3 Bewegungen mit Bindungen

Viele Körper können sich nicht frei bewegen, weil sie durch einen anderen Körper (Schnur, Stange, Schiene usw.) gezwungen werden eine vorgegebene Bahn zu befolgen. Ein Wagen auf einer Achterbahn kann nur die Bewegung ausführen, zu der die Form der Bahn ihn zwingt. Um die Lage des Wagens auf der Achterbahn zu beschreiben, genügt ein einziger Parameter, nämlich die Strecke s, gemessen vom Startpunkt entlang der Bahn bis zum Ort des Wagens. Man sagt, dass der Wagen einen einzigen Freiheitsgrad hat. Ein an einer Schnur oder einem Stab schwingendes Pendel oder der große Zeiger einer Wanduhr sind Systeme mit einem Freiheitsgrad, denn die Angabe eines Winkels reicht aus, den Ort festzulegen.

Bewegt sich das Objekt auf einer vorgeschriebenen Oberfläche, benötigt man zwei Parameter (Koordinaten), z.B. die beiden Oberflächen Parameter von Gauss. Die Kräfte, die für die Bindungen verantwortlich sind, heißen Bindungskräfte $\vec{F}_B$. Sie haben immer einen solchen Wert, dass die Beschleunigung des Körpers mit der Bindung vereinbar ist. Im Fall eines einfachen Pendels nennen wir die Bindungskraft $\vec{T}$ (tension), was die Fadenspannung ist.

Eine Grundeigenschaft der Bindungskräfte ist, dass sie immer senkrecht auf der Gahn des gebundenen Körpers stehen. Wäre das nicht so, so könnten sie den Körper ohne das Vorhandensein einer äußeren Kraft in Bewegung setzen, was nie beobachtet wurde. Eine Folge diese bemerkenswerten Eigenschaft ist die Tatsache, dass eine Bindungskraft keine Arbeit verrichten kann. Wir kommen später auf diesen Punkt zurück. Wir haben die Bindungskräfte ebenfalls in das 2.N.G. aufzunehmen

$$\vec{F} + \vec{F}_z = m\vec{a} \tag{3.1-1}$$

$\vec{F}$ = Summe aller WW-Kräfte, die von Körpern stammen, die nicht an der Bindung beteiligt sind.

$\vec{F}_z$ = Summe (Resultierende) aller Bindungskräfte.

3.1 Die schiefe Ebene

In der folgenden Figur (3.1-1) sehen wir zwei Körper A, B, die durche einen Faden (masselos) verbunden sind, der über eine masselose und reibungsfreie Rolle läuft.

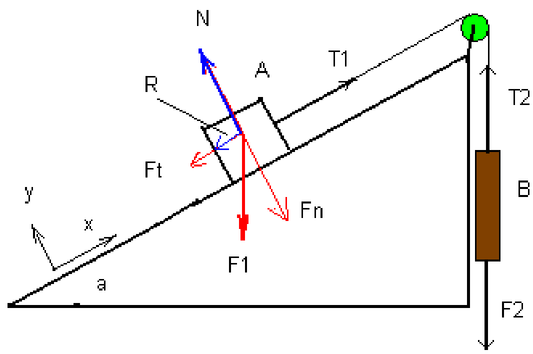

Fig. 3.1-1

Block A hat die Masse m_1 und der Koeffizient der kinetischen Reibung zwischen A und der schiefen Ebene beträgt $\mu = 0.5$. Die Ebene hat eine Neigung von $\alpha = 30°$. Wir wollen die Bewegung von Block a beschreiben, der in WW steht mit drei Körpern: *Erde, Ebene* und *Faden*.

Wir wollen annehmen, dass der Block dabei ist, die Ebene hochzugleiten.

Es ist praktisch, die Kraft der Ebene auf den Körper in die beiden Komponenten $\vec{R}$ und $\vec{N}$ zu zerlegen, die parallel zu den x-y-Achsen liegen (die Bewegung des Blockes hat Richtung und Richtungssinn von $\vec{i}$ .Während der Bewegung erzeugt die Ebene die konstante Kraft $\vec{R}$ der kinetischen Reibung, durch die die thermische Energie von Block und Ebene vergrößert wird. Ohne Reibung würde die Kraft der Ebene senkrecht am Block angreifen. Das Experiment ergibt den folgenden Zusammenhang

