

3.7 Physik auf einem Karussell

3.7.1 Geradlinig gleichförmige Bewegung auf einer sich drehenden Plattform

Im Abschnitt 1.1 untersuchten wir einen Körper, der sich reibungsfrei mit konstanter Geschwindigkeit in gerader Linie in einem Inertialsystem bewegte. Seine Bewegungsgleichung war $x(t) = v \cdot t + x(t_0)$.

Heute wollen wir die gleiche Bewegung betrachten, aber in einem nicht-inertialen System, z.B. auf einem Karussell. Um die Reibung zu reduzieren, benutzen wir einen im Fachhandel käuflichen Puck, der auf CO₂-Gas schwebt.

(Bekannt sind auch perforierte Metalltische, aus deren feinen Öffnungen CO₂-Gas strömt.)

Wir werden ein derartiges Karussell benutzen, um einige Experimente mit einem Puck durchzuführen. Die kreisförmige Plattform dreht sich in der horizontalen x-y-Ebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um seine z-Achse. Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ lautet dann $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{k}$.

Auf dieser sich im Gegenuhrzeigersinn drehenden Plattform befestigen wir ein sich mitdrehendes, nichtinertiales, Koordinatensystem (x,y). Die Bewegung des Pucks verfolgt ein sich mitdrehender Beobachter mit einer Kamera. Ein sich außerhalb aufhaltender Beobachter sieht, dass sich der Puck entlang der Geraden X bewegt, die auf dem Boden befestigt ist. (X,Y,Z) ist ein inertiales System.

Der nichtinertiale Beobachter in (x,y) veranlasst den Puck, mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 über die Plattform zu gleiten, Start in (-R,0). Er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit bis zum Punkt (R,0). Der Beobachter in (x,y) kann den Puck in (R,0) in Empfang nehmen, falls die Zeit, t_{trans} , die zum Durchqueren der Plattform benötigt wird, gleich T/2 ist, wobei T die Periode der Drehung ist.

Dies verlangt, dass $v_0 = 2R/(T/2) = 4R/T$. Wenn die Geschwindigkeit v_0 kleiner als $4R/T$ sein sollte, wird der mitrotierende Beobachter umso kompliziertere Bewegungen sehen, je kleiner v_0 ist.

Untersuchen wir die Bahnen für $v_0 = 4R/(nT)$, mit $n = 1, 2, 3 \dots!$

Für eine Simulation mit MuPAD benutzen wir die Gleichungen (1) des Abschnitts 3.6.1 mit $\varphi = \omega \cdot t$. Mit $y = 0$, $x = v_0 t - R$ und $v_0 = 4R/(nT)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) &= -r(t) \cdot \sin(\omega t), \quad (1) \end{aligned}$$

mit $r(t) := (4t/(nT) - 1)R$; $n = 1, 2, 3, \dots$

Wir wählen $R = 10$ $n \cdot T = 12$, was bedeutet, dass $t_{\text{trans}} = 6$ Sekunden ist

Das folgende Programm zeigt die Bahn für $n = 4$:

```

reset() //Karussell mit Animation
R:=10: n := 4:
T:=12/n:
w:=2*PI/T:
r:=t->(t/3-1)*R:
x:=t->r(t)*cos(w*t):
y:=t->-r(t)*sin(w*t):
kurve:=plot::Curve2d([x(t),y(t)],t=0..tmax,tmax = 0..6):

plot(kurve,Scaling=Constrained)

```

(Man muss in MuPAD in den Graphen klicken, um die Animation zu sehen.)

