4.2 Drehimpulserhaltung

4.2.1 Der Drehimpuls und das Drehmoment

Bis jetzt haben wir den zweiten Teil der Mach´schen Experimente noch nicht benutzt, vgl. Kapitel 2,Gl. (2.3). Hier ist diese Gleichung nochmals, aber mit anderen Indizes

$$\mathbf{r_1} \times m_1\mathbf{a_1} + \mathbf{r_2} \times m_2\mathbf{a_2} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Diese Gleichung gilt für jede Art von Wechselwirkung. Im Falle der Drehung ist der Begriff *Drehmoment* sehr nützlich. Es spielt bei Drehungen eine ähnliche Rolle wie die *Kraft* im Falle von Translation.

Das Drehmoment **M** (oder auch $\boldsymbol{\tau}$ *torque*) der Kraft **F** in Bezug auf einen festen Punkt O in einem Inertialsystem ist als Vektorprodukt definiert:

$$\mathbf{M} := \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (2)$$

Der Vektor **r** bestimmt den Ort (daher *Ortsvektor*) eines Teilchens in Bezug auf O. Mit dem Begriff *Drehmoment* können wir Gl. (1) folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{M_1} + \mathbf{M_2} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

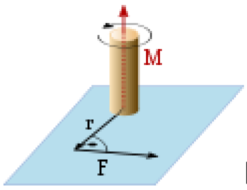
Wir werden sehen, dass diese Gleichung ein neues Erhaltungsgesetz enthält, ein Gesetz, das auch dann noch gilt, wenn die Wechselwirkung nicht mehr vorhanden ist. Gl. (3) aber hat nur dann einen physikalischen Sinn, wenn eine WW existiert.

Zunächst führen wir eine neue Größe ein, nämlich den *Drehimpuls* **L** eines Teilchens der Masse m:

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (4).$$

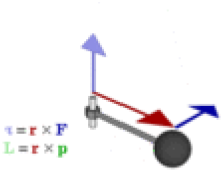
Diese Gleichung verbindet Translation (**p**) und Rotation (**L**). Der Gesamtdrehimpuls eines Systems ist die Vektorsumme der Drehimpulse seiner Teilchen. Bei nur zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 haben wir

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2} = \mathbf{r_1} \times \mathbf{p_1} + \mathbf{r_2} \times \mathbf{p_2} \qquad (5)$$



Drehmoment **M**

Drehimpuls **L**



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torque_animation.gif

Dieser Vektor **L** hat die bemwerkenswerte Eigenschaft, unabhängig von der Zeit zu sein, denn es gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{o} \qquad (6)$$

(Wird in **4.2.4** gezeigt.)
Die Anfangsbedingungen bestimmen Richtung, Richtungssinn und Betrag des Vektors **L.**
Da **L** von der Zeit unabhängig ist, gilt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2} = \mathbf{r_1} \times \mathbf{p_1} + \mathbf{r_2} \times \mathbf{p_2} = \mathbf{konst.} \qquad (7)$$

Das Resultat **L = konst.** bedeutet, dass die Richtung von **L** unverändert bleibt; und damit bleibt auch die Orientierung der Bewegungsebene, die von $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ aufgespannt wird, im Raum fest.

Außerdem bleiben auch, wie schon gesagt wurde, Betrag und Richtungssinn von **L** unverändert. Das hat zur Folge, dass die beiden Partikeln, die in WW stehen, sich immerfort in derselben Ebene bewegen müssen, ohne die Richtung ihrer Bewegung ändern zu können.

