2.4 Anwendungen der Newtonschen Gesetze

2.4.1 Fall einer Kugel in einer Flüssigkeit

Wenn eine Kugel vom Radius R mit der Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ in einer Flüssigkeit der Dichte ρ fällt, erfährt sie eine Auftriebskraft. Diese archimedische Kraft ist gegeben durch

$$\overrightarrow{F}_a = -m_{fl}\overrightarrow{g} = -\frac{4}{3}R^3\pi\rho g\overrightarrow{j} \tag{2.4-1}$$

worin $\overrightarrow{j}$ ein nach unten zeigender Einheitsvektor ist.

Außer der Auftriebskraft übt die Flüssigkeit eine Reibungskraft $\overrightarrow{F}_r$ auf die Kugel aus. Der Ansatz für diese Kraft lautet

$$\overrightarrow{F}_r = -C\frac{A\rho}{2}v\,|\overrightarrow{v}|\,\overrightarrow{v^0} \tag{2.4-2}$$

C = Widerstandsbeiwert ("C-Wert"), A = Querschnittsfläche der Kugel ($R^2\pi$). Wir schreiben $v\,|\overrightarrow{v}|$ anstelle von v^2, weil $\overrightarrow{F}_r$ immer den entgegengesetzten Richtungssinn von $\overrightarrow{v}$ hat. Vgl. auch (2.4-13).

Wie beim Skydiver kann auch die fallende Kugel in der Flüssigkeit eine konstante Endgeschwindigkeit erreichen, wenn die Fallstrecke groß genug ist. In diesem Fall ist die Beschleunigung Null. $\overrightarrow{v^0}$ = Einheitsvektor der Geschwindigkeit.

Die drei Kräfte, die an der fallenden Kugel angreifen, erfüllen das 2.N.Ges.: $\overrightarrow{F}_g + \overrightarrow{F}_a + \overrightarrow{F}_r = m\overrightarrow{a}$. Aus dieser Vektorgleichung erhalten wir die folgende skalare Gleichung

$$mg - m_{fl}g - \frac{1}{2}C\rho R^2\pi v^2 = ma \tag{2.4-3}$$

Mit den folgenden Definitionen können wir (2.4-3) in eine praktischere Form bringen

$u := 1 - \rho/\rho_k$ und $v_1^2 := 8Rg\rho_k/(3C\rho)$, wobei ρ_k die Dichte des Kugelmaterials ist. Damit geht (2.4-3) über in die folgende Bewegungsgleichung (Differentialgleichung)

$$a = g(u - (v/v_1)^2) \tag{2.4-4}$$

Mit der Bedingung $a = 0$ erhalten wir für die Grenzgeschwindigkeit v_e den Ausdruck

$$v_e^2 = v_1^2 u = \frac{8}{3}g\frac{R}{C}\frac{\rho_k - \rho}{\rho} \tag{2.4-5}$$

Auch die folgende Abkürzung wird uns gleich noch von Nutzen sein

$$x := gu/v_e = gu^{1/2}/v_1.$$

Zunächst lösen wir die Differentialgleichung (2.4-4) mit MuPAD

```
reset():
assume(u>0): assume(v1>0):
geschw:= ode({v'(t)=g*(u-v(t)^2/v1^2), v(0)=0},v(t)):
geschwindigkeit:=solve(geschw):
simplify(geschwindigkeit);
{u^(1/2)/(1/v1^2)^(1/2)*(exp(2*g*t*u^(1/2)*(1/v1^2)^(1/2)) - 1)/
(exp(2*g*t*u^(1/2)*(1/v1^2)^(1/2)) + 1)}
subs(%,sqrt(1/v1^2)=sqrt(u)/ve)
  {u^(1/2)/(1/v1^2)^(1/2)*(exp(2*g*t*u/ve) - 1)/
  (exp(2*g*t*u/ve) + 1)}
```

