2 Die Newtonschen Gesetze

2.1 Masse und Kraft

Im Jahre 1687 wurden die "Philosophiae naturalis principia mathematica" des Isaac Newton (1643-1727) unter dem Imprimatur des S. Pepys veröffentlicht. Die berühmten drei Newtonschen Gesetze finden sich schon auf den ersten Seiten der Principia:

Lex I: Jeder Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung (GGB), außer wenn er durch die Wirkung von Kräften, die auf ihn einwirken, gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Lex II: Die Änderung des Impulses (motus) der Bewegung ist der wirkenden Kraft proportional und erfolgt in Richtung der Kraft.

Lex III: Zu jeder Aktion gehört eine gleich große, aber entgegengesetzte Reaktion, d.h. die Wechselwirkungskräfte zwischen zwei Körpern sind immer gleich groß und wirken in entgegengetzten Richtungen.

Die moderne Formulierung des zweiten Gesetzes (Axioms), d.h. $F = ma$ oder $F = \frac{d(mv)}{dt}$ erscheint nicht in Newtons Werk. Er erklärt auch nicht, was genau *Trägheit, Kraft* oder *Masse* bedeuten.

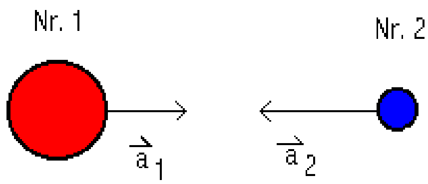
Zu sagen: *Trägheit ist die allgemeine Eigenschaft der Materie, in Ruhe oder GGB zu bleiben, wenn keine Kräfte wirken oder wenn ihre Resultierende Null ist, reicht nicht aus, um eine praktische Mechanik aufzubauen.* ***Es ist notwendig zu sagen, wie Trägheit, Kraft und Masse zu messen sind.***

2.1.1 Definition der Trägen Masse

Der österreichische Physiker Ernst Mach (1838-1916) unterzog die Newtonschen Gesetze einer genauen Analyse. Er untersuchte zwei kugelförmige Körper (zwei "materielle Punkte"), die in Wechselwirkung stehen, sie sind z.B. mit einer Spiralfeder verbunden.

Für verschiedene Körper und Federn hatte Mach die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der beiden Körper gemessen. (Derartige Experimente werden heutzutage in Schullabors mit Hilfe stroboskopischer Registrierung durchgeführt. Um die Reibungsverluste zu reduzieren, lässt man die verbundenen Kugeln frei fallen oder man benutzt Pucks, die auf einer Gasschicht fast reibungsfrei horizontal gleiten.)

Man sagt, dass zwei Körper in Wechselwirkung stehen, wenn sie sich gegenseitig anziehen oder abstoßen, d.h. wenn an jedem der Körper eine Kraft angreift, die vom anderen Körper ausgeht.



Wechselwirkung zweier Körper.

Fig.2.1

Aufgrund derartiger Experimente konnte Mach die folgenden fundamentalen Aussagen machen:

1a . In jedem Augenblick haben die beiden Körper entgegengesetzte Beschleunigungen.

1b. Die Beschleunigungsvektoren liegen auf einer Geraden, die durch die Mittelpunkte der beiden Körper geht.

2. In jedem Augenblick ist der Quotient aus den Beschleunigungsbeträgen gleich einer Konstanten.

$$\frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_2}|} = konst. := m_{21} \tag{2.1-1}$$

Die Beschleunigung ist eine vektorielle Größe (*Vektor*) mit Betrag, Richtung und Richtungssinn. Man stellt einen Vektor meist als Buchstaben in Fettdruck, als Pfeilbuchstaben oder als Frakturbuchstaben dar.

Die beiden Machschen Erfahrungssätze sind nicht von der Art der Wechselwirkung abhängig. Zwar verursachen verschiedene Wechselwirkungsarten i. Allg. verschiedene Beschleunigungen, aber der Quotient aus den Beträgen der Beschleunigungen ist unabhängig davon, wie die Wechselwirkung erzeugt wird.

Daher kann dieser Quotient nur eine innere Eigenschaft des Systems der beiden Körper sein.

