4.3 Das Trägheitsmoment eines starren Körpers

4.3.1 Der Trägheitstensor

Man kann einen starren Körper als eine Gesamtheit von Teilchen ansehen, deren Abstände unveränderlich sind. Dieses spezielle System bewahrt während der Bewegung seine Gestalt. Wenn dieses System („starrer Körper“) sich um eine starre Achse dreht, beschreiben alle seine „Teilchen“ Kreise mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten.

Der gesamte Drehimpuls des Körpers ist

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \qquad (1)$$

Schon im letzten Abschnitt sprachen wir vom Drehimpuls eines Teilchen-systems, aber mit der Einschränkung, dass sich alle Teilchen um die z-Achse drehen sollen. Im allgemeinen Fall, wenn die Drehung um eine beliebige Achse stattfindet, haben wir die beiden Vektorprodukte in Gl. (1) auszuwerten. Mit MuPAD erhalten wir

- ```
  reset():
  mat:=Dom::Matrix():export(linalg):
  r:=mat([[x[i],y[i],z[i]]]):/Vektor r
  w:=mat([[wx,wy,wz]]):/Vektor omega
  lo:=crossProduct(r,crossProduct(w,r));//ohne die
  Massen mi
  lox:=lo[1,1]://Komponente-x von lo
  loy:=lo[1,2]:
  loz:=lo[1,3]:
  factor(lox);
  factor(loy);
  factor(loz)
  ```
  ```

Ergebnisse:

```
array(1..1, 1..3,

(1, 1) = - (wy x[i] - wx y[i]) y[i] - (wz x[i] - wx z[i])
z[i],

(1, 2) = (wy x[i] - wx y[i]) x[i] - (wz y[i] - wy z[i])
z[i],

(1, 3) = (wz x[i] - wx z[i]) x[i] + (wz y[i] - wy z[i])
y[i])
```

vereinfacht:

$$wx\ y[i]^2 + wx\ z[i]^2 - wy\ x[i]\ y[i] - wz\ x[i]\ z[i]$$

$$wy\ x[i]^2 + wy\ z[i]^2 - wx\ x[i]\ y[i] - wz\ y[i]\ z[i]$$

$$wz\ x[i]^2 + wz\ y[i]^2 - wx\ x[i]\ z[i] - wy\ y[i]\ z[i]$$

Diese Ausdrücke müssen wir mit den Massen multiplizieren und anschließend addieren. Wenn wir die folgenden Terme einführen, vereinfacht sich das Ergebnis beträchtlich:

$$I_{xx} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) \qquad I_{yy} = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) \qquad I_{zz} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum m_i\, x_i\, y_i \qquad I_{yz} = I_{zy} = - \sum m_i\, y_i\, z_i \qquad I_{zx} = I_{xz} = - \sum m_i\, x_i\, z_i$$

(2)

Die drei Komponenten von **L** schreiben sich mit diesen Summen folgendermaßen:

$$L_x = I_{xx}\, \omega_x + I_{xy}\, \omega_y + I_{xz}\, \omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\, \omega_x + I_{yy}\, \omega_y + I_{yz}\, \omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\, \omega_x + I_{zy}\, \omega_y + I_{zz}\, \omega_z \qquad (3)$$

Die neun Terme (2) können wir als Elemente der folgenden Matrix betrachten:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Die sechs Gleichungen (2) lassen sich durch eine Gleichung ausdrücken:

$$I_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} - x_i^{(k)} x_j^{(k)}) \qquad (5)$$

$x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ sind die x-y-z-Koordinaten des k-ten Teilchens. Das Symbol δ_{ij} ist das Kronecker-Delta. Für $i \neq j$ ist sein Wert 0, sonst ist er 1.

Je nach Kontext nennt man eine Struktur wie (4) *Matrix, Operator, Dyade* oder *Tensor* (zweiter Ordnung). Ein Tensor 2. Ordnung ist demnach eine Größe, zu deren Darstellung neun Komponenten benötigt werden.
In unserem Fall handelt es sich um einen *symmetrischen* Tensor, wie man an den Ausdrücken (2): $I_{xy} = I_{yx}$ usw. sehen kann. Man kann einen Tensor auch definieren als eine Verallgemeinerung eines Vektors, den man als Tensor 1. Ordnung ansehen kann. Einen Vektor können wir geometrisch durch einen Pfeil darstellen. Später werden wir sehen, dass ein Tensor durch ein Ellipsoid dargestellt werden kann.

Die Größen I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} sind die *Trägheitsmomente* des Körpers in Bezug auf die angegebenen Achsen. Die Ausdrücke I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} heißen *Trägheitsprodukte* in Bezug auf die Koordinatenachsen. Eine Achse heißt *Hauptträgheitsachse*, wenn das zugehörige Trägheitsprodukt Null ist. I_{xx}, I_{yy} und I_{zz} werden dann *Hauptträgheitsmomente* genannt.
Die drei Gleichungen (3) können wir nun folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{L_A} = \mathbf{I_A} \cdot \boldsymbol{\omega} \qquad (6)$$

A ist ein beliebiger Refernzpunkt, der mit dem Körper in Verbindung steht, z.B. das Massenzentrum (CM). Wir können diese Gleichung wie folgt interpretieren: Der Operator **I** wird auf den Vektor **ω** angewandt und erzeugt einen neuen Vektor **L**, dessen Richtung normalerweise nicht mit der von **ω** zusammenfällt, d.h. i. Allg. haben **L** und **ω** verschiedene Richtungen.
Die Elemente I_{ij} von (5) sind die Matrixelemente des Operators **I**.

(Oft ist es sehr nützlich, die folgende Notation zu benutzen, die von **Dirac** in die Quantenmechanik eingeführt wurde. Wir schreiben dann statt (6) folgende Gleichung

$$|L_A\rangle = \mathbf{I_A}\,|\omega\rangle \qquad (7)$$

Die Symbole |L> und |ω> heißen *Ket-Vektoren*. Wir kommen auf diese Schreibweise zurück.)

