei Eigenwerte, von denen $\lambda$=2 doppelt zählt.

Die Vielfachheit (Multiplizität) eines Eigenwertes entspricht der Anzahl der Male, die er als Lösung des *charakteristischen Polynoms* auftritt, vgl. weiter unten in 4.4.3 . Im vorigen Beispiel hat $\lambda = 2$ die (algebraische) Vielfachheit 2, weil 2 eine doppelte Wurzel des charakteristischen Polynoms ist.

(Die *geometrische* Vielfachgeit eines Eigenwerts $\lambda$ ist die Dimension des Unterraums, der zu $\lambda$ gehörenden Eigenvektoren.)

Das folgende Programm erklärt ausführlich, wie man die 0utput-Liste zu lesen hat. Weitere Information gibt MUPAD mit `?eigenvalue`.

Die MUPAD-Ergebnisse sehen folgendermaßen aus:

```
reset()://autovalores e autovetores
DIGITS:=6:
A:=matrix([[7,-2,0],[-2,6,-2],[0,-2,5]]):
a:=linalg::eigenvectors(A);
```

```
-- --         -- +-      -+ -- --  --         -- +-      -+ -- --
|  |          |  |  -1    |  |  |  |          |  |  1/2   |  |  |
|  |          |  |        |  |  |  |          |  |        |  |  |
|  |  6, 1,   |  |  -1/2  |  |  |, |  3, 1,   |  |   1    |  |  |,
|  |          |  |        |  |  |  |          |  |        |  |  |
|  |          |  |   1    |  |  |  |          |  |   1    |  |  |
-- --         -- +-      -+ -- --  --         -- +-      -+ -- --

   --         -- +-    -+ -- -- --
   |          |  |  2   |  |  |  |
   |          |  |      |  |  |  |
   |  9, 1,   |  | -2   |  |  |  |
   |          |  |      |  |  |  |
   |          |  |  1   |  |  |  |
   --         -- +-    -+ -- -- --
```

```
a[1]
```

$$\left[6,\ 1,\ \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]$$

```
a[2]
```

$$\left[3,\ 1,\ \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]$$

```
a[3]
```

$$\left[9,\ 1,\ \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]$$

```
a[1][1]
```

$$6$$

```
a[1][3][1]
```

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Erklärungen**:

a[1] = erster Teil der Lösung mit Eigenwert, Vielfachkeit und Eigenvektor
a[2] = zweiter Teil ...
a[3] = dritter Teil ...

a[1][1] = 1. Eigenwert
a[1][3][1] = 1. Eigenvektor
a[2][1] = 2. Eigenwert
a[2][3][1] = 2. Eigenvektor
a[3][1] = 3. Eigenwert
a[3][3][1] = 3. Eigenvektor

## Zusammenfassung der Ergebnisse:

Eigenwerte: 3, 6, 9
Eigenvektoren: (1/2, 1, 1), (-1, -1/2,1), (2, -2, 1)
(Eigenvektoren sind auch: (1, 2, 2), (-2, -1, 2), (2, -2, 1))

Mit den folgenden Zeilen können wir die Ergebnisse kontrollieren, indem wir für jedes Paar (Eigenwert/Eigenvektor) die *Eigenwertgleichung* (10) ausrechnen:

```
l1:=a[1][1]:   //1. Eigenwert
v1:=a[1][3][1]://1. Eigenvektor
l2:=a[2][1]:  // 2. Eigenwert
v2:=a[2][3][1]://2. Eigenvektor
l3:=a[3][1]:  // 3. Eigenwert
v3:=a[3][3][1]://3. Eigenvektor

bool(A*v1=l1*v1); // ist(10) wahr?
bool(A*v2=l2*v2);
bool(A*v3=l3*v3);
```

### Ergebnisse:

```
TRUE, TRUE, TRUE
```

Die *Eigenwertgleichung* wird also in jedem Fall erfüllt.

Die zweite Matrix hat die Eigenwerte 2, 3 (der Wert 2 zählt doppelt) und die Eigenvektoren sind (0, 0, 1) und (-2, 1, 1).

Da jedes Vielfache eines Eigenvektors auch ein Eigenvektor ist, vgl. 4.4.3, ist es üblich, die Eigenvektoren auf die Länge 1 zu normalisieren. Es handelt sich demnach dann um Einheitsvektoren.

Der Eigenvektor (2, -2, 1) hat die Länge $[2^2 + (-2)^2 + 1^2]^{1/2} = 3$. Wenn wir jede Vektorkoordinate durch 3 teilen, erhalten wir den normalisierten Vektor (0.666667, -0,666667, 0,333333).