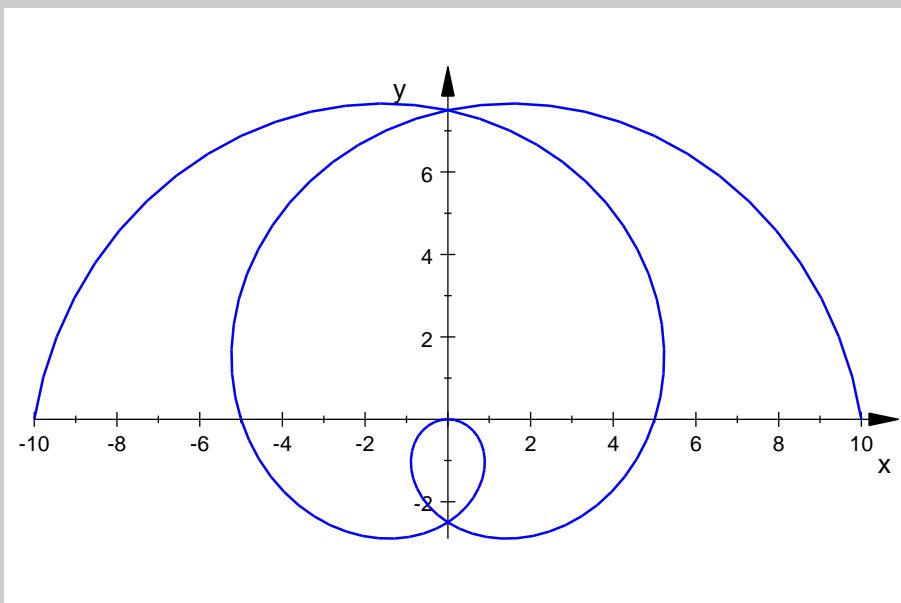


Fig. 3.7-1

Mit der Funktion `plot::Scene2d` erzeugen wir Graphen für verschiedene n -Werte, nämlich für $n = 1, 2, 5$ und 6

```

reset() //verschiedene Bahnen auf dem Karussell
R:=10:
werte_n:=[1,2,5,6]:
T:=12/n:
w:=2*PI/T:
r:=t->(t/3-1)*R:
x:=t->r(t)*cos(w*t):
y:=t->-r(t)*sin(w*t):

kurven:=plot::Scene2d(plot::Curve2d(subs([x(t),y(t)],
n=werte_n[i]),Color=RGB::Red,t=0..6))$i=1..4:

plot(kurven,Scaling=Constrained)

```

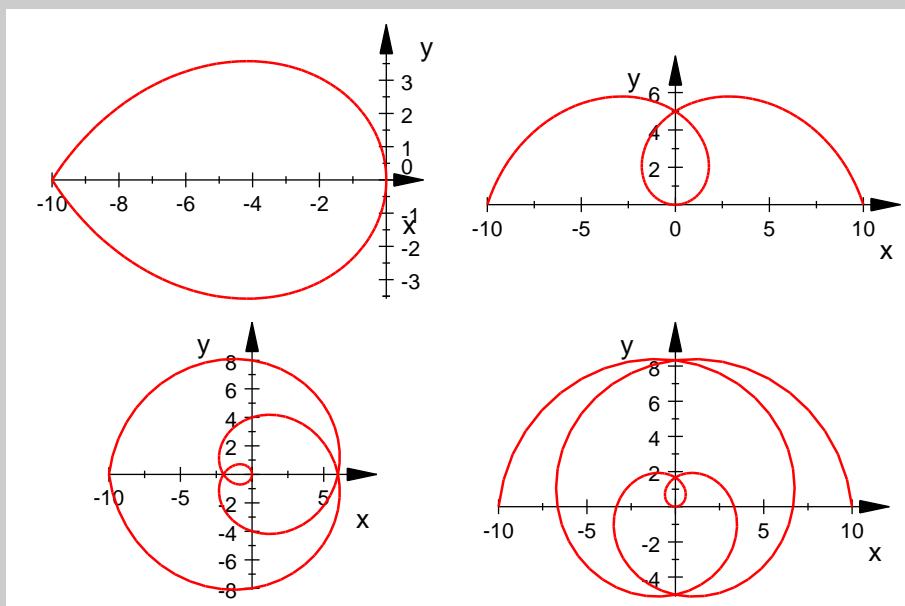


Fig. 3.7-2

Wir sehen, dass die Bahnen offen sind, wenn n geradzahlig ist. Für ungerade n sind die Bahnen geschlossen.