Wenn sich ihr Massenzentrum (CM oder MM) gleichförmig geradlinig bewegen würde, vgl. 4.1.1, so würde sich auch die Ebene der Massenpunkte zusammen mit CM bewegen. Das folgende Programm zeigt uns dieses Verhalten.

```
• reset():
  /*zwei Körper (Teilchen) mit derselben Masse sind
  durch einen Stab miteinander verbunden und bewegen
  sich drehend auf der durch CM gehenden Geraden*/
  x1:=2*cos(2*PI*t): //Teilchen 1
  y1:=3*t+2*sin(2*PI*t):
  z1:=2*t:
  kurve1:=plot::Curve3d([x1(t),y1(t),z1(t)],
  t=0..u,u=0..2,Color=RGB::Red):
  p1:=plot::Point3d([x1,y1,z1],PointSize=3*unit::mm,
  t=0..2,Color=RGB::Red):

       x2:=-2*cos(2*PI*t)://Teilchen 2
       y2:=3*t-2*sin(2*PI*t):
       z2:=2*t:
       kurve2:=plot::Curve3d([x2(t),y2(t),z2(t)],
       t=0..u,u=0..2,Color=RGB::Blue):

  p2:=plot::Point3d([x2,y2,z2],PointSize=3*unit::mm,
  t=0..2,Color=RGB::Blue):

       //Gerade des CM:
       x3:=0:
       y3:=3*t:
       z3:=2*t:
       kurve3:=plot::Curve3d([x3(t),y3(t),z3(t)],
       t=0..u,u=0..2,Color=RGB::Green):

       p3:=plot::Point3d([x3,y3,z3],PointSize=3*unit::mm
       ,
       t=0..2,Color=RGB::Green):

       //Stab:

  l:=plot::Line3d([x1,y1,z1],[x2,y2,z2],t=0..2,Color=RGB
  ::Black):
  c:=plot::Circle3d(2,[x3,y3,z3],t=0..2,Color=RGB::Black
  ):

       plot(p1,p2,p3,l,c,kurve1, kurve2,kurve3)
```

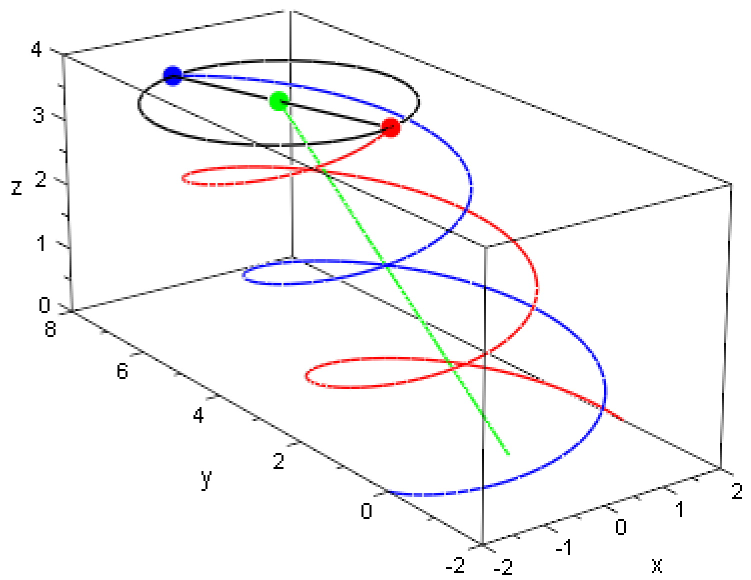


Fig.4.2-1

Die Bewegung des Zweikörpersystems verläuft in einer Ebene, die sich an der Spitze des Vektors $\mathbf{r_c}$ befindet. Die Spitze dieses Ortsvektors bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Geraden $\mathbf{r_c} = \mathbf{r_{co}} + \mathbf{v_{co}}\ t$. Im Programm benutzen wir $\mathbf{r_{co}} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{v_{co}} = [0, 3, 2]$.

Das **Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses** formulieren wir folgendermaßen:

Der gesamte **Drehimpuls** eines isolierten Systems ist konstant in Betrag, Richtung und Richtungssinn.

Dieses Gesetz ist eines der fundamentalen Erhaltungssätze in der Natur. Es wurde sogar in Situationen bestätigt, in denen die Newton'schen Gesetze nicht gelten (z.B. wenn es sich um Teilchen mit sehr großen Geschwindigkeiten handelt oder wenn sie von subatomaren Dimensionen sind).
Bis jetzt bestand unser System nur aus zwei Teilchen, aber es ist leicht zu zeigen, dass der Satz für jedes Teilchensystem gilt.
Ein Beispiel, das die Gültigkeit von **L** = **konst.** zeigt, ist unser Sonnensystem, das wir als isoliert betrachten können. Dieses System hat als Ganzes einen konstanten Drehimpuls in Bezug auf sein Massenzentrum.