Für jeden Körper existieren wenigsten drei senkrechte Achsen, die Hauptachsen, die die Eigenschaft haben, dass **L** und **ω** parallel sind, falls die Drehung um eine dieser Hauptachsen erfolgt. Der Vektor **ω** der Winkelgeschwindigkeit liegt immer in der Drehachse. Bei einem symmetrischen Körper fallen die Hauptachsen mit einigen der Symmetrieachsen zusammen. Bei einer Kugel ist jede Achse, die durch ihren Mittelpunkt geht, eine Hauptachse. Bei einem zylindersymmetrischen Körper ist die Symmetrieachse eine Hauptachse.

Die technische Bedeutung der Hauptachsen liegt darin, dass kein äußeres Drehmoment vorhanden sein muss, um den Körper in Rotation zu halten, falls seine Drehachse mit einer der Hauptachsen zusammenfällt. Ein starrer Körper, der sich um eine Hauptachse dreht, bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, wenn kein äußeres Drehmoment wirkt.
Wir können diesen Sachverhalt ansehen als Trägheitsgesetz der Drehbewegung.
L = **I** · **ω** ist bei Drehbewegungen das, was **p** = m **v** bei der Translation ist.
Der Tensor **I** stellt eine Art „Drehmasse“ dar. Aber **I** enthält nicht nur die träge Masse des rotierenden Körpers, er enthält auch Information über die *Verteilung* der Masse im Körper. Wenn der Körper nicht starr wäre, würde sich die Masseverteilung ändern, und die Bedingung **I ω** = **konst**. verlangt, dass dann, wenn I zu- oder abnimmt, ω ab- oder zunimmt. Dieser Tatbestand findet vielfache Anwendungen. Z.B. kann eine Schlittschuhläuferin (trifft auch auf Läufer zu) ihre Arme und Beine anlegen, um ihr Trägheitsmoment zu reduzieren und dadurch ihre Winkelgeschwindigkeit zu erhöhen. Wenn sie ihre Arme ausstreckt, vergrößert sich ihr Trägheitsmoment, und ihre Winkelgeschwindigkeit verringert sich.

In Abschnitt 4.2 sahen wir die Beziehung **M** = d**L**/dt für das Drehmoment der äußeren Kräfte. Im Falle eines starren Körpers nimmt sie die folgende Form an

$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt = d(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})/dt = d\mathbf{I}/dt \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I} \cdot d\boldsymbol{\omega}/dt \qquad (8)$$

Wenn die Komponenten des Trägheitstensors nicht von der Zeit abhängen, erhalten wir die folgende Gestalt des zweiten Newton´schen Gesetzes für einen starren Körper:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (9)$$

Im folgenden **Beispiel** werden wir den Trägheitstensor für ein Wassermolekül berechenen, das wir als starren Körper ansehen wollen.

Die Entfernung H-O beträgt $0{,}96 \cdot 10^{-10}$ m = 0,096 nm. Der Winkel zwischen den beiden H-O-Bindungen beträgt 105^o.
Bestimme die Trägheitsmomente des Moleküls in Bezug auf sein Massenzentrum CM.

Lösung:

Zunächst bestimmen wir die Ortsvektoren der Atome in Bezug auf CM, den wir zugleich als Ursprung des Koordinatensystems ansehen wollen.

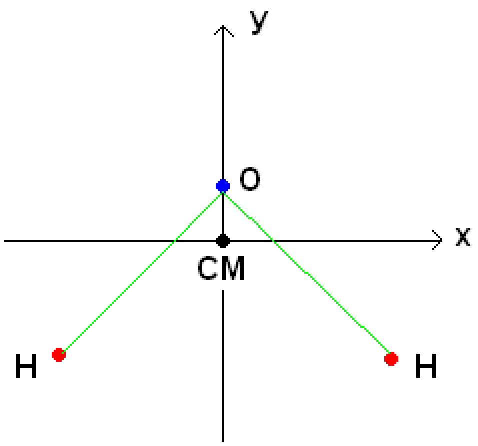

Fig.: 4.3-1

Wir benutzen die Definition des CM, nämlich $\mathbf{r_{cm}} = \sum m_i \, \mathbf{r}_i / \sum m_i := \mathbf{0}$, und ein wenig Geometrie, z.B.: x/0,96 =sin 52,5 usw., und erhalten für die Ortsvektoren

$\mathbf{r}(O) = (0, 0.065) \cdot 10^{-10}$ m

$\mathbf{r}(H_{links}) = (-0.76, -0.52) \cdot 10^{-10}$ m

$\mathbf{r}(H_{rechts}) = (0.76, -0.52) \cdot 10^{-10}$ m

Die y-Koordinate des Sauerstoffatoms beträgt –y/8, worin y die Koordinate des H-Atoms ist. Die Komponenten des Trägheitstensors berechnen wir mit MuPAD, indem wir die Beziehungen (2) benutzen.

Der Faktor u enthält die Masse des Protons, $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g, und die Potenz $(10^{-8}\text{cm})^2 = 10^{-16}\text{cm}^2$.

Die Trägheitsprodukte verschwinden, d.h. der Tensor hat Diagonalform, und man sagt, dass seine Matrix diagonalisiert ist. Die x-y-z-Achsen, für die die Trägheitsprodukte Null sind, sind die Hauptträgheitsachsen. Die Diagonal-elemente I_{xx}, I_{yy} und I_{zz} heißen Hauptträgheitsmomente oder auch **Eigenwerte** des Operators **I**.
In unserem Fall sehen wir, dass die Koordinatenachsen Hauptträgheitsachsen sind. Ich wiederhole, dass es immer möglich ist, die Hauptträgheitsachsen für einen beliebigen dreidimensionalen starren Körper zu finden.

