4 Erhaltungssätze

Wir müssen zum 2. Kapitel zurückkehren, in dem wir über die Interpretation der Newton´schen Mechanik durch den österreichischen Physiker **Ernst Mach** (1838 –1916) sprachen. Zentrale Punkte in Machs Interpretation sind die Begriffe *Wechselwirkung* und *Masse*. Während die Wechselwirkung zweier Körper vom Mechanismus abhängt, mit dem sich die Körper gegenseitig beeinflussen, ist die Masse eine von der Wechselwirkung unabhängige Größe.

Aus den Mach´schen Gesetzen kann man einige Folgerungen ziehen, die für die Bewegungen der wechselwirkenden Körper gewisse Beschränkungen bedeuten. Diese Einschränkungen sind nicht von der Wechselwirkung abhängig. Statt von *Beschränkung* oder *Einschränkung* in der Art der Bewegung spricht man meist von der *Erhaltung* gewisser Größen, z.B. von der Erhaltung des linearen *Impulses* („Bewegungsgröße“), des *Drehimpulses* oder der *Energie*.

In der Mach´schen Mechanik haben diese Erhaltungssätze nicht den Rang von *Prinzipien*, denn sie sind lediglich Folgerungen aus den Mach´schen Experimenten. Die Erhaltungsgrößen erlauben uns, die zeitliche Entwicklung eines wechselwirkenden Systems vorherzusagen, ohne die spezielle Art der Wechselwirkung zu berücksichtigen.

Der numerische Wert dieser Größen hängt nur von den Anfangsbedingungen ab. Während die Impulserhaltungssätze allgemeingültig sind, hat der Energieerhaltungssatz nur bei einigen speziellen Wechselwirkungen Gültigkeit, nämlich bei den „konservativen“ Wechselwirkungen.

4.1 Das Gesetz von der Erhaltung des linearen Impulses und des Massenzentrums.

Wir beginnen mit dem 1. experimentellen Mach´schen Gesetz, d.h. mit 1a:

$$m_1\,\mathbf{a_1} + m_2\,\mathbf{a_2} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Wir betrachten zwei Körper, K_1 und K_2, die sich isoliert im Raum befinden. Sie stehen in Wechselwirkung (WW), ohne von einem 3. Körper beeinflusst zu werden.

Wegen Gl.(1) haben wir $m_1 \mathbf{a_1} = -m_2 \mathbf{a_2}$ oder

$$m_1 \, d\mathbf{v_1}/dt = -m_2 \, d\mathbf{v_2}/dt \qquad (2)$$

Wenn wir dies zwischen den beiden Zeiten t' und t'' integrieren, ergibt sich

$$m_1 \int_{t'}^{t''} \frac{d\bar{v}_1}{dt} dt = -m_2 \int_{t'}^{t''} \frac{d\bar{v}_2}{dt} dt$$

das heißt:

$$m_1\mathbf{v_1}(t'') + m_2\mathbf{v_2}(t'') = m_1\mathbf{v_1}(t') + m_2\mathbf{v_2}(t') \qquad (3)$$

Dies bedeutet, dass der Vektor $\mathbf{P} := m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}$ unabhängig ist von der Zeit und der Art der WW. **P** hängt nur von den Anfangsbedingungen ab und kann von der WW nicht geändert werden. Der Vektor **P** ist der **lineare Impuls** des Systems, und Gl. (3) wird *Gesetz von der Erhaltung des linearen Impulses* genannt. In Worten:

> Der lineare Impuls eines isolierten Systems ist zeitlich konstant und hängt nicht vom Mechanismus der Wechselwirkung ab.

Die Teilimpulse $\mathbf{p_1} := m_1\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{p_2} := m_2\mathbf{v_2}$ werden i.Allg. nicht erhalten, nur ihre Vektorsumme ist eine Konstante im Ablauf der Zeit.

Gl. (3) hat auch dann eine physikalische Bedeutung, wenn t' ein Zeitpunkt vor dem Beginn der WW ist und t'' ein Zeitpunkt nach dem Ende der WW.
Wenn beide Körper im Augenblick t' in Bezug auf ein Inertialsystem in Ruhe sein sollten, gilt $m_1\mathbf{v_1}(t') = m_2\mathbf{v_2}(t') = \mathbf{0}$. In jedem späteren Augenblick haben wir dann

$$\mathbf{P} := m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0} \qquad (4)$$

Diese Gleichung ist von derselben Gestalt wie Gl. (1) und kann folglich dazu benutzt werden, die **träge Masse** m zu definieren und zu bestimmen.