4.2.2 Zerlegung des Drehimpulses

Oft ist es praktisch, den Gesamtdrehimpuls in Bezug auf einen Punkt O zu zerlegen in einen Anteil, der sich auf CM bezieht und einen anderen, der den Drehimpuls der in CM gedachten Gesamtmasse darstellt. D.h.:

$$\mathbf{L} = \sum m_i\,(\mathbf{r'}_i \times \mathbf{v'}_i) + \mathbf{r_c} \times M\,\mathbf{v_c} \quad := \mathbf{L_{int}} + \mathbf{L_{ext}} \qquad (8)$$

$\mathbf{r_c}$ und $\mathbf{v_c}$ sind Position und Geschwindigkeit des CM in Bezug auf den Punkt O, $\mathbf{r'}_i$ und $\mathbf{v'}_i$ sind Position und Geschwindigkeit des Teilchens i in Bezug auf CM. O ist ein bestimmter Punkt im Labor, das wir als ein Inertialsystem ansehen können (Bezugssystem L). Vgl. Fig. 4.2.2

Der erste Term auf der rechten Seite gibt den *inneren* Drehimpuls (den **Spin**) in Bezug auf CM. Der zweite Term ist der *externe* Drehimpuls in Bezug auf den Punkt O im System L. Man nennt $\mathbf{L_{ext}} = \mathbf{r_c} \times M\,\mathbf{v_c}$ auch den **Bahndrehimpuls**. Im Falle des Wasserstoffatoms besteht der Drehimpuls des Atoms aus dem Spin und dem Bahndrehimpuls des Elektrons.

Die Figur 4.2.2 zeigt den Fall zweier Teilchen. Der Ortsvektor der Masse m_2 in Bezug auf m_1 ist der Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} := \mathbf{r_{12}}$, der von m_1 nach m_2 zeigt. Die Vektoren $\mathbf{p_1}'$ und $\mathbf{p_2}'$ haben die Summe Null: $\mathbf{p_1}' + \mathbf{p_2}' = \mathbf{0}$, sie bilden ein *Vektor-paar*. Der innere Drehimpuls ist $\mathbf{L_{int}} = \mathbf{r_1}' \times \mathbf{p_1'} + \mathbf{r_2'} \times \mathbf{p_2'}$, wo $\mathbf{p_1'} = m_1\mathbf{v_1'}$ und $\mathbf{p_2'} = m_2\mathbf{v_2'}$. Mit der *reduzierten Masse* μ, definiert durch $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$, des Systems zweier Teilchen gelangen wir zu einer sehr einfachen Form für **L**.

Mit $\mathbf{P'} = m_1\mathbf{v_1'} + m_2\mathbf{v_2'} = \mathbf{0}$ erhalten wir

$$\mathbf{L_{int}} = \mu(\mathbf{r_1'} \times \mathbf{v_1'} - \mathbf{r_1'} \times \mathbf{v_2'} - \mathbf{r_2'} \times \mathbf{v_1'} + \mathbf{r_2'} \times \mathbf{v_2'}) = \mu[(\mathbf{r_2'} - \mathbf{r_1'}) \times (\mathbf{v_2'} - \mathbf{v_1'})]$$

Mit Hilfe der Vektoren $\mathbf{r} = \mathbf{r_2'} - \mathbf{r_1'} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ und $\mathbf{v} = \mathbf{v_2'} - \mathbf{v_1'} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}$, erhalten wir schließlich den Ausdruck

$$\mathbf{L_{int}} = \mu\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} \qquad (9)$$

> Der innere Drehimpuls eines Systems zweier Teilchen ist also gleich dem Drehimpuls eines fiktiven Teilchens der Masse μ und dem Positionsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$, das sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}$ bewegt.

In dem Ausdruck (9) erscheinen keine auf den Schwerpunkt bezogenen Koordi-naten (System C) mehr, alle Größen sind relativ.

Wenn wir den inneren Drehimpuls des Systems Elektron-Proton (Wasserstoff-atom) berechnen wollen, so bedeuten **r** und **v** Orts-und Geschwindigkeitsvektor des Elektrons in Bezug auf das Proton. μ ist die reduzierte Masse der beiden Teilchen. Da die Masse m_1 des Protons 1836 mal größer ist als die Masse m_2 des Elektrons, ergibt sich $\mu \approx m_2$. Das können wir leicht erkennen, denn es gilt $\mu = m_1 \cdot m_2/(m_1+m_2) = m_2/(1+m_2/m_1)$.