Das können wir kürzer und schöner schreiben, wenn wir $x := gu/v_e = gu^{1/2}/v_1$ berücksichtigen:

$$v = v_e(e^{2xt} - 1)/(e^{2xt} + 1) \tag{2.4-6}$$

Nun dividieren wir noch durch e^{xt} und erhalten

$$v = v_e(e^{xt} - e^{-xt})/(e^{xt} + e^{-xt}) \tag{2.4-7}$$

Einen letzten Schritt der Vereinfachung können wir mit hyperbolischen Funktionen erreichen, denn $\sinh(x) := (e^x - e^{-x})/2$ und $\cosh(x) := (e^x + e^{-x})/2$. Demnach haben wir schließlich

$$v = v_e \tanh(xt) \tag{2.4-8}$$

Beispiel:
Eine Kugel mit R = 4 mm und $\rho_k = 7800\ kg/m^3$ wird ohne Anfangsgeschwindigkeit in Wasser ($\rho = 1000\ kg/m^3$) fallengelassen. C sei 0.4 und $g = 9.81 m/s^2$. (Wir werden sehen, dass die Kugel wenigstens 0.5 m fallen muss, um eine konstante Sinkgeschwindigkeit zu erreichen.)

```
reset():
assume(u>0,v1>0)://beachte die Form!
geschw:=ode({v'(t)=g*(u-v(t)^2/v1^2), v(0)=0},v(t)):
geschwindigkeit:=solve(geschw):
simplify(geschwindigkeit):
subs(%,sqrt(1/v1^2)=sqrt(u)/ve):
simplify(%):
subs(%,g*u/ve=x):
subs(%,u=0.871794872,g=9.81*m/s^2,t=0.25*s,v1=1.428453709,
ve=1.3337466*m/s):
float(%[1])
```

```
1.229885079
```

Die Kugel hat nach 0.25 s eine Geschwindigkeit von 1.229885 m/s

Auch mit Gl. (2.4-8) ergibt sich nach 0.25 s eine Geschwindigkeit von 1.229885 m/s:

```
reset():DIGITS:=7:
v:=ve*tanh(g*u*t/ve):
subs(%,u=0.871794872,g=9.81*m/s^2,t=0.25*s,v1=1.428453709,
ve=1.3337466*m/s):
float(%)

1.229885 m/s //mit diesem Programm ergibt sich sogar die Einheit
```

Um jetzt die durchfallene Höhe zu finden, lösen wir (2.4-6)

```
reset():
assume(x>0,ve>0):
h:=ode({y'(t)=ve*((exp(2*x*t)-1)/(exp(2*x*t)+1)), y(0)=0},y(t)):
hoehe:=solve(h):

simplify(%[1])
```

Das vereinfachte Ergebnis lautet $-(ve(\ln(2)-\ln(e^{2tx}+1)+tx)/x$.

Mit der Substitution

```
subs(%,u=0.871794872,g=9.81,ve=1.3337466,t=0.25,x=g*u/ve)
```

und `float(%)` ergibt sich die in 0.25 s durchfallene Strecke zu 0.1975226 m

Es ist lohnend, das Ergebnis $-(ve(\ln(2)-\ln(e^{2tx}+1)+tx)/x$ umzuschreiben:

$-v_e\ln(2/(e^{2xt}+1)e^{xt})/x = -v_e\ln(1/\cosh(xt))/x = v_e^2\ln(\cosh(xt))/(gu)$.

Also ist die durchfallene Strecke gleich

$$y = v_e^2\ln(\cosh(\frac{gu}{v_e}t))/(gu) \qquad (2.4\text{-}9)$$

Wir lassen MuPAD diese Formel auswerten

```
reset():
g:=9.81*m/s^2:u:=0.871794872:
ve:=1.3337466*m/s:t:=0.25*s:
y:=ve^2*ln(cosh(u*g*t/ve))/(g*u);

0.1975226069 m
```

Also wieder das vorige Ergebnis (mit Ausgabe der Einheit!)

Als eine weitere Übung im Ausgeben von Tabellen, wollen wir die `print`-Anweisung in einer Prozedur benutzen

```
reset():
kugel:=proc(t0,schritte)
local t,y,v;// Schreibweise beachten.
begin// Das ";" gibt in der Prozedur keine Zwischenergebnisse aus
   g:=9.81;
   u:=0.871794872;
   ve:=1.3337466;
   x:=u*g/ve;
   DIGITS:=6;
   t:=t0;
   print("t  ","  y  ","  v  ");
  for t from t0 to schritte step 0.1 do
   v:=float(ve*tanh(x*t));
   y:=float(ve^2*ln(cosh(x*t))/(g*u));
   print(t,y,v);
  end_for;
end_proc:
kugel(0,1)//Prozeduraufruf

"t  ", "  y  ", "  v  "
0, 0.0, 0.0
0.1, 0.0401171, 0.754544
0.2, 0.13799, 1.1432
0.3, 0.260341, 1.27802
0.4, 0.390551, 1.31805
0.5, 0.52304, 1.32938
0.6, 0.656168, 1.33253
0.7, 0.789474, 1.33341
0.8, 0.92283, 1.33365
0.9, 1.0562, 1.33372
1.0, 1.18957, 1.33374
```