Wir wollen annehmen, dass sich beide Körper, K_1 und K_2, (fast) reibungsfrei auf einem horizontalen Luftkissentisch befinden und mit Hilfe einer Feder in WW stehen. Die Feder wird zu Beginn von einem Faden zusammengepresst gehalten. Wenn wir den Faden durchbrennen, werden die beiden Körper so lange beschleunigt wie die Feder in Kontakt mit ihnen steht. Nachdem die WW beendet ist, können wir „bequem“ die Geschwindigkeiten der Körper messen. Mit Hilfe von Gl. (4) können wir sodann die Masse des Körpers K_1 ind Bezug auf die Masse von K_2 bestimmen –oder umgekehrt. Beachten Sie, dass wir Gl. (1) nicht benutzen können, um m zu bestimmen, wenn keine WW vorliegt, denn in einem solchen Fall wäre **a** Null.

4.1.1 Der Massenmittelpunkt

Der Massenmittelpunkt (MM) unseres isolierten Systems wird durch den Vektor $\mathbf{r_c}$ bestimmt:

$\mathbf{r_c}$:= $(m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2})/M$, worin M die Gesamtmasse ist, d.h. $M := m_1 + m_2$.

Der MM besitzt einige interessante Eigenschaften, die wir kennen müssen. Zunächst beobachten wir, dass seine Geschwindigkeit $d\mathbf{r_c}/ dt = \mathbf{P}/M$ ein konstanter Vektor ist, da **P** ja konstant ist. In Worten:

> Der Massenmittelpunkt (MM) eines isolierten Systems bleibt in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung.

Das will sagen, dass sich der MM (oder Massenzentrum CM) mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden bewegt, deren Gleichung gegeben ist durch $\mathbf{r_c} = \mathbf{r_{c,o}} + \mathbf{v_{c,o}}\cdot t$. (Mit dem Index **c** kennzeichen wir das CM.)
Wenn die Körper zu Beginn in Ruhe sind, bleibt CM in Ruhe, unabhängig von der WW.

Wir nehmen einmal an, dass die beiden Körper durch ein Seil verbunden sind, an dem sie beide ziehen (die Körper sollen auf Schlittschuhen stehen). Sie werden am Ort ihres MM aufeinandertreffen. Der MM kann sich nicht bewegen, denn beide Körper waren anfangs in Ruhe. Der MM bleibt also in Ruhe, während die beiden Körper sich aufeinander zubewegen.

Ein Bezugssystem (x',y',z'), das sich zusammen mit dem MM gleichförmig auf der MM-Geraden bewegt, ist ein *Inertialsystem*, da $\mathbf{v_{c,o}}$ ja konstant ist. Man nennt (x',y',z') das *System C*, d.h. das mit CM verbundene Bezugssystem. In Bezug auf das *Bezugssystem C* ist CM in Ruhe, d.h. $\mathbf{P'} = \mathbf{p_1'} + \mathbf{p_2'} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{p_1'} = - \mathbf{p_2'}$.

Dieses *System C* ist sehr wichtig, denn die im Laborsystem (*System L*) ausgeführten Experimente lassen sich i. Allg. im *System C* einfacher darstellen. Bei Stoßexperimenten mit atomaren oder subatomaren Teilchen, z.B. beim Stoß zwischen zwei Protonen, benutzt man immer das *System C*, um die im Labor erhaltenen Ergebnisse auszuwerten, vgl. Kap. 5.

4.1.2 Vielteilchensysteme und äußere Kräfte

Die Einführung des CM vereinfacht sehr die Beschreibung von Systemen mit mehr als zwei Teilchen (Vielteilchensysteme). $M = m_1 + m_2 + ...m_n$ ist die Gesamtmasse eines aus n-Teilchen bestehenden Systems.

$\mathbf{F}_{ik}$ ist die Wechselwirkungskraft zwischen dem i-ten und dem k-ten Teilchen. Mit $\mathbf{F}_j$ bezeichnen wir eine Kraft, die von außerhalb des Systems her wirkt. Wenn das System ein Flugzeug ist, so werden alle inneren „Teilchen“ die Gravitationskraft spüren, die zwischen ihnen und der Erde wirkt. Die Erde ist ein äußerer Körper.