Das zweite Machsche Ergebnis liefert eine dynamische *Definition* der sogenannten **trägen Masse** m_{21}des zweiten Körpers in Bezug auf den ersten. Mach zeigte, dass es auch möglich ist, einem einzelnen Körper eine träge Masse zuzuordnen. Es ist nur nötig, einen der beiden Körper als Normal auszuwählen und seine Masse willkürlich mit $m_1 := 1kg$ zu bezeichnen.

Ein Körper Nr. n hat dann definitionsgemäß die träge Masse

$$m_n = \frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_n}|} \cdot 1kg \tag{2.1-2}$$

Man kann im Prinzip die träge Masse eines beliebigen Körpers dadurch bestimmen, dass man ihn auf irgendeine Weise in Wechselwirkung mit dem Normal bringt und die Beschleunigungen misst. (Selbstverständlich wäre dieses Verfahren im Alltag wenig glücklich. Glücklicherweise hat die Natur den Körpern neben der Eigenschaft der Trägheit auch die der Schwere gegeben. Da beide Massen sich als proportional erweisen, benutzt man die viel einfacheren Messmethoden für schwere Massen auch zur Bestimmung der trägen Massen.)

Beispiel:

Um die träge Masse (oder jetzt einfach "Masse") m eines beliegigen Körpers K zu bestimmen, bringen wir ihn auf irgendeine Art mit dem Massennormal (oder mit einer Kopie davon) in Wechselwirkung. Wir wollen annehmen, dass unser Körper K eine Beschleunigung von 0.2 m/s^2 erhält. Die Beschleunigung des Normalkörpers sei 1 m/s^2. Die Beziehung 2.1-2 sagt uns, dass

$$m = \frac{1ms^{-2}}{0.2ms^{-2}} \cdot 1kg = 5kg$$

beträgt. Im SI-System werden Massen in kg gemessen. Je größer die Masse eines Körpers ist, desto größer muss eine Kraft sein, um ihm eine bestimmte Beschleunigung zu erteilen. Die Masse bestimmt also die Trägheit eines Körpers.

Wir können jetzt das Machsche Resultat 1a folgendermaßen schreiben

$$m_2\overrightarrow{a_2} + m_3\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{0} \text{ (kgms}^{-2})$$

Diese Gleichung berücksichtigt noch nicht das Resultat 1b, dass nämlich beide Beschleunigungsvektoren auf der Verbindungsgeraden der beiden Körperzentren liegen müssen (es soll sich vereinfachend um zwei Kugeln handeln). Resultat 1b bedeutet, dass sowohl $m_2\overrightarrow{a_2}$ als auch $m_3\overrightarrow{a_3}$ parallel zum Vektor $\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2}$ sein müssen. D.h. der Winkel zwischen $(\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2})$ und $\overrightarrow{a_2}$ wie auch der zwischen $(\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2})$ und $\overrightarrow{a_3}$ ist Null.

Mit Hilfe des Vektorproduktes können wir das Gesagte zusammenfassend wie folgt ausdrücken

$$\overrightarrow{r_2} \times m_2\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{r_3} \times m_3\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{0} \tag{2.1-3}$$

Den Beweis für diese Gleichung kann man folgendermaßen führen

$$\begin{array}{ll} 1: & (\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2}) \times m_2\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{r_3} \times m_2\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{r_2} \times m_2\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{0} \\ 2: & (\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2}) \times m_3\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{r_3} \times m_3\overrightarrow{a_3} - \overrightarrow{r_2} \times m_3\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{0} \end{array}$$

Wenn wir noch $m_2\overrightarrow{a_2} + m_3\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{0}$ berücksichtigen, ergibt sich

$$\begin{array}{ll} 1': & \overrightarrow{r_2} \times m_2\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{r_3} \times m_3\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{0} \\ 2': & \overrightarrow{r_3} \times m_3\overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{r_2} \times m_2\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{0} \end{array}$$

Man nennt die Größe $\overrightarrow{M} := \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{a}$ **Drehmoment**. $\overrightarrow{r_2}$ und $\overrightarrow{r_3}$ sind die Ortsvektoren der beiden Körper.