2.4.2 Mit Bleistift und Papier

Die Bewegungsgleichung (2.4-4) $a = g(u - (v/v_1)^2)$ muss sich natürlich auch ohne Computer integrieren lassen. Um dies zu bewerkstelligen, werden wir zwei weitere Abkürzungen einfügen

$$k := \tfrac{1}{2}C\rho\pi R^2 \text{ und } r := k/m$$

Damit erhalten wir $v_1^2 = \frac{g}{r}$ und (2.2-4) verwandelt sich in

$$a = r(v_e^2 - v^2) \tag{2.4-10}$$

Wir separieren die Variablen und benutzen eine Partialbruchzerlegung (siehe weiter unten):

$$\int r dt = \frac{1}{2v_e} \int \{\frac{1}{v_e+v} + \frac{1}{v_e-v}\} dv$$

Die Integration liefert

$$rt = \frac{1}{2v_e}[\ln\left|\frac{v_e+v}{v_e-v}\right| - \ln C_0] = \frac{1}{2v_e}\ln\left|\frac{v_e+v}{(v_e-v)C_0}\right|$$

und wir erhalten

$$\frac{v_e+v}{v_e-v} = C_0 e^{2v_e rt} \tag{2.4-11}$$

Wenn für $t = 0$ die Geschwindigkeit gleich v_0 ist, erhalten wir für die Integrationskonstante C_0 den Ausdruck $C_0 = \frac{v_e+v_0}{v_e-v_0}$.Nun ist i. Allg. $v_0 = 0$ und damit $C_0 = 1$. In diesem Fall erhalten wir für v die alten Gleichungen (2.4-6,7,8).

Um nun Gleichung (2.4-8) zu integrieren, benutzen wir die Regel

$$\int \tanh(ax)dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh(ax))$$

Ohne Schwierigkeiten erhalten wir Gl. (2.4-9).

Zur Integration von (2.4-10) benutzten wir die Methode der Partialbruchzerlegung, die in MuPAD als Prozedur `partfrac` implementiert ist. Die Anwendung ist sehr einfach:

```
partfrac(1/(ve^2-v^2),v):
int(%,v):
simplify(subs(%,ln(v+ve)-ln(v-ve)=
ln((v+ve)/(v-ve))))
```

Ergebnis: $\frac{1}{2v_e}\ln\frac{v+v_e}{v-v_e}$

2.4.3 Das Gesetz von Stokes (1851)

Der Widerstandsbeiwert C hängt von der Flüssigkeit, von der rel. Geschwindigkeit und von der Form des Körpers ab. Für eine Kugel liegt C zwischen 0.3 und 0.4. Ein gut konstruiertes Auto hat einen C-Wert um 0.3. Den geringsten Widerstandsbeiwert hat ein Körper in Stromlinienform, nämlich C = 0.055.

Die drei erwähnten Faktoren sind zusammengefasst in der dimensionslosen *Reynoldszahl* R_e (O.Reynolds, 1842-1912)

$$R_e := \rho L v/\eta \tag{2.4-12}$$

ρ ist die Dichte der Flüssigkeit und η (eta) ist die dynamische *Viskosität*. L ist eine für den Körper typische Länge. Bei der Kugel oder einer Röhre, z.B. Kapillare, bedeutet L den Durchmesser. Die Viskosität ist eine Größe mit der Dimension $Kraft \cdot Zeit/Fläche$. Im System SI hat sie die Einheit Ns/m^2. Eine andere viel benutzte Einheit ist *Centipoise*, definiert als $1cP = 10^{-3}Ns/m^2$. Zehn "Poise", 10 P, sind $1Ns/m^2$.

Der Wert von η für Wasser von $20°C$ ist $1cP = 0.01P = 0.001Ns/m^2$. Glycerin von $20°C$ hat $\eta = 1.5Ns/m^2 = 1500cP = 15P$. Die Abhängigkeit des Faktors C von R_e ist sehr kompliziert. Z.B. kann man für $0 < R_e < 1$ für C den Wert $C = 24/R_e$ wählen. Für $400 < R_e < 3 \cdot 10^5$ ist $C = 0.5$ usw.