```
• reset()://H2O-Traegheitstensor

      DIGITS:=5:

      u:=1.67*10^(-40)*g*cm^2://Umwandlungsfaktor

      m[1]:=16:m[2]:=1:m[3]:=1://Massen
      r[1]:=matrix([[0,0.065,0]])://Lage des O-Atoms
      r[2]:=matrix([[-0.76,-0.52,0]]):// H-Atom
      r[3]:=matrix([[0.76,-0.52,0]]):// H-Atom

      Ixx:=(sum(m[i]*(r[i][2]^2+r[i][3]^2), i=1..3)*u);
      Iyy:=(sum(m[i]*(r[i][1]^2+r[i][3]^2), i=1..3)*u);
      Izz:=(sum(m[i]*(r[i][1]^2+r[i][2]^2), i=1..3)*u);
      Ixy:=-(sum(m[i]*(r[i][1]*r[i][2]), i=1..3)*u);
      Iyz:=-(sum(m[i]*(r[i][2]*r[i][3]), i=1..3)*u);
      Izx:=-(sum(m[i]*(r[i][3]*r[i][1]), i=1..3)*u);
```

$1.016e-40\ cm^2\ g$
$1.9292e-40\ cm^2\ g$
$2.9452e-40\ cm^2\ g$
0
0
0

$$I = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 1.93 & 0 \\ 0 & 0 & 2.95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-40} g \cdot cm^2$$

4.3.2 Der homogene symmetrische Körper

Wenn der Körper eine homogene Massenverteilung hat, z.B. eine Billardkugel, haben wir die Summe durch ein Integral zu ersetzen (vgl. vorigen Abschnitt, Gl. (22)). Statt der Summe (5)

$$I_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} - x_i^{(k)} x_j^{(k)}) \qquad (5)$$

verwenden wir das Integral (10)

$$I_{ij} = \int dm (r_s{}^2 \delta_{ij} - x_{s,i} x_{s,j}) \qquad (10)$$

Gl. (10) bezieht sich auf das Massenzentrum des Körpers, was durch den Index s bezeichnet wurde. So erhalten wir zum Beispiel

$$I_{11} := I_{xx} = \int dm (r^2_s - x^2_{s,1}) \qquad (11)$$

Mit $r^2_s := r^2 = x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 := x^2 + y^2 + z^2$ e $x^2_{s,1} := x^2_1 := x^2$, ergibt sich

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm \qquad (12)$$

Das Massenelement dm ersetzen wir durch dm = ρ dV, wo ρ die Dichte ist.

Wenn der Körper eine einfache Symmetrie hat, ist auch die Berechnung der Integrale einfach, vgl. 3.4.11, wo wir das Dreifachintegral $I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\rho dV$ für eine Kugel berechneten. Mit ρ = 1 erhielten wir das Resultat $I_{zz} = 8\pi R^5/15$.

Ich wiederhole kurz, was ich schon 3.4.11 sagte:

Das zu berechnende Integral war $I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\rho dxdydz$, oder in Kugel-koordinaten:

$$I_{zz} = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3(\vartheta) d\varphi d\vartheta dr \qquad (13)$$

Mit der Schreiweise von MuPAD haben wir

- ```
  Izz:=rho*int(int(int(r^4*(sin(theta))^3,
  phi=0..2*PI),theta=0..PI),r=0..R)
  ```

$$\frac{8 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \mathrm{rho}}{15}$$
  ```

Wir erhielten also dasselbe Resultat, obgleich die Reihenfolge der Integration umgekehrt war.

Im Falle einer Kugel mit ihrer vollkommenen Symmetrie können wir ein Dreifachintegral durch ein einfaches über r ersetzen. Um dies zu bewerkstelligen, müssen wir die Kugel in dünne Schalen zerlegen (vgl. Zwiebel!), wobei dr die Schalendicke ist. Das Volumenelement ist gleich dem Volumen einer Schale, d.h. $dV = 4\pi r^2 \cdot dr$.

Wir schreiben $I_o := I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ und erhalten

$3I_o = \rho\int(y^2 + z^2)dV + \rho\int(x^2 + z^2)dV + \rho\int(x^2 + y^2)dV$, d.h.

$$I_o = [2\rho\int(x2 + y2 + z^2)dV]/3.$$

Wir integrieren und erhalten: $I_0 = \frac{2}{3}\rho 4\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$ (14),

also dasselbe Ergebnis wie vorher. I_o ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse, die durch CM geht. Alle Entfernungen müssen von dieser Achse aus gemessen werden.