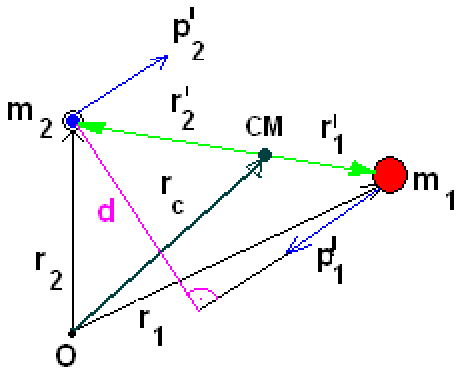


Fig.4.2-2

Das System Erde - künstlicher Satellit hat $\mu \approx m_{Satellit}$, da die Masse m_1 der Erde sehr viel größer ist als die Masse m_2 des Satelliten.

Es ist interessant, dass sich auch das 2. Newton'sche Gesetz für die fiktive Masse μ formulieren lässt, denn die Bewegungsgleichungen der beiden Massen, d.h.

$$m_1 \cdot d^2\mathbf{r_1}/dt^2 = -\mathbf{F} \quad \text{und} \quad m_2 \cdot d^2\mathbf{r_2}/dt^2 = \mathbf{F},$$

nehmen mit $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ folgende Form an: $m_2 \cdot d^2\mathbf{r_2}/dt^2 = (m_1 + m_2)\,\mathbf{F}/m_1$. Dies aber lässt sich schreiben als

$$\mathbf{F} = \mu \cdot d^2\mathbf{r}/dt^2 \qquad (10)$$

Diese Gleichung können wir interpretieren als Bewegungsgleichung der Masse μ in Bezug auf ein in m_1 ruhendes Koordinatensystem.

Die Kraft zwischen den Teilchen hat die Gestalt einer **Zentralkraft**, d.h. $\mathbf{F} = F(r)\cdot\mathbf{r^o}$, worin $\mathbf{r^o}$ ein Einheitsvektor ist mit Richtung und Richtungssinn von **r**. $\mathbf{F} = F(r)\cdot\mathbf{r^o}$ ist die Kraft, die m_1 auf m_2 ausübt, und r ist die Entfernung zwischen m_1 und m_2. F(r) kann z.B. die Gravitationskraft sein: $F(r) = - G\cdot m_1 m_2/r^2$. (Vgl. auch 4.5-11.) Wir dürfen nicht den Fehler machen, μ anstelle von m_2 zu benutzen.

Das Ziel einer Bahnberechnung, meist numerisch, ist die Bestimmung von **r** in Funktion der Zeit. Haben wir **r** berechnet, so sind noch $\mathbf{r_1}$ und $\mathbf{r_2}$ zu bestimmen. Dies können wir mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{r_c} - m_2\,\mathbf{r}/\,(m_1+ m_2) \quad \text{und} \quad \mathbf{r_2} = \mathbf{r_c} + m_1\,\mathbf{r}/\,(m_1+ m_2) \qquad (11)$$

erledigen. Mit Hilfe von Fig. 4.2-2 können wir noch die Ortsvektoren im Schwerpunktssystem C bestimmen:

$$\mathbf{r'_1} = -\mu\,\mathbf{r}/m_1; \quad \mathbf{r'_2} = \mu\,\mathbf{r}/m_2; \quad \mathbf{r'_1} = -m_2\,\mathbf{r'_2}/m_1 \qquad (12)$$

Die Beziehungen (10) und (12) ergeben dann die Bewegungsgleichungen im C-System:

$$m_1 \cdot d^2\mathbf{r'_1}/dt^2 = -\mathbf{F} \qquad (13)$$

$$m_2 \cdot d^2\mathbf{r'_2}/dt^2 = \mathbf{F} \qquad (14)$$

Es reicht, die Differentialgleichung (14) zu lösen, denn mit $\mathbf{r'_1} = -m_2\,\mathbf{r'_2}/m_1$ erhalten wir $\mathbf{r'_1}$.

4.2.3 Das zweite Kepler´sche Gesetz.

Schauen wir uns nochmals die Gleichung **L** = **konst.** für den Fall eines Zweikörpersystems an. Eine traurige Konsequenz dieses Erhaltungsgesetzes des Drehimpulses ist die Tatsache, dass die Teilchen niemals ihre Bewegungsebene verlassen oder die Bewegungsrichtung ändern können.
Es war der deutsche Mathematiker und Astronom Johannes **Kepler** (1571-1630), der eine Großteil seines Lebens dem Studium der Bewegung des Systems „Sonne-Planeten“ gewidmet hat, und dem es gelang, drei Gesetze für die Planetenbewegung zu formulieren.

Erstes Gesetz (Gesetz der Bahnen):

Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte.