Ähnliche Bahnen wurden fotografiert und veröffentlicht von: Steyn-Ross, A.-Ivey, D.G. *Frames of Reference revisited*. Am. J. Phys. **60**, 1069.

3.7.2 Mit Bleistift und Papier

In diesem Paragraphen werden wir die Bewegung des Pucks formal beschreiben. Wir gehen von der allgemeinen Gleichung (6) aus, die in Abschnitt 3.5 hergeleitet wurde.

Wir sahen, dass $\mathbf{a}_{\text{abs}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

Das heißt

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{a}_{\text{abs}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1)$$

Im Falle des Pucks auf der Drehscheibe gibt es keine Wechselwirkung zwischen Puck und anderen Körpern (es gibt keine Reibung).

Ein inertialer Beobachter mißt für den Puck $\mathbf{v} = \text{konst.}$, was bedeutet: $\mathbf{a}_{\text{abs}} = \mathbf{0}$.

Die Coriolis Beschleunigung und die zentrifugale Beschleunigung sind

$$\mathbf{a}_{\text{c}} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} = 2\omega v_y \mathbf{i} - 2\omega v_x \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_{\text{cf}} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega^2 x \mathbf{i} + \omega^2 y \mathbf{j} \quad (2)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in Gleichung (1) ein, so erhalten wir zwei skalare Gleichungen:

$$a_x = 2\omega v_x + \omega^2 x, \quad a_y = -2\omega v_x + \omega^2 y \quad (3)$$

Das sind die Gleichungen (9), die wir schon in 3.6.3 antrafen (wir schreiben keine Akzente).

Wir wollen jetzt die Lösung dieses Systems gekoppelter Differentialgleichungen finden.

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit i , und anschließend addieren wir beide Gleichungen. Auf diese Weise erhalten wir folgende gewöhnliche, lineare und homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$d^2z/dt^2 + 2\omega dz/dt \cdot i - \omega^2 z = 0 \quad (4)$$

(Wenn eine Differentialgleichung nur eine unabhängige Veränderliche enthält, so ist sie eine *gewöhnliche* DGI. Die Ordnung einer DGI. ist die höchste Ordnung der vorkommenden Ableitungen. Eine DGI. heißt *linear*, wenn die Funktion und ihre Ableitungen linear in der DGI. vorkommen. $d^2z/dt^2 + 2\omega dz/dt \cdot i - \omega^2 z^2 = 0$ wäre nicht linear.)

Die *Lösung* einer gewöhnlichen DGI. ist eine Funktion der unabhängigen Variablen, die die DGI. identisch erfüllt. Eine DGI. besitzt eine ganze Schar von Lösungen, nicht nur eine.

Die allgemeinste Lösung heißt *allgemeine Lösung*, eine andere Lösung wird *partikulär* genannt. Es ist zu beachten, dass nicht alle DGI. Lösungen besitzen.

Es ist schwierig, eine Lösung für eine *nichtlineare* DGI. zu finden. Es gibt jedoch einige nichtlineare Gleichungen, die in lineare umgeformt werden können, z.B. die Gleichungen von Bernoulli und Riccati.)