Wir berechnen jetzt das Trägheitsmoment eines homogenen **Balkens** in Bezug auf eine Achse, die senkrecht auf dem Balken steht und durch CM geht.

Die Länge des Balkens sei L und überall vom gleichen Querschnitt S. Wenn M seine Masse ist, haben wir $\rho = dm/dV = M/V = M/(SL)$.
Wir schneiden den Balken in dünne Scheiben der Dicke dx mit dem Abstand x von der Achse. Mit $dV = S\,dx$ haben wir $dm = Mdx/L$. Das Integral reicht von -L/2 bis +L/2:

$$I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = 2\int_0^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx$$

D.h.: $I_o = ML^2/12$.

Wenn die Achse durch den Endpunkt A geht, müssen wir von 0 bis L integrieren, und das Ergebnis ist $I_A = ML^2/3$, d.h. viermal so groß wie vorhin.

Die Berechnung von Trägheitsmomenten in Bezug auf *parallele Achsen* ist sehr einfach, wenn man den *Satz von Steiner* benutzt: $I_A = I_o + M a^2$, mit a = Achsenabstand. In unserem Fall mit a = L/2 erhalten wir ohne Integration

$$I_A = ML^2/12 + M L^2/4 = ML^2/3.$$

(Später werden wir den Steiner'schen Satz beweisen.)

Die nächste Figur zeigt eine *Ecke* (Tetraeder = Körper mit vier Flächen), beschränkt durch die Koordinatenebenen und von der Ebene z(x,y) = a(1-x/b - y/c). Berechne die Komponenten des Trägheitstensors in Bezug auf den Koordinatenursprung O.

- `a:=3:b:=3:c:=3:`

```
plot(plot::Implicit3d(z+a*x/b+a*y/c-a,
x=0..4,y=0..4,z=0..4))
```

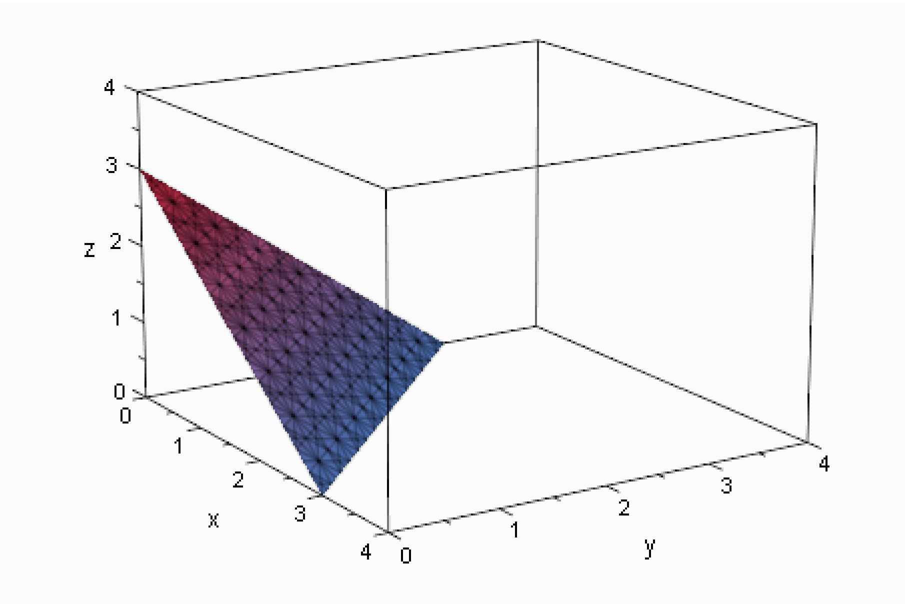

Fig.: 4.3-2

Die direkte Berechnung ist möglich, aber mühsam, vgl. *Mit Bleistift und Papier.* Um uns zu orientieren, schauen wir uns nochmals die Gleichungen (2) an:

$$I_{xx} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) \qquad I_{yy} = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) \qquad I_{zz} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum m_i\, x_i\, y_i \qquad I_{yz} = I_{zy} = - \sum m_i\, y_i\, z_i \qquad I_{zx} = I_{xz} = - \sum m_i\, x_i\, z_i$$

Um I_{xx} zu berechnen, brauchen wir die Summe $y^2 + z^2$, wir wählen $\rho = 1$.