Zweites Gesetz (Flächensatz):

Das Geradenstück, das einen Planeten mit der Sonne verbindet, überstreicht in gleichen Zeitabschnitten gleich große Flächenstücke, d.h. dA/dt ist konstant.

Drittes Gesetz (Gesetz der Umlaufzeiten):

Das Quadrat der Umlaufszeit (Periode) eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz der größeren der Bahnhalbachsen.

Wenn wir diese Gesetze aufmerksam lesen, stellen wir fest, dass das 2. Gesetz und der Teil des 1. Gesetzes, der sich auf die ebene Bewegung bezieht, Folgerungen aus dem Drehimpulserhaltungssatzes sein müssen.

Die folgende Figur zeigt das analoge Problem des Systems „Erde-Satellit“.

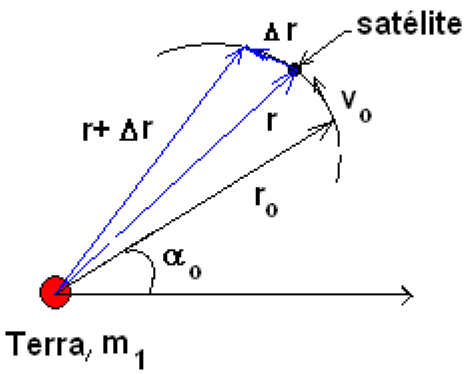


Fig.: 4.2-3

Im Augenblick t = 0 befand sich der Satellit in $\mathbf{r_o}$ und hatte die Geschwindigkeit $\mathbf{v_o}$. Aus $\mathbf{L_c}$ = **konst.** folgern wir, dass sich der Vektor **r** = **r**(t) immer in der von $\mathbf{r_o}$ und $\mathbf{v_o}$ definierten Ebene befinden muss. In der Zeit Δt überstreicht der Vektor **r** die Fläche Δ**A**, die ungefähr die Gestalt eines Dreiecks hat. Demnach gilt:

$\Delta\mathbf{A} \approx [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})]/2 = (\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r})/2$, vgl. den Abschnitt 2.2.3 über das „Vektorprodukt“.

Für Δt –> 0 strebt der Flächeninhalt des Dreicks gegen die vom Satelliten-Vektor überstrichene Fläche ΔA. Wir schreiben also

$\mu\, d\mathbf{A}/dt = \mu\, (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt)/2 = \mu\, \mathbf{r} \times \mathbf{v}/2 = \mathbf{L_c}/2$, d.h.:

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \frac{1}{2\mu}\overline{L}_c = \text{const.} \qquad (15)$$

Diese Gleichung ist die mathematische Formulierung des 2. Gesetzes.

Der Teil des 1. Gesetzes, der sich auf die elliptische Bahnform bezieht, kann nicht aus **L** = **konst.** gefolgert werden.

Nur wenn wir eine Kraft der Gestalt **F** = F(r)·$\mathbf{r^o}$ einführen, wie F(r) = -k/r^n, d.h. eine Zentralkraft, erhält man mit n = 2 und k > 0 elliptische Bahnen, wobei das Kraftzentrum in einem der Brennpunkte liegt.

(Für n = -1 und k > 0, das ist der Fall des harmonischen Oszillators, erhält man ebenfalls elliptische Bahnen. In diesem Fall liegt der Kraftmittelpunkt aber im Zentrum der Ellipse. Vgl. Kapitel 6.)

Die Kepler´schen Gesetze werden das Thema des 5. Kapitels sein. Hier wollte ich nur zeigen, wie das 1. und das 2. Gesetz mit dem Erhaltungssatz des Drehimpulses verbunden sind.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir **ein Teilchen** allein, das sich gleichförmig entlang einer Geraden bewegt.

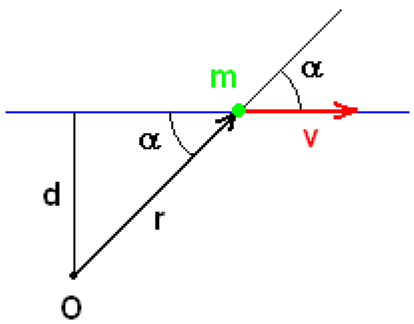


Fig.: 4.2-4

Man könnte denken, dass dieses Teilchen keinerlei Rotation ausführt und daher auch keinen Drehimpuls haben kann. Wir haben aber zu berücksichtigen, dass der Ortsvektor sich um den festen Punkt O dreht. Sollte sich das Teilchen von - ∞ nach + ∞ bewegen, so wird der Winkel α von 180° bis 0° abnehmen.
Im Augenblick der größten Annäherung an das Zentrum O wird die Entfernung d minimal sein -und α genau 90°.