Das Beste, das wir tun können, um eine Lösung von Gleichung (4) zu finden, ist anzunehmen, dass sie von der Form $z = e^{\alpha t}$ ist. Wenn wir dies tun, erhalten wir die folgende *charakteristische* Gleichung für α .

$$\alpha^2 + 2\omega\alpha i - \omega^2 = (\alpha + i\omega)^2 = 0 \quad (5)$$

Diese Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Das bedeutet, dass Gleichung (4) zwei unabhängige Lösungen besitzt:

$$z_1(t) = e^{-i\omega t} \quad \text{und} \quad z_2(t) = t \cdot e^{-i\omega t} \quad (6)$$

Die allgemeine Lösung von (4) hat die Form:

$$z(t) = c_1 \cdot e^{-i\omega t} + c_2 t \cdot e^{-i\omega t} \quad (7)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 werden von den beiden Anfangsbedingungen $z(0)$ und $dz/dt|_{t=0}$, festgelegt:

$$z(0) = x(0) + i y(0) = -R, \quad \text{das heißt: } c_1 = -R.$$

Wenn wir (7) ableiten, erhalten wir $dz/dt|_{t=0} = c_2 + \omega R i$, und wenn wir dies mit $v(0) = v_x(0) + v_y(0) \cdot i$ vergleichen, ergibt sich $c_2 = v_x(0)$ und $v_y(0) = \omega R$. Mit diesen Werten erhalten wir für die Bahn des Pucks die folgende Gleichung:

$$z(t) = (-R + v_x(0) t) \cdot e^{-i\omega t} \quad (8)$$

Die eulersche Gleichung liefert die folgende reale Gleichung für (8)

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_x(0) - R) \cos(\omega t) \\ y(t) &= -(v_x(0)t - R) \sin(\omega t) \quad (9) \end{aligned}$$

Mit diesen beiden Gleichungen haben wir die Bahn des Pucks im nichtinertialen System (x,y) gefunden. Wenn wir das Experiment derart durchführten, dass die Zeit zum Durchlaufen des Durchmessers der Drehscheibe ein ganzzahliges Vielfaches von $T/2$ wäre, das heißt wenn $v_x(0) := v_0 = 4R/(nT)$, so ergäben sich erneut die Gleichungen (1).

Diese Behandlung des Puck-Problems zeigte die Nützlichkeit der komplexen Zahlen in der Mechanik. Ich möchte daher noch einige Bemerkungen zu den komplexen Zahlen anfügen (in der Wikipedia habe ich über diesen Gegenstand einen einfachen Artikel geschrieben, vielleicht finden Sie ihn nützlich: http://de.wikibooks.org/wiki/Komplexe_Zahlen)

Die eulersche Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ mit $\varphi := \omega t$ definiert eine komplexe Funktion, in der ω eine reelle Zahl ist. Die Exponentialfunktion $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \cdot \sin \omega t$ hat folgende Eigenschaften (der Stern markiert die konjugiert komplexe Zahl)

$$(e^{i\omega t})^* = e^{-i\omega t}$$

$$e^{i\omega_1 t} \cdot e^{i\omega_2 t} = e^{i(\omega_1 + \omega_2) t}$$

$$|e^{i\omega t}|^2 = 1$$

$$d/dt(e^{i\omega t}) = i\omega \cdot e^{i\omega t}$$

$$\int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t} + C$$

Wir können allgemein eine komplexe Funktion $z(x)$ der reellen Variablen x so definieren, dass sie die folgende Gestalt hat:

$$z(x) = u(x) + i v(x),$$

worin $u(x)$ und $v(x)$ gewöhnliche reelle Funktionen sind.

Die komplexe Funktion $z(x)$ kann bezüglich des reellen Arguments x abgeleitet und integriert werden. Die Regeln für diese Operationen sind ganz so, wie man es erwarten würde

$$dz/dx = du/dx + i \cdot dv/dx$$

$$\int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t} + C$$

Beachten Sie, dass die Ableitung von $z(x)$ ebenfalls eine komplexe Funktion von x ist. Dagegen ist das zwischen a und b definierte bestimmte Integral von $z(x)$ eine komplexe Zahl.

Man kann auch eine komplexe Funktion $w(z)$ einer komplexen Variablen $z = x + iy$ definieren. Die Differentiations- und Integrationsregeln sind analog zum reellen Fall definiert.