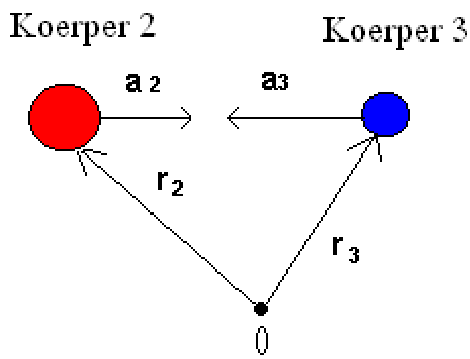


Fig.2.2

Die Beschleunigungsvekoren liegen auf der Geraden, die durch die Zentren der beiden Körper geht. Das Ergebnis 2.1-3 wird uns erst dann wieder interessieren, wenn wir von der Drehbewegung sprechen werden. Der Vektor $\overrightarrow{a_2}$ hat den Richtungssinn von $\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2}$. Der Ursprung O ist ein Fixpunkt.

2.1.2 Definition der Kraft

Die Bedeutung der Machschen Interpretation der Newtonschen Gesetze, besteht auch darin, dass sich der Begriff **Kraft** ohne die Anwendung vager Begriffe wie "etwas, dass eine Bewegung oder eine Verformung hervorruft" definieren lässt. Wir suchen in Wirklichkeit eine Größe, die die Stärke (Intensität) der WW (Wechselwirkung) zwischen zwei Körpern misst. Man könnte zunächst an die Beschleunigung als nützlichen Kandidaten denken. Aber damit hätten wir keinen Erfolg, da beide Körper i. Allg. verschiedene Beschleunigungen erfahren. Wenn wir aber das Produkt $m\overrightarrow{a}$ als Maß der WW nehmen, werden wir sehen, dass diese Wahl sinnvoll ist. Denn gemäß der experimentell erhaltenen Gleichung $m_2\overrightarrow{a_2} + m_3\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{0}$ erhalten wir $m_2 a_2 = m_3 a_3$, falls wir die absoluten Werte der Beschleunigungen nehmen. Dieses Ergebnis führt uns zur folgenden

Definition 1 *Das Produkt $\overrightarrow{F}_2 = m_2\overrightarrow{a_2}$ heißt **Kraft**, die der Körper 2 bei seiner WW mit Körper 3 erfährt.*

Definition 2 *Das Produkt $\overrightarrow{F}_3 = m_3\overrightarrow{a_3}$ heißt **Kraft**, die der Körper 3 bei seiner WW mit Körper 2 erfährt.*

Auf diese Weise wird der Kraftbegriff auf dem Massebegriff aufgebaut. Im SI-System wird die Einheit der Kraft *Newton* (**N**) genannt. Wegen der Definition $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ gilt dann $1N = (1kg)(1m/s^2) = 1kgm/s^2$.

Aus dem Machschen Schema folgt das 3. Newtonsche Gesetz ganz automatisch. Wir haben die Gleichung $m_2\overrightarrow{a_2} + m_3\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{0}$ nur umzuschreiben:

$\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{0}$ oder $\overrightarrow{F_2} = -\overrightarrow{F_3}$, was nichts anderes ist als die mathematische Formulierung der Lex III.

Das dritte Gesetz: Wenn zwei Körper in WW stehen, so hat die Kraft, die der eine Körper auf den anderen ausübt, immer den gleichen Betrag, die gleiche Richtung aber entgegengesetzte Orientierung der Kraft, die der andere Körper auf ihn ausübt.

Es ist wichtig festzuhalten, dass diese Aktions-und Reaktionskräfte immer an verschiedenen Körpern angreifen. Wenn sie am selben Körper angriffen, würden sie sich gegenseitig aufheben, und es gäbe keine Bewegung.

Nun ist ein Zwei-Körper-System natürlich sehr einfach. Was ist zu tun, wenn ein Körper (man sagt oft Massenpunkt MP) gleichzeitig mit zwei oder mehr MPs in WW steht?

Um diese Frage zu beantworten, hilft keine philosophische Diskussion, denn es handelt sich um eine empirische Frage, die nur mit Hilfe von zusätzlichen Experimenten beantwortet werden kann.

Die Experimente sagen nun Folgendes: Wenn ein Körper K (Probekörper) mit der trägen Masse m gleichzeitig mit n anderen Körpern in WW steht und dabei die Einzelkräfte $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}$ erfährt, so erhält er eine Beschleunigung $\overrightarrow{a}$, die der folgenden Gleichung entspricht:

$$\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = m\overrightarrow{a} \qquad (2.1\text{-}4)$$

D.h. der Körper wird derart beschleunigt, als ob an ihm eine einzige Kraft wirkte, die gleich der Vektorsumme aller Teilkräfte ist. Wenn die Vektorsumme Null sein sollte, befinden sich Körper und Kräfte im *Gleichgewicht*.