Wir wissen, dass $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, da alle inneren Kräfte paarweise auftreten. Diese Aktions-und Reaktionskräfte haben gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung. Die Summe aller inneren Kräfte ist daher Null. Die inneren Kräfte erzeugen keinerlei Veränderung des gesamten linearen Impulses. Aber die äußeren Kräfte können den linearen Gesamtimpuls verändern.

Die Vektorsumme aller äußeren Kräfte, die auf das System einwirken ist

$$\bar{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = \frac{d\bar{P}}{dt} \qquad (5)$$

d**P**/dt ist die Änderungsgeschwindigkeit des linearen Systemimpulses.
Für das Massenzentrum CM haben wir $\mathbf{r}_c = \sum m_i \mathbf{r}_i / M$ und $\mathbf{v}_c = d\mathbf{r}_c/dt$. Die folgende Gleichung (6) ist das 2. Newton’sche Gesetz, verallgemeinert für ein *System* von Massen, d.h. Gl. (6) ist die Bewegungsgleichung von M:

$$\bar{F}_{ext} = M \cdot \frac{d\bar{v}_c}{dt} = M \cdot \bar{a}_c \qquad (6)$$

Gleichung (5) ist eine alternative Formulierung des verallgemeinerten 2. Bewegungsgesetzes.

Gl. (6) besagt, dass die Resultierende der äußeren Kräfte gleich ist dem Produkt aus Systemmasse und Beschleunigung des Massenschwerpunktes.

Das CM verhält sich so als wäre es ein Teilchen der Masse M, das sich unter dem Einfluss der äußeren Kräfte bewegt.

4.1.3 Bewegung einer Rakete

Eine Rakete der Masse M hat die Geschwindigkeit $\mathbf{V_o} := \mathbf{v}$ in Bezug auf ein Inertialsystem. (Mit guter Näherung können wir die Erde als ein solches System ansehen.) Während des Zeitintervalls Δt stößt die Rakete die (Gas)masse $\Delta m = - \Delta M$ aus.

Die Masse des ausgestoßenen Gases hat in Bezug auf das Inertialsystem die Geschwindigkeit **V** und in Bezug auf die Rakete $\mathbf{v_r}$. Wir wissen, dass $\mathbf{V} = \mathbf{v_r} + \mathbf{v}$, vgl. Gl. (4) in Abschnitt 3.5 mit $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.
Der lineare Impuls der Rakete ist $\mathbf{P}(t) = M\mathbf{v}$. Im Augenblick $t + \Delta t$ hat das System „Rakete + ausgestoßene Masse“ den linearen Impuls $\mathbf{P}(t+\Delta t) = (M+\Delta M)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \mu \Delta t\, \mathbf{V}$, worin

$$\mu := -\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} > 0$$

die Geschwindigkeit ist, mit der die Rakete Masse verliert. Wir nehmen an, dass der Treibstoff mit konstanter Geschwindigkeit verbrannt wird. $T = m/\mu$ ist die Zeit, die nötig ist, um den ganzen Treibstoff m zu verbrennen.
Der Term $\mu\Delta t\, \mathbf{V}$ ist der lineare Impuls der Verbrennungsprodukte, die in der Zeit Δt ausgestoßen werden.
Die Impulsänderung im Intervall Δt beträgt

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}(t+\Delta t) - \mathbf{P}(t) = M\Delta \mathbf{v} + \mathbf{v}\Delta M + \Delta M \Delta \mathbf{v} - \Delta M \mathbf{V} \qquad (7)$$

Zusammen mit $\Delta t \to 0$ gilt auch $\Delta \mathbf{v} \to 0$, und für Gl. (5) erhalten wir den folgenden speziellen Ausdruck:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dM}{dt} - \frac{dM}{dt}\overline{V} \qquad (8)$$

$\mathbf{F_{ext}}$ ist die externe Kraft, die auf die Rakete wirkt. Wenn wir einen senkrechten Flug annehmen mit **v** in Richtung **j**, haben wir $\mathbf{F_{ext}} = -Mg\mathbf{j}$. Für die Geschwin-digkeit $\mathbf{v_r} = \mathbf{V} - v$ gilt $\mathbf{v_r} = - v_r\, \mathbf{j}$, d.h. $\mathbf{v_r}$ ist nach unten gerichetet. v_r ist der Betrag der Ausstoßgeschwindigkeit der Gase in Bezug auf die Rakete.