Für (-2, 1, 1) ergibt sich der Einheitsvektor $(-2,1,1)/[(-2)^2+1^2+1^2]^{1/2}$= ( -0.8165, 0.4082, 0.4082).

MuPAD normalisiert die Eigenvektoren mit `linalg::normalize(v)`

So erhält man mit `linalg::normalize(v3)` für den 3. Eigenvektor der Matrix A den normalisierten Vektor: (2/3, -2/3, 1/3).

Mit `float(linalg::normalize(v))` ergeben sich die Koordinaten als Dezimalzahlen: `0.666667,-0.666667, 0.333333.`

Das folgende Beispiel zeigt eine Matrix mit 2 Eigenvektoren für einen Eigenwert:

- ```
  reset()://Eigenwerte und Eigenvektoren
  DIGITS:=6:
  A:=matrix([[3,0,-4],[0,3,5],[0,0,-1]]):
  a:=linalg::eigenvectors(A);
  ```

**Ergebnisse:**

Eigenwerte: -1, einfach; 3, doppelt
Zum Eigenwert $\lambda_1$ = -1 gehört der Eigenvektor (1/-5/4,1)
Zum Eigenwert $\lambda_2$ = 3 gehören die Eigenvektoren (1,0,0) und (0,1,0)
$\lambda_2$ hat die algebraische Vielfachheit 2 und die geom. Vielfachheit 2; also hat der zu $\lambda_2$ gehörende Unterraum die Dimension 2.

Die Matrix A:=([[3,-3,-4],[0,3,5],[0,0,-1]]) hat die Eigenwerte 3 und -1.
Der Eigenwert 3 hat die algebr. Vielfachheit 2, aber die geom. Vielfachheit ist 1, denn es gibt nur den Eigenvektor (1, 0, 0) für diesen Eigenwert.
  ```

### 4.4.3 Das charakteristische Polynom

Gleichungen der Form **I**·**ω** = λ **ω** erscheinen in verschiedenen Zweigen der Physik, z.B. beim Studium gekoppelter Oszillatoren oder in der Quantenmechanik. Einen Spaltenvektor werden wir jetzt mit dem Symbol |u> (ket) bezeichnen, einen Zeilenvektor bezeichnen wir mit <u| (bra). (bra – ket kommt von *bracket* = Klammer)

Unsere Aufgabe besteht darin, Zahlen (Eigenwerte) λ und Vektoren (Eigenvektoren) |u> zu suchen, die der Gleichung T·**u** = λ **u** genügen. Mit der Bra-Ket-Schreibweise lautet diese Eigenwertgleichung

$$\mathbf{T}\cdot|u\rangle = \lambda\,|u\rangle \qquad (11)$$

**T** ist ein Tensor (linearer Operator) zweiter Ordnung, z.B. der Trägheitstensor. Die mit dem Tensor verknüpfte Matrix hat die Form

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Um die Gleichung (11) zu lösen, stellen wir zunächst fest, dass man sie mithilfe des Einheitstensores **E** auch wie folgt schreiben kann: T|u> = (λE)|u> oder auch

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E})|u\rangle = 0, \qquad (13)$$

worin $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ der Einheitstensor ist.

Ausgeschrieben sieht (13) folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} (T_{11}-\lambda)u_1 + \quad T_{12}u_2 + \quad T_{13}u_3 &= 0 \\ T_{21}u_1 + \quad (T_{22}-\lambda)u_2 + \quad T_{23}u_3 &= 0 \\ T_{31}u_1 + \quad T_{32}u_2 + \quad (T_{33}-\lambda)u_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (14)$$

Die Gleichungen (14) sind drei Gleichungen für die drei Koordinaten $u_1$, $u_2$, $u_3$ des Vektors |u>. Unsere Frage lautet nun: Wie müssen wir die Zahl λ wählen, damit das System (14) non Null verschiedene Lösungen hat? Die Mathematiker sagen uns, dass die Determinante von (**T**- λ**E**) Null sein muss, das heißt:

$$\det(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{E}) = 0 \qquad (15)$$

Gl. (15) ist eine kubische Gleichung und heißt *charakteristische Gleichung*. Die linke Seite von (15) ist ein Polynom in λ vom Grade 3 (allgemein vom Grad n).

Die charakteristische Gleichung des ersten Beispiels mit der Matrix `([[7,-2,0],[-2,6,-2],[0,-2,5]])` hat die Form

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$

MUPAD bestimmt für die Matrix **A** das charakteristische Polynom und auch die Lösungen der charakteristischen Gleichung.