Die Distanz d wird **Stoßparameter** genannt und spielt bei der Beschreibung von Stößen zwischen zwei Teilchen eine große Rolle, vgl. Abschnitt 5.1. (Die beiden „Teilchen“ können ein Elektron und ein Proton sein oder auch die Erde und ein Meteor.)

Der Drehimpuls des Teilchens in Bezug auf den Fixpunkt O ist **L** = **r** x m**v**, vgl. Gl. (4), und hat den Betrag |**L**| = m r v sin α = m v d, denn d = r sin α. Also ist

$$\mathbf{d} = \frac{|\vec{L}|}{m \cdot |\vec{v}|} = \frac{|\vec{L}|}{|\vec{P}|} \qquad (16)$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Teilchens ist gegeben durch (vgl. „Mit Bleistift und Papier“):

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}/r^2 \qquad (17)$$

sodass wir schreiben können

$$|\mathbf{L}| = m\,|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = m\,r^2 \cdot \omega. \qquad (18)$$

Die Größe **I := m r²** heißt **Trägheitsmoment** des Teilchens.

Weiter unten werden wir sehen, dass das Trägheitsmoment ein Maß für die Trägheit eines Körpers gegenüber Rotation ist. Die Berechnung des Trägheitsmomentes ist eines der üblichen Themen in Kursen zur Analysis. Im folgenden Abschnitt werden wir uns u.a. mit der Berechnung von **I** für verschiedene Teilchenanordnungen beschäftigen.

4.2.3 Das Trägheitsmoment eines Teilchensystems

Wir wollen uns vorstellen, dass n Teilchen von feinen, masselosen Stäbchen an einer sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω = dφ/dt drehenden Achse befestigt sind. Die Achse soll in z-Richtung zeigen, sodass gilt: **ω** = **k**· dφ/dt, worin **k** der Einheitsvektor in z-Richtung ist. Alle Teilchen bewegen sich auf Kreisen, die parallel zur x-y-Ebene liegen. Für den Drehimpuls eines einzigen Teilchens gilt

$$\mathbf{L} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\mathbf{r} \times r\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}} \cdot d\varphi/dt = mr^2\omega\,\mathbf{k}, \text{ siehe 3.4.9}$$

(Hilfe: Sei **r** perpendikular zu **ω**, d.h. **r** = r(cosφ**i** + sinφ**j**). Also

$\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\varphi = r(\cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j}) \times (-\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j}) = r(\cos^2\varphi(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - \sin^2\varphi(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = r\mathbf{k})$

In diesem Fall haben wir also:

$$\mathbf{L} = mr^2\omega\, \mathbf{k} \qquad (19)$$

r ist der senkrechte Abstand des Teilchens von der Rotationsachse.
Wenn wir die Drehimpulse $\mathbf{L}_{iz} = m_i\, r^2_i\, \omega\, \mathbf{k}$ aller Teilchen addieren, erhalten wir als Gesamtdrehimpuls in Bezug auf die z-Achse

$$\mathbf{L}_z = I_z \cdot \omega\, \mathbf{k}, \qquad (20)$$

worin $I_z := \sum m_i\, r^2_i$ das Trägheitsmoment des Teilchensystems ist.
Für das Drehmoment $\mathbf{M}_{ext} = d\mathbf{L}/dt$ der äußeren Kräfte ergibt sich

$$\mathbf{M}_{ext} = I \cdot d\boldsymbol{\omega}/dt \qquad (21)$$

Wir sehen also, dass das Drehmoment, das nötig ist, um einem Teilchensystem eine bestimmte Winkelbeschleunigung zu geben, umso größer ist je größer das Trägheitsmoment I ist. Das Trägheitsmoment spielt bei der Rotation eine Rolle analog zu der Rolle der Masse im Falle der Translation.

Einen **Körper**, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine starre Achse rotiert, können wir als ein System betrachten, das aus sehr vielen Teilchen besteht. Jedes Körperteilchen beschreibt einen Kreis, dessen Radius gleich ist seinem Abstand von der Achse. Das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Achse ist $I := \sum m_i\, r^2_i$. Da der Körper ein Kontinuum ist, haben wir die Summe durch ein Integral zu ersetzen

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho\, dV \,, \qquad (22)$$

worin ρ die Dichte der Körpermasse und dV ein Volumenelement ist.