In einem derartigen Fall fährt der Körper fort, sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden zu bewegen oder aber in Ruhe zu bleiben. Diese direkte *Schlussfolgerung* aus dem 2. Newtonschen Gesetz führt uns demnach nach dem 1. Gesetz, zur Lex I. Die Machsche Analyse zeigt also, dass Lex I eine einfache Folge von Lex II ist.

Das 1. Newtonsche Gesetz gilt nicht in allen Bezugssystemen. Ein Bezugssystem, in dem das 1. Newtonsche Gesetz gilt, wird **Inertialsystem** genannt. In ihm gelten auch die anderen Newtonschen Gesetze.

Ein Beobachter, der nicht sicher ist, ob er die Newtonschen Gesetze anwenden darf, d.h. eine Person, die nicht weiß, ob sie sich in einem Inertialsystem befindet, kann einen ersten Test machen und feststellen, ob ein isolierter Körper (z.B. ein Körper auf einem Luftkissentisch) eine konstante Geschwindigkeit beibehält. Wenn dies nicht der Fall ist, und wenn der Beobachter nicht in der Lage ist, eine Kraft aufzuspüren, die die Geschwindigkeitsänderung erzeugen könnte, muss er annehmen, dass er sich nicht in einem Inertialsystem befindet (z.B. könnte er sich auf einer rotierenden Plattform befinden). Der Beobachter darf in diesem Fall die Newtonschen Gesetze nicht anwenden.

Wenn der Beobachter aber stur ist und das 2. Newtonsche Gesetz im nichtinertialen System anwenden will, muss er einen Trick verwenden und eine **Scheinkraft (Trägheitskraft)** $\overrightarrow{F^*} = m\overrightarrow{a}^*$ einführen, in der $\overrightarrow{a}^*$ die Beschleunigung ist, mit der der nichtinertiale Beobachter jeden Körper sich bewegen sieht, der mit keinem anderen Körper in WW steht. (Wenn ein Aufzug frei fällt, so wirken auf jeden darin befindlichen Körper sein Gewicht $\overrightarrow{F_g} = m\overrightarrow{g}$ und die Trägheitskraft $\overrightarrow{F^*} = m\overrightarrow{a^*}$. Hier ist $\overrightarrow{a^*} = -\overrightarrow{g}$ = Gravitationsbeschleunigung. Die Gesamtkraft auf einen frei fallenden Menschen ist damit $\overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F^*} = m\overrightarrow{g} + m\overrightarrow{a^*} = \overrightarrow{0}$.

Wenn in einer Raumstation, die sich irgendwo im Weltraum, weit entfernt von einem Himmelskörper, bewegt, beobachtet wird, dass jeder WW-freie Körper eine Beschleunigung $\overrightarrow{a^*}$ erfährt, so weiss man, dass die Station mit $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a^*}$in Bezug auf ein Inertialsystem -von Raketen- beschleunigt wird. Auf jeden Körper wirkt für einen mitreisenden Beoachter eine Scheinkraft $\overrightarrow{F^*} = m\overrightarrow{a}^*$, z.B. in Richtung "Fußboden". Falls die Station auf einem Stern ruht, bei dem $\overrightarrow{a^*} = \overrightarrow{g}$ ist, wird auf jeden Körper die Gewichtskraft $m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a^*}$ wirken, also von der selben Größe sein wie vorhin im freien Weltraum. Der Beobachter kann mit Hilfe von mechanischen Experimenten nicht feststellen, ob er ruht oder ob er in einer beschleunigt fliegenden Raumstation lebt. In der Station soll es übrigens keine Fenster geben.)

2.1.3 Gleichförmige Kreisbewegung

Ein Körper befinde sich in Ruhe auf einer gleichförmig rotierenden Plattform, z.B. auf einem Karussell.