(Wir vernachlässigen die Luftreibung und die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe. Außerdem wollen wir annehmen, dass der Abschuss am Nordpol stattfindet, um die Erdrotation nicht berücksichtigen zu müssen.)

Wenn wir die *Schubkraft* $\mathbf{F}_{schub}$ der Rakete einführen mit $\mathbf{F}_{schub} = \mathbf{v}_r \cdot dM/dt = -\mu \mathbf{v}_r$ **,** können wir schreiben

$$\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{schub} = M \cdot d\mathbf{v}/dt = M \cdot \mathbf{a} \qquad (9)$$

Diese „erste Raketengleichung“ hat die folgende skalare Form:

$$a = d^2y/dt^2 = - g + \mu v_r/M \qquad (10)$$

Die charakteristische Konstante μ der Rakete können wir mithilfe der Gleichung $\mu = m/T$ bestimmen, in der m die gesamte Treibstoffmasse ist und T die Zeit, um den ganzen Treibstoff zu verbrennen.
Wenn M_0 die gesamte Anfangsmasse der Rakete ist, so ist ihre Masse zur Zeit $t < T$ gegeben durch

$$M(t) = M_0 - \mu t \quad , \quad (11)$$

denn $\mu = (M_0 - M(t))/t$. Nach der Schubphase, wenn der ganze Treibstoff verbraucht ist, beginnt die „coasting phase“ der Rakete, in der sie sich wie eine senkrecht nach oben abgefeuerte Kugel verhält.

Um die Erde verlassen zu können, braucht eine Rakete eine Anfangsbeschleunigung von $\mu v_r/M_0$ größer als $g = 9.8$ m/s^2.

Wir werden jetzt Gl. (10) integrieren und auch Gl. (11) verwenden. Auf diese Weise erhalten wir die folgende Gleichung für die Geschwindigkeit in einem Augenblick $t < T$:

$$v(t) = v_o - gt + v_r \cdot \mathbf{ln}\ (M_0/M(t)) \qquad (12)$$

Dies ist die „zweite Raketengleichung“. **ln** ist der natürliche Logarithmus. Um die Endgeschwindigkeit v_{final} zu bestimmen, ersetzen wir t durch T und M(t) durch die Endmasse $M_{final} = M_0 - m$:

$$v_{final} = v_o - gT + v_r \cdot \ln\ (M_0/M_{final}) \qquad (13)$$

Um eine Gleichung zu erhalten, die den Raketenmotor charakterisiert, begeben wir uns in Gedanken an eine Stelle im All, an der $g = 0$ ist.

Mit $v_0 = 0$ und $g = 0$, und da $r := M_0/M_{final}$, ergibt sich die folgende wichtige Raketengleichung:

$$v_{final} = v_r \ln r \qquad (14)$$

Die Endgeschwindigkeit hängt demnach von dem Bruch $r := M_0/M_{final}$ ab und von der Ausstoßgewindigkeit der Gase. Die Endgeschwindigkeit wird größer sein als die Austrittsgeschwindigkeit des Antriebsgases, wenn r > 2.718. Schauen wir uns ein Beispiel an:

Beispiel:

Die Rakete *Blue Streak* hatte als Treibstoff 26 500 kg Kerosin und 61 500 kg flüssigen Sauerstoff. Der Raketenrumpf hatte eine Masse von 6200 kg, und die Nutzlast ("payload") betrug 10 500 kg. Die Gasaustrittsgeschwindigkeit war v_r = 2490 m/s.

(Gesamte Anfangsmasse: M_0 = 104 700 kg davon Treibstoff m = 88 000 kg.)
Die Brenndauer des gesamten Treibstoffs betrug T = 180 s.

Berechne: r, v_{final} (mit g = 0 und g = 9,81 m/s^2), μ, Antriebsbeschleunigung. Integriere Gl. (10) mit MuPAD.