Für Kugeln, die sich mit geringer Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit bewegen ($R_e < 1$), kann man das quadratische Widerstandsgesetz (2.4-2) durch das in v lineare **Gesetz von Stokes** ersetzen:

$$\vec{F}_r = -6\pi\eta\,|\vec{v}|\,R\vec{v}^0 \qquad \text{(Stokes 2.4-13)}$$

Da $\vec{F}_a + \vec{F}_r + \vec{F}_g = m\vec{a}$ gilt (2.N.G.), erhalten wir

$$-\frac{4}{3}R^3\pi\rho g - 6\pi\eta vR + \frac{4}{3}R^3\pi\rho_k g = ma \qquad (2.4\text{-}14)$$

Wenn die Bewegung gleichförmig ist, d.h. wenn $a = 0$ und $v = v_e$, ergibt sich

$$6\pi\eta v_e R = 4R^3\pi g(\rho_k - \rho)/3$$

Hieraus erhalten wir eine wichtige Gleichung zur experimentellen Bestimmung von η

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{v_e}(\rho_k - \rho) \qquad (2.4\text{-}15)$$

Im Spezialfall $\rho << \rho_k$ können wir die Endgeschwindigkeit mit der folgenden Näherungsformel berechnen:

$$v_e \approx \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{\eta}\rho_k \qquad (2.4\text{-}16)$$

In dem berühmten Experiment zur Bestimmung der Elektronenladung benutzte *Millikan* elektrisch geladene winzige Öltröpfchen. Zur Bestimmung der Masse eines Tröpfchens ließ er es frei in Luft fallen. Er beobachtete die konstante Endgeschwindigkeit v_e und benutzte Gleichung (2.4-16), um zuerst den Tröpfchenradius zu ermitteln. Mit den bekannten Werten von $\rho_k, \eta,\ g, v_e$ erhielt Millikan dann mit Hilfe von $m = \frac{4}{3}R^3\pi\rho_k$ die gesuchte Masse des Tröpfchens. Wir wollen als Beispiel folgende Zahlenwerte benutzen: $\rho_k = 920\ kg/m^3, \eta = 1.82 \cdot 10^{-5}Ns/m^2,\ v_e = 7.14 \cdot 10^{-5}\ m/s$. Damit erhalten wir $R = 0.08049 \cdot 10^{-5}m$ und $m = 2.01 \cdot 10^{-15}\ kg$. Aus weiteren experimentellen Daten ergab sich die Ruhemasse des Elektrons zu $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}kg$ und die Elementarladung zu $1.6 \cdot 10^{-19}C$. *Millikan* (1868-1953) erhielt für diese Arbeiten 1923 den Nobelpreis für Physik. (*Einstein* 1921, *Bohr* 1922)

Wir definieren nun eine Widerstandszahl

$$r := \frac{9}{2}\frac{\eta}{\rho_k R^2} \tag{2.4-17}$$

mit der wir das 2.N.Gesetz in der Gestalt $a = gu - rv$ schreiben können. Diese Gleichung haben wir aber schon ausführlich in (1.3) mit $u := 1 - \rho/\rho_k = 1$ (Luft) untersucht. (In (1.3) hatten wir $\vec{j}$ nach oben orientiert und erhielten $v_e = -\frac{g}{r}$ statt wie hier $v_e = gu/r = g/r$.) Wir haben damit die Grundideen für das Studium der Bewegungen in einer Flüssigkeit kennen gelernt. Für die Behandlung der Bewegung eines Tennis-oder Golfballs haben wir noch den Drall und die Windgeschindigkeit zu berücksichtigen. Im Kapitel 2.5 soll das geschehen.

2.4.4 Bestimmung des C-Wertes für Kugeln

Industrielle Viskosimeter (z.B. *Höppler*-Kugelfallviskosimeter) benutzen die Untersuchung der Fallbewegung von Kugeln, um die Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen. Umgekehrt kann man bei bekannter Viskosität auch C mit Hilfe von Fallversuchen in Flüssigkeiten messen.