$$\vec{R} = -\mu N \vec{v}^0 \tag{3.1-2}$$

Die Reibungskraft ist parallel zur Fläche und ist der Bewegung entgegengerichtet. $\vec{v}^0$ ist der Einheitsvektor der Geschwindigkeit. Der Vektor $\vec{N}$ zeigt in Richtung des Einheitsvektors $\vec{j}$ der y-Achse, die senkrecht auf der Ebene steht. $\vec{T_1}$ und $\vec{T_2}$ sind die Fadenspannunngen, sie haben denselben Betrag T. $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ sind die Gewichte der Massen m_1,m_2. $\vec{F_n}$ und $\vec{F_t}$ sind die Komponenten von $\vec{F_1}$ in Bezug auf die Achsen x und y. Wir schreiben (3.1-1) in der folgenden Form

$$\vec{R} + \vec{N} + \vec{F_1} + \vec{T_1} = m\vec{a} \tag{3.1-3}$$

Mit Zerlegung in die Komponenten ergibt sich

$$-\mu N\vec{i} + N\vec{j} + T\vec{i} - m_1 g \sin(\alpha)\vec{i} - m_1 g \cos(\alpha)\vec{j} = ma_x\vec{i} + m0\vec{j} \tag{3.1-4}$$

was zwei skalaren Gleichungen äquivalent ist

$$-\mu N + T - m_1 g \sin(\alpha) = m_1 a_x \tag{3.1-5}$$

$$N = m_1 g \cos(\alpha) \tag{3.1-6}$$

Gleichung (3.1-5) ist das 2.N.G. für die Komponenten in Richtung der x-Achse, Gl. (3.1-6) ist das 2.N.G. für die Komponenten in y-Richtung. An der Masse m_2 des Körpers B greifen die beiden Kräfte $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ an. Der Einheitsvektor $\vec{k}$ soll nach oben zeigen, d.h. wir haben

$$-m_2 g\vec{k} + T\vec{k} = -m_2 a_x \vec{k} \tag{3.1-7}$$

Diese Gleichung lösen wir nach T auf und substituieren diesen Ausdruck zusammen mit dem für N aus Gl. (3.1-6) in Gl. (3.1-5), was uns den folgenden Ausdruck für a_x gibt:

$$a_x = g(m_2 - m_1(\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)))/(m_1 + m_2) \tag{3.1-8}$$

Wenn die numerische Rechnung für a_x einen positiven Wert ergibt, so war unsere Annahme über die Richtung der Bewegung des Körpers A richtig. Sollte alx negativ ausfallen, so haben wir unsere ursprüngliche Annahme umzukehren und eine neue Rechnung auszuführen. Die Richtung von R ist dann nach rechts oben.

Mit den oben angenommenen numerischen Daten erhalten wir für a_x den positiven Wert 1.058 m/s^2. Aus Gl. (3.1-8) erkennen wir, dass der Körper A sich nur für $m_2 > m_1(\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$ nach oben bewegen wird, d.h. für $m_2 > 0.933 m_1$.Die Bindungskraft beträgt $N = 25.5$ N und die Fadenspannung ist $T = 30.6$ N.

Die Gleichungen (3.1-5) und (3.1-6) bilden ein System aus 2 Gleichnungen mit den drei Unbekannten T, N und a_x. Um es zu lösen, benötigen wir eine dritte Gleichung, und zwar Gleichung (3.1-7). Wir haben unser System mit Hilfe von Substitutionen gelöst. MuPAD bietet für einen derartigen Fall die Funktion `linsolve`, dessen Anwendung ich im folgenden Abschnitt zeige.

3.1.1 Gleichungssystem mit MuPAD

```
sol:=linsolve({-mu*N+T-m1*g*sin(a)=m1*ax,
N=m1*g*cos(a),-m2*g+T=-m2*ax},{N,T,ax}):
op(sol[1]);
op(sol[2]);
op(sol[3]);
float(subs(sol[1],g=9.81,m1=3,m2=3.5,mu=0.5,a=30*PI/180));
float(subs(sol[2],g=9.81,m1=3,m2=3.5,mu=0.5,a=30*PI/180));
float(subs(sol[3],g=9.81,m1=3,m2=3.5,mu=0.5,a=30*PI/180));
```

```
N, g m1 cos(a)
   g m1 m2 + g m1 m2 sin(a) + g m1 m2 mu cos(a)
T, --------------------------------------------
                     m1 + m2
      g m1 sin(a) - g m2 + g m1 mu cos(a)
ax, - ------------------------------------
                   m1 + m2
N = 25.48712763
T = 30.63230359
ax = 1.057913259
```