Lösung:

$r = M_0/(M_0 - m) = 6{,}27$. $v_{final} = v_{max} = v_r \ln r = 4571$ m/s.
Mit g = 9,81m/s^2: $v_{final} = v_0 - gT + v_{max} = 2805$ m/s
$\mu = m/T = 489$ kg/s.
(Beachte, dass die Endgeschwindigkeit der Rakete größer sein kann als die Ausstoßgeschwindikeit der Gase v_r !)
$a_{schub} = \mu\, v_r/M_0 = 11{,}6 > 9.81$!

```
• reset()://Rakete
  v0:=0:y0:=0:
  M0:=104700:u:=489:vr:=2490:
  vel:=ode({v'(t)=-g + (u*vr)/(M0-u*t),v(0)=v0},v(t)):
  geschwindigkeit:=solve(vel):
  Simplify(float(subs(%,t=180,g=0)));//Geschwindigkeit

       alt:=ode({y''(t)=-g + (u*vr)/(M0-u*t),
       y'(0)=v0,y(0)=y0},y(t)):
       hoehe:=solve(alt):
       Simplify(float(subs(%,t=180,g=0)))//Höhe

  {4573.852915}//Geschw. nach 180 s e g =0

  {292183.9128}// Hoehe in m
```

```
Simplify(float(subs(%,t=180,g=9.81)));
Simplify(float(subs(%,t=180,g=9.81)))
```

{2808.052915}//Geschw. nach 180 s mit g=9.91 m/s^2
{133261.9128}// Höhe in Meter

Graf mit `plot::Function2d` und mit g = 9,91 m/s^2

```
• reset()://Rakete
v0:=0:y0:=0:DIGITS:=6:
vel:=ode({v'(t)=-g + (u*vr)/(M0-u*t),v(0)=v0},v(t)):
geschwindigkeit:=solve(vel):
V:=Simplify(op(%)):
velo:=plot::Function2d(V(t),t=0..180):
alt:=ode({y''(t)=-g + (u*vr)/(M0-
u*t),y'(0)=v0,y(0)=y0},y(t)):
hoehe:=solve(alt):
A:=Simplify(op(%)):
M0:=104700:u:=489:vr:=2490:g:=9.81:
alto:=plot::Function2d(A(t)/100,t=0..180,Color=RGB::Re
d):
plot(velo,alto,GridVisible=TRUE,AxesTitles=["t(s)","v/
y"],
Header="Rakete mit g = 9.81m/(s*s)
rot = y(m)/100 , blau = v(m/s)")
```

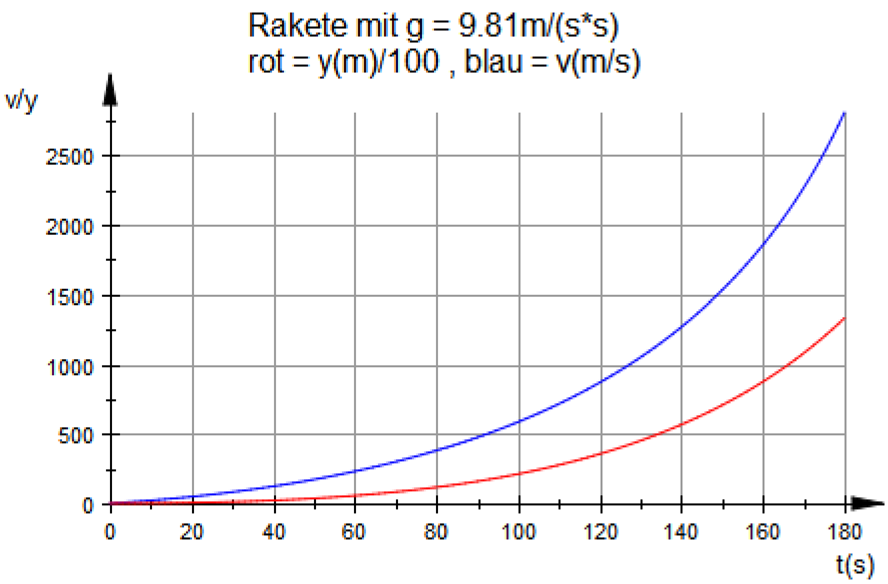

Fig.: 4.1-1

Den Graf der Höhe *y* haben wir numerisch berechnet. Eine analytische Lösung für *y* können wir mit der Funktion **int** von MuPAD gewinnen, z.B. (mit c:= M_o/u):

```
int(ln(1-t/c),t)
```

$$t \cdot \ln\left(\frac{c-t}{c}\right) - t - c \cdot \ln(t-c)$$

Dies können wir auch folgendermaßen schreiben

$$y(t) = \frac{v_r M_0}{\mu}\left[\frac{M_0 - \mu t}{M_0}\ln\left(\frac{M_0 - \mu t}{M_0}\right) + \frac{\mu t}{M_0}\right] - \frac{gt^2}{2} \qquad (15)$$

In einem solchen Fall ist es einfacher, Gl. (12) „manuell“ oder „zu Fuß“ zu lösen.