Beispiel: Wir lassen eine Stahlkugel ($R \approx 5mm - 8mm, \rho_k 7860\ kg/m^3$) in einem mit Wasser gefüllten Glaszylinder (Höhe ca. 50 cm) fallen. Mit Hilfe zweier Fotozellen und einer elektronischen Stoppuhr messen wir die Zeit, die die Kugel zum Durchfallen der Höhe y (ca. 25 cm) benötigt. Beim Start hat die Kugel die Geschwindigkeit $v_0 = 0$. Wir benutzen die Gleichungen (2.4-9) und (2.4-5) und einen Startwert von 0.4 für C. (2.4-9) gibt uns einen Formelwert y_{theor} für y. Wenn dieser Fallweg nicht mit dem experimentellen Wert übereinstimmt, wiederholen wir die Rechnung mit einem neuen C-Wert. Dies wird solange gemacht (mit MuPAD), bis y_{theor} und y übereinstimmen. Hier ist die Rechnung

```
reset():
c:=0.4:
t:=0.236:
r:=0.008:g:=9.81:rho:=1000:
rhok:=7861:
u:=1-rho/rhok:
ve:=sqrt(8*g*r*(rhok-rho)/(3*c*rho)):
y:=ve^2*ln(cosh(g*u*t/ve))/(g*u)
0.2034757456 //theoretischer Fallweg
```

2.4.5 Bestimmung der dyn. Viskosität η

Eine einfache Methode zur Messung von η besteht darin, die Flüssigkeitsmenge zu bestimmen, die in einem festen Zeitintervall durch eine enge Röhre (Kapillare, ca. 2 mm Innendurchmesser) fließt.

Die Gleichung, mit der man den Fluss einer Flüssigkeit durch eine Kapillare berechnen kann, wird nach *Hagen* (1797-1884) und *Poiseuille* (1799-1869) benannt

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi}{8\eta}\frac{R^4}{L}(P_1 - P_2) \qquad (2.4\text{-}18)$$

$Q =$ ausfließendes Flüssigkeitsvolumen in m^3/s. Typischer Wert für Kapillaren 0.5 cm^3/s.

$R =$ Radius der Kapillare (kann durch Ausmessen der Fadenlänge einer bestimmten Menge einer gefärbten FLüssigkeit ermittelt werden).

$L =$ Länge der Kapillare; $A =$ Querschnittsfläche

$P_1 - P_2 =$ Differenz der Drücke an den Enden der Kapillare: $(P_0 + \rho g h) - P_0 = \rho g h$; $P_0 =$ Luftdruck

Die mittlere Geschwindigkeit der strömenden Flüssigkeit beträgt

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \frac{1}{A} = \frac{\Delta x A}{\Delta t} \cdot \frac{1}{A} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Für die Reynolds-Zahl erhalten wir

$$R_e = D\rho v/\eta = D\frac{\rho}{\eta}\frac{\Delta V}{\Delta t}\frac{4}{D^2\pi} = \frac{4\rho}{D\eta\pi}\frac{\Delta V}{\Delta t} = 455$$

Für die Viskosität haben wir $\eta = 0.001\ Ns/m^2$ benutzt.

Das *Hagen-Poiseuillesche Gesetz* ist nur bei nicht turbulenter Strömung (= laminarer Strömung) brauchbar, d.h. für $R_e < 2300$. Die Strömung des Blutes in den Arterien ist nicht wirklich laminar, aber der Fluss geht auch hier mit der vierten Potenz des Radius. Cholesterin oder andere Hindernisse in den Arterien bedeuten eine effektive Verkleinerung des Radius und damit eine drastische Reduzierung der Blutströmung. Das Herz muss sich sehr anstrengen, um dem Körper die nötige Blutmenge zuzuführen.

Messbeispiel: Um η von Wasser zu messen, verbinden wir eine Kapillare (L = 45 cm, R = 0.7 mm) horizontal mit einem Messzylinder mit seitlicher unterer Öffnung. Dieser Zylinder ist mit Wasser gefüllt, dessen Höhe h wir konstant halten (20 cm). Wir bestimmen die in $\Delta t-$Sekunden austretende Wassermenge ΔV (als Mittel aus 5 Einzelmessungen) und berechnen η nach (2.4-18), d.h.

$$\eta = \frac{\pi}{8Q}\frac{R^4}{L}(P_1 - P_2) = \frac{\pi}{8Q}\frac{R^4}{L} \cdot \rho g h$$

Für Wasser von $20°C$ ist $\eta = 0.001\ Ns/m^2 = 1cP$. Die Viskosität von Blut ist etwa viermal höher.

Die Viskosität von Flüssigkeiten fällt mit steigender Temperatur, die von Gasen nimmt dagegen zu. Die Viskosität von Ölen fällt ganz markant mit steigender Temperatur. Das ist der Hauptgrund dafür, dass ein kaltes Auto wenig Leistung entwickelt.