4.2.4 Mit Bleistift und Papier

a. Um Gleichung (6) zu beweisen, gehen wir aus von der Relation d(**r**x**p**)/dt = d**r**/dt x **p** + **r**xd**p**/dt und schreiben:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2\right) =$$

$$= \mathbf{v_1} \text{ x } m_1\mathbf{v_1} + \mathbf{r_1} \text{ x } m_1\mathbf{a_1} + \mathbf{v_2} \text{ x } m_2\mathbf{v_2} + \mathbf{r_2} \text{ x } m_2\mathbf{a_2} = \mathbf{0}$$

da $\mathbf{v_1}$ x $m_1\mathbf{v_1}$ = $\mathbf{v_2}$ x $m_2\mathbf{v_2}$ = **0,** und wegen Gl.(3) haben wir $\mathbf{r_1}$ x $m_1\mathbf{a_1}$ + $\mathbf{r_2}$ x $m_2\mathbf{a_2}$ **= 0**; übrig bleibt nur d**L**/dt = **O.**

b. Nun ist noch Formel (17), **ω** = **r** x **v**/r^2, zu beweisen.

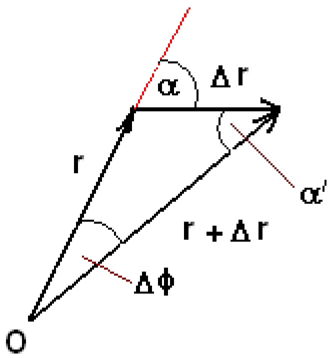


Fig.: 4.2-5

Da ω = Δφ/Δt, können wir schreiben ω ≈ AB/(r·Δt) = |Δ**r**|·sinα'/(r·Δt).
Wenn Δt −>0, haben wir für den Betrag von **ω** den Ausdruck ω = dφ/dt = sinα·v/r.

Der Vektor **ω** steht senkrecht auf den Vektoren **r** und **v**, d.h. **ω ≈ r** x **v.**

Der Proportionalitätsfaktor muss 1/r^2 sein, damit ω = dφ/dt = v·sinα/r.
(|**r** x **v**|/r^2 = r·v·sinα/r^2 = v·sinα/r).
Damit ist die Beziehung **ω** = **r** x **v**/r^2 bewiesen.

4.2.5 Zwei Beispiele zum Drehimpuls

a. Der Drehimpuls der Erde in Bezug auf die Sonne.
   (Um die Aufgabe zu vereinfachen, betrachten wir eine kreisförmige Bahn. Die numerischen Werte sind Näherungswerte.)

Die Erdmasse beträgt $6 \cdot 10^{24}$ kg, und ihre mittlere Entfernung zur Sonne ist $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.
Die Zeit für einen Umlauf um die Sonne (die Periode) beträgt $T = 3 \cdot 10^{7}$ s.

Damit ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne $\omega = 2\pi/T = 2 \cdot 10^{-7}\ s^{-1}$. Das bedeutet: der Drehimpuls der Erde in Bezug auf die Sonne ist $L = mr^2\omega = 2{,}7 \cdot 10^{40}\ kg \cdot m^2/s$ (= J·s).

b. Der Drehimpuls eines Elektrons in Bezug auf den Kern eines H-Atoms.
$m_e = 9 \cdot 10^{-31} kg$, $r = 5{,}3 \cdot 10^{-11} m$, $\omega = 4{,}1 \cdot 10^{16} s^{-1}$

Aus diesen Daten erhalten wir $L = mr^2\omega = 1 \cdot 10^{-34} kg \cdot m^2/s$.

Der Wert von L für das Elektron in einem Wasserstoffatom wird mit $\hbar$ bezeichnet und wird als Einheit des Drehimpulses atomarer Teilchen benutzt. Der Wert von $\hbar$ beträgt „angenähert“ $\hbar = 1.05459 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Die Größe $h = 2\pi \cdot \hbar$ wird **Planck**’sche Konstante genannt. (Max Planck,1858-1947, war ein bedeutender Physiker von großen menschlichen Qualitäten. Er gilt als einer der Begründer der Quantenmechanik. 1918 erhielt er den Nobelpreis.)