```
reset()://Eigenwerte und Eigenvektoren
DIGITS:=6:
A:=matrix([[7,-2,0],[-2,6,-2],[0,-2,5]]):
p:=linalg::charpoly(A,l);// l ist Lambda
solve(p)
```

**Ergebnisse:**

$l^3 - 18\, l^2 + 99\, l - 162$

{[l = 3], [l = 6], [l = 9 ]}

Die drei Lösungen sind also: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$

Nun berechnen wir den Eigenvektor $|u_1>$, indem wir $\lambda_1$ in das System (14) einsetzen. Wir erhalten zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Wir setzen willkürlich $u_3 = 1$, was nur Einfluss auf die Länge des Vektors haben wird. Da wir am Ende den Vektor normalisieren werden, wird das Ergebnis nicht verändert. Wir erhalten

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der entsprechende Einheitsvektor lautet

$$\left|e_1\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Die Eigenwerte $\lambda_2$ und $\lambda_3$ führen zu den Eigenvektoren

$$\left|u_2\right\rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \left|u_3\right\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Das sind die Vektoren, die wir oben auf S. 4.4-6 bereits von MUPAD erhielten. Auch hier haben wir den Normalisierungsfaktor 1/3.

Wir können leicht zeigen, dass die Eigenvektoren paarweise *orthogonal* sind. (Man sagt, dass zwei Vektoren **a** und **b** orthogonal sind, wenn ihr Skalarprodukt $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ Null ist.) Z.B. gilt: $\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_2}$ = (-2 -2 +4)/9 =0.

Mit der Bra-Ket-Notation schreiben wir

$$\left\langle e_1 \middle| e_2 \right\rangle = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (18)$$

Diese Eigenschaft der Orthonormalität, d.h.

$$\left\langle e_i \middle| e_k \right\rangle = \delta_{ik}, \qquad (19)$$

besitzen alle symmetrischen Tensoren. Das Symbol $\delta_{ik}$ ist das *Kronecker* - Delta. Sein Wert ist 1, wenn i = k. Wenn i von k verschieden ist, hat das Kronecker-Delta den Wert Null.

Wenn wir die Eigenvektoren eines symmetrischen Operators für seine Matrix-darstellung benutzen, erhalten wir eine Diagonalmatrix. Man spricht auch von einer Hauptachsendarstellung.

Die Elemente eines symmetrischen Tensors **S** erhält man im System der Eigenvektoren mithilfe von

$$\langle e_i|\mathbf{S}|e_k\rangle = \lambda_k\, \delta_{ik} \qquad (20)$$

Denn mit $\mathbf{S}|e_k\rangle = \lambda_k\, |e_k\rangle$ ergibt sich $\langle e_i|\, \mathbf{S}|e_k\rangle = \lambda_k \langle e_i|e_k\rangle = \lambda_k\, \delta_{ik}$ wegen Gl. (19)

Gl. (20) enthält die Elemente einer Diagonalmatrix mit den Eigenwerten als Diagonalelementen. Die Summe der Diagonalelemente nennt man *Spur* (trace) der Matrix:

$$\mathrm{Tr}\, \mathbf{S} = \sum \lambda_k \qquad (21)$$

(MUPAD enthält die Funktion `linalg::tr(A)`.)

Man benutzt oft die Darstellung des symmetrischen Tensors mithilfe einer Summe, die man erhält, wenn man **S** beidseitig mit der Einheitsmatrix **E** multipliziert:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\ \mathbf{S}\ \mathbf{E} = \sum_{ik} |e_i\rangle\langle e_i|S|e_k\rangle\langle e_k| = \sum_{ik} \lambda_k\, \delta_{ik}|e_i\rangle\langle e_k|$$

$$= \sum_k \lambda_k[\sum_i \delta_{ik}|e_i\rangle\langle e_k|] = \sum_k \lambda_k\, |e_k\rangle\langle e_k|.$$

Unter *Hauptachsendarstellung* versteht man oft diese „Summe“:

$$\mathbf{S} = \sum_k \lambda_k\, \mathbf{|e_k\rangle\langle e_k|}. \qquad (22)$$

## 4.4.4 Das Trägheitsellipsoid

Jeder symmetrische Tensor kann geometrisch durch ein Ellipsoid dargestellt werden. Um das zu verstehen, müssen wir einige zusätzliche Begriffe erläutern, z.B. den einer *quadratischen Form*.

Betrachten wir einen Vektor $|r\rangle$. In einer beliebigen orthonormalen Basis $\{|a_i\rangle\}$ können wir den Vektor $|r\rangle$ folgendermaßen darstellen:

$$|r\rangle = \sum_i x_i|a_i\rangle \qquad (23)$$

Wenn wir als Basis das System der Eigenvektoren des Operators **S** benutzen, werden wir folgende Darstellung desselben Vektors $|r\rangle$ erhalten:

$$|r\rangle = \sum_i x'_i|e_i\rangle \qquad (24)$$

Der Ausdruck F(**r**): = $\langle r|S|r\rangle$ wird *quadratische Form* genannt. Den Grund für diese Bezeichnung verstehen wir, wenn wir die rechte Seite entwickeln:

$$\langle r|S|r\rangle = \langle r|(\sum_k S|a_k\rangle x_k) = \sum_i x_i \langle a_i|(\sum_k x_k S|a_k\rangle) = \sum_{ik} x_i x_k \langle a_i|S|a_k\rangle$$

Wir erhalten also

$$F(\mathbf{r}) := \langle r|S|r\rangle = \sum_{ik} x_i x_k S_{ik} \qquad (25)$$

(Eine quadratische Form im $\mathbf{R}^3$ der drei Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$ wird oft folgendermaßen geschrieben

$$F(\mathbf{r}) = S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 + 2S_{12}x_1x_2 + 2S_{13}x_1x_3 + 2\,S_{23}x_2x_3$$

was aber gleich ist $\sum_{ik} x_i x_k S_{ik}$ mit $S_{ik} = S_{ki}$ )

Wenn wir jetzt die Basis $\{|e_i\rangle\}$ der Eigenvektoren von **S** benutzen, können wir $\langle e_i|\mathbf{S}|e_k\rangle = \lambda_k\,\delta_{ik}$ verwenden, um so die sogenannte *kanonische Form* der quadratischen Form zu erhalten:

$$F(\mathbf{r}) = \langle r|S|r\rangle = \sum_{ik} x_i x_k S_{ik} = \sum_k x'^2_k\,\lambda_k \qquad (26)$$

Für unser obiges Beispiel mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$ erhalten wir die folgende kanonische Form:

$$F(\mathbf{r}) = 3x'^2_1 + 6x'^2_2 + 9x'^2_3 \qquad (27)$$

Die Gleichung F(**r**) = c ist die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung. Die Konstante c beeinflusst nur die Größe der Figur. Wir wählen c = 18 und erhalten die folgende Ellipsoiden-Gleichung

$$x'^2_1/6 + x'^2_2/3 + x'^2_3/2 = 1 \qquad (28)$$

mit den Halbachsen $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$.

Die folgende Abbildung wurde mit der Funktion `plot::Implicit3d` erzeugt, die wir schon im Paragraphen 3.4.7 benutzten.