Die x-Werte laufen von $x_1 = 0$ bis $x_2 = b$, die y-Werte gehen von $y_1 = 0$ bis $y_2 = c(1-x/b)$.

- ```
  reset():
  int(int(int(y^2+z^2,z=0..a*(1-x/b-y/c)),
  y=0..c*(1-x/b)),x=0..b):
  simplify(%)
  ```

```
a b c (a^2 + c^2)
---------------
60
```

Um dieses Ergebnis manuell zu erhalten, brauchen wir einige Seiten Papier und dürfen uns nicht verrechnen!

4.3.3 Mit Bleistift und Papier.

Wir berechnen nun I_{yz} von Hand.

$$I_{yz} = \rho \int_0^b dx \int_0^{c(1-x/b)} ydy \int_0^{a(1-x/b-y/c)} zdz$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, schreiben wir $I_{yz} = \rho\int_x dx \int_y ydy \int_z zdz$.
Wir werten das letzte Integral aus und erhalten

$$I_{yz} = \rho\int_x dx \int_y ydy\, [a^2(1-x/b-y/c)^2/2]$$

Nun haben wir $y(1-x/b-y/c)^2 = y(1-2x/b+x^2/b^2) + y^2(2x/(bc) - 2/c) + y^3/c^2$, und die Rechnung geht wie folgt weiter:

$$I_{yz} = a^2\rho/2 \cdot \int_x (1-2x/b+x^2/b^2)dx \cdot \int_y ydy + a^2\rho/2 \cdot \int_x dx \cdot \int_y y^3/c^2\, dy + $$
$$+a^2\rho/2 \cdot \int_x (2x/(bc)-2/c)dx \cdot \int_y y^2 dy\ ,$$

$$= a^2\rho c^2/4 \cdot \int_x (1-x/b)^4\, dx + a^2\rho c^2/8 \int_y (1-x/b)^4 dx +$$
```

$+ a^2\rho c^3/6 \cdot \int_x (2x/(bc) - 2/c)(1-x/b)^3\, dx,$

$= a^2bc^2\rho/20 + a^2bc^2\rho/40 - a^2bc^2\rho/15 = \mathbf{a^2bc^2\rho/120}$

Ich habe einige Schritte übersprungen, um auch Ihnen etwas Freude zu lassen.

Mit MuPAD erhält man dasselbe Ergebnis, nur etwas billiger:

```
• reset():
  int(int(int(rho*y*z,z=0..a*(1-x/b-y/c)),
  y=0..c*(1-x/b)),x=0..b):
• simplify(%)
```

$$\frac{a^2 \cdot b \cdot c^2 \cdot \mathrm{rho}}{120}$$

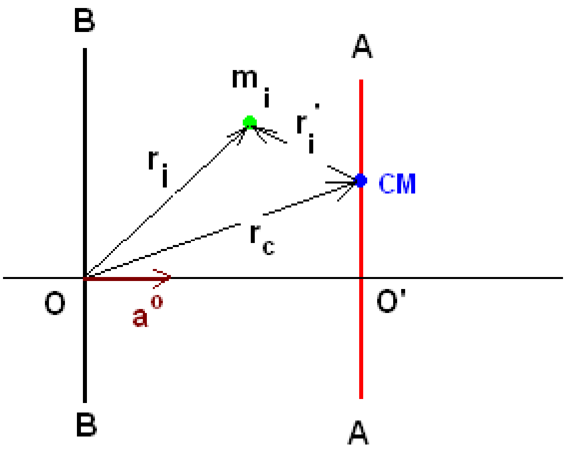

Fig.:4.3-3

Wie schon angekündigt, schauen wir uns jetzt den Beweis eines einfachen Satzes an, der von großer praktischer Bedeutung ist, wenn es um die Berechnung des Trägheitsmomentes geht, nämlich den Satz von **Steiner** (J. Steiner, 1796 bis 1863), auch Satz der parallelen Achsen.

Betrachten wir zwei parallele Rotationsachsen eines starren körpers, Fig. 4.3-3. Wir wollen annehmen, dass die Achse AA durch den Schwerpunkt CM des Körpers geht. Der senkrechte Abstand zwischen den beiden Achsen sei *a*.

In 4.3-3 lesen wir ab $\mathbf{r_i} = \mathbf{r_c} + \mathbf{r'_i}$, worin $\mathbf{r_i}$ der Ortsvektor der Masse m_i in Bezug auf den Ursprung O ist. $\mathbf{a^o}$ ist ein zu den Achsen senkrechter Einheitsvektor, $\mathbf{r_c}$ ist der Ortsvektor von CM bezüglich O. $\mathbf{r_i}'$ ist der Ortsvektor vom m_i in Bezug auf CM. Der Abstand der Masse m_i von der Achse BB ist gegeben durch die Projektion des Vektors $\mathbf{r_i}$ auf den Vektor $\mathbf{a^o}$. (Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes interessieren nur die senkrechten Koordinaten bezüglich der betrachteten Achse.)
Das Trägheitsmoment aller Teilchen in Bezug auf BB ist gegeben durch

$$I_{BB} = \sum m_i\,(\mathbf{r_i}\cdot\mathbf{a^o})^2, \qquad (15)$$

$\mathbf{r_i}\cdot\mathbf{a^o}$ ist die Projektion des Vektors $\mathbf{r_i}$ auf $\mathbf{a^o}$, ist also der Abstand des Teilchens m_i von der Achse BB. $\mathbf{r_i'}\cdot\mathbf{a^o}$ ist der Abstand von m_i von der Achse AA, die durch CM geht.
Das Trägheitsmoment der Teilchen in Bezug auf AA ist

$$I_{CM} = \sum m_i\,(\mathbf{r_i'}\cdot\mathbf{a^o})^2. \qquad (16)$$

Substituiert man in (15) $\mathbf{r_i}$ durch $\mathbf{r_c} + \mathbf{r'_i}$, so erhält man

$$I_{BB} = \sum m_i\,[(\mathbf{r_c} + \mathbf{r'_i})\cdot\mathbf{a^o}]^2$$

$$= \sum m_i(\mathbf{r_c}\cdot\mathbf{a^o} + \mathbf{r_i'}\cdot\mathbf{a^o})^2$$

$$= \sum m_i\,(\mathbf{r_c}\cdot\mathbf{a^o})^2 + \sum m_i\,(\mathbf{r_i'}\cdot\mathbf{a^o})^2 + 2\sum m_i\,(\mathbf{r_c}\cdot\mathbf{a^o})\cdot(\mathbf{r_i'}\cdot\mathbf{a^o})$$

$$= a^2\sum m_i + \mathbf{I_c} + 2a(\sum m_i\,\mathbf{r_i'})\cdot\mathbf{a^o} = \mathbf{I_c + M\,a^2}$$

$\sum m_i\,\mathbf{r_i'} = \mathbf{0}$, da $\mathbf{r_c} = \sum m_i\,(\mathbf{r_i'} + \mathbf{r_c})/M$. Es gilt also $M\,\mathbf{r_c} = \mathbf{r_c}\sum m_i + \sum m_i\,\mathbf{r_i'}$, woraus folgt, dass $\sum m_i\,\mathbf{r_i'} = \mathbf{0}$.

Um das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Achse zu berechnen, ermitteln wir zunächst das Moment in Bezug auf eine parallele Achse, die durch CM geht. Dann addieren wir hierzu das Trägeitsmoment in Bezug auf die gegebene Achse, wobei wir so tun, als wäre die Gesamtmasse in CM konzentriert. Wenn der Körper keinerlei Symmetrie haben sollte, müssen wir das Trägheitsmoment auf experimentelle Art bestimmen.