Das folgende Programm ist eine neue Anwendung eines Programms, das wir bereits in Abschnitt 3.2 bei der Behandlung des Pendels benutzten.

- ```
  reset():// Animierter Graf fuer Rakete
  ```

```
DIGITS:=5:
M0:=104700:u:=489:vr:=2490:g:=9.81:
v0:=0:y0:=0:
IVP:={y''(t)+g-(u*vr)/(M0-
u*t)=0,y'(0)=v0,y(0)=y0}:
fields:=[y(t),y'(t)]:
ivp:=numeric::ode2vectorfield(IVP, fields):
Y := numeric::odesolve2(ivp):
print(Unquoted,"t/s"," y/km "," v/m/s");
for i from 0 to 200 step 20 do
print (i,Y(i)[1]/1000,Y(i)[2]):
end_for;
```
```

```
//Animation
dt:=1:imax:=200:
plot(
plot::Point2d(t,Y(t)[1]/1000, Color = RGB::Blue,
VisibleFromTo = t..t + 0.99*dt,PointSize =
2*unit::mm)
$ t in [i*dt $ i = 0..imax],
 plot::Line2d([t-dt,Y(t -
dt)[1]/1000],[t,Y(t)[1]/1000],
Color = RGB::Red,GridVisible=TRUE,
VisibleAfter = t) $ t in [i*dt $ i = 1..imax],
AxesTitles=["t/s","y/km"],Header="Rakete mit g =
9.81m/(s*s)")
```

t/s, y/km , v/m/s
0, 0.0, 0.0
20, 0.43991, 47.981
40, 2.096, 122.54
60, 5.5613, 230.17
80, 11.584, 380.09
100, 21.137, 586.02
120, 35.539, 869.64
140, 56.682, 1268.3
160, 87.509, 1855.3
180, 133.26, 2808.1

200, 206.25, 4809.7

Die letzten Werte sind nicht brauchbar, da die Rakete nach 180 s keinen Brennstoff mehr hat. Die Endgeschwindigkeit von 2808 m/s ist die Anfangs-geschwindigkeit in der antriebslosen Phase.

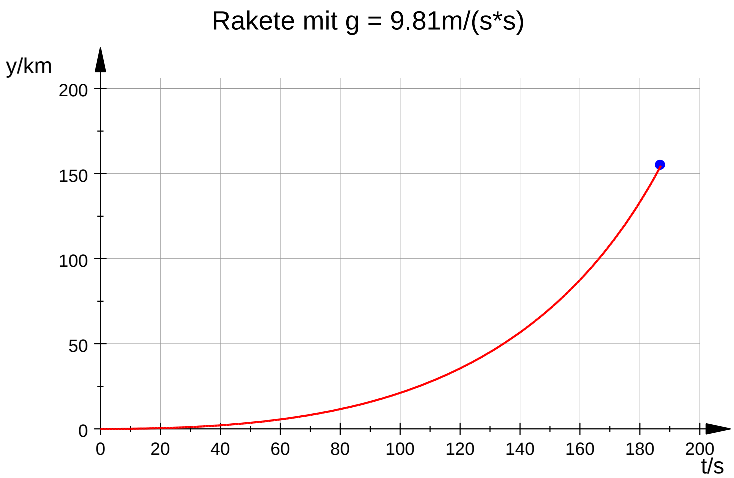

Fig.4.1-2

Wie wir sahen, ist die Geschwindigkeit v_r der wesentliche Parameter zur Definition des Wirkungsgrades (rel. Geschwindigkeitszunahme) einer Rakete. Es gibt auch eine praktische Formel, mit der man v_r abschätzen kann:

$$v_r \approx 0.25\ (\text{Temp. in der Brennkammer/ molekulare Masse})^{1/2}$$

Die *Blue Streak* hatte eine Verbrennungstemperatur von 3200°C, d.h. 3473 K. Die rel. Molmasse der ausgestoßenen Gase betrug 31. Damit ergibt sich für v_r der ungefähre Wert von 2.65 km/s, was gut mit dem experimentellen Wert von 2,49 km/s übereinstimmt.