```
p1:=plot::Implicit3d(3*x^2+6*y^2+9*z^2-18,
x=-2.5..2.5,
y=-2..2,
z=-1.5..1.5):
plot(p1)
```

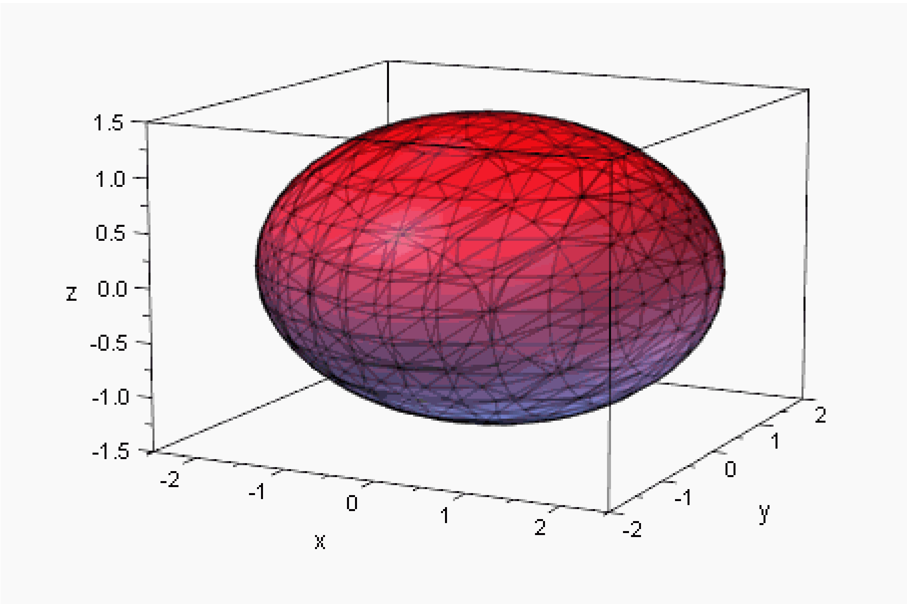


Fig.: 4.4-2