Die Beschleunigung der Plattform in Bezug auf ein Inertialsystem ist gegeben durch $\overrightarrow{a} = -v^2\overrightarrow{r^0}/r$ ($\overrightarrow{r^0}$ ist der Einheitsvektor, der vom Drehzentrum zum Körper hin weist). Für die Scheinkraft haben wir $\overrightarrow{F^*} = mv^2\overrightarrow{r^0}/r$, wo v die Geschwindigkkeit des Körpers im Inertialsystem ist (z.B. Erdoberfläche, die für die meisten Probleme als Inertialsystem gewählt werden kann). Die Scheinkraft $\overrightarrow{F^*} = mv^2\overrightarrow{r^0}/r$ wird Zentrifugalkraft genannt. (Die Erde als nichtinertiales System behandeln wir in 3.5.2.) Unter Zentripetalkraft versteht man die vektorielle Summe aller an einem kreisenden Körper angreifenden WW-Kräfte. Bei einer an einem Faden herumgewirbelten Kugel ergibt die Vektorsumme aus Fadenkraft und Gravitationskraft die Zentripetalkraft. Wenn bei der Rotation nur zwei Körper in WW stehen, z.B. bei einem Erdsatelliten, ist die Zentripetalkraft die Kraft der Erde auf den Satelliten und die Zentrifugalkraft ist die Kraft, mit der der Satellit die Erde anzieht.

Wenn sie in einer Raumkapsel um die Erde kreisen, gibt es nur eine Kraft, die auf Sie einwirkt: die Gravitationskraft. Sie selbst und auch die Kapsel befinden sich in einer gleichförmigen Kreisbewegung mit Beschleunigungen, die aufs Zentrum hin gerichtet sind. Die Gravitationskraft ist die Zentripetalkraft, die diese Beschleunigung erzeugt. Wenn die Gravitationskraft die einizige Kraft ist, die auf einen Körper einwirkt, sagt man wenig zutreffend, dass der Körper befindet sich im Zustand der Schwerelosigkeit befinde. Irgendwann in der Vergangenheit erfuhren die Kapsel und der Astraonaut einen tangentialen Anschub, der die Kreisbahn ermöglichte. Einem Apfel, der einfach vom Baume fällt, fehlt der tangentiale Schub, um ihn zu einem Satelliten zu machen. Der Unterschied zwischen der Fall- und der Kreisbewegung liegt nur in den verschiedenen Anfangsbedingungen.

Ein Apfel, der auf einem Tisch ruht, befindet sich nicht etwa im Zustand der "Schwerelosigkeit", denn auf ihn wirken *zwei* Kräfte: die Gravitationskraft und die Kraft des Tisches auf den Apfel. Beide Kräfte heben sich auf.

Um das zweite Newonsche Gesetz richtig anzuwenden, hat man immer die Kräfte zu finden, die auf den fraglichen Körper einwirken, d.h. man muss alle Objekte aufsuchen, die mit dem Körper in Wechselwirkung stehen.

2.1.4 Die Gravitations-Wechselwirkung

In der Natur gibt es eine besondere Wechselwirkung: die Gravitations-WW (kurz: Gravitation). Um die Intensität dieser WW zu kennzeichnen, ordnen wir jedem Stück Materie eine Gravitationsmasse m' zu (auch Gravitationsladung genannt). Die Kraft $\overrightarrow{F}$, die der Gravitations-WW zwischen zwei Körpern zugeordnet wird, muss der Gravitationsmasse der beiden Körper proportional sein. Es ist sehr schwierig, die Distanz-Abhängigkeit der Kraft im Labor feststustellen, da die Gravitations-WW extrem schwach ist. Die mit großer Sorgfalt durchgeführten Experimente von Cavendish (1731-1810), Eötvös (1848-1919) und Dicke (1916-) haben gezeigt, dass die Gravitations-WW anziehend und umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung ist. Wir können daher schreiben:

$$F = G\frac{m'_1 m'_2}{r^2} \tag{2.1-5}$$

G ist eine Proportionalitätskonstante, die experimentell ermittelt werden muss. Ihr ungefährer SI-Wert beträgt $G = 6.670 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$. (Gravitationskonstante). Gleichung 2.1-5 ist das Newtonsche Gravitationsgesetz. Newton benutzte die experimentellen Keplerschen Gesetze und leitete aus ihnen seine Formel ab. Aus den sehr genauen Experimenten von Eötvös und Dicke kann man schließen, dass Gravitationsmasse und träge Masse proportional sind, d.h. $m' = k \cdot m$. Ich hatte dies schon einmal erwähnt, und gesagt, dass man durch geeignete Wahl der Einheiten der Konstanten den Wert 1 geben kann. Der begriffliche Unterschied zwischen beiden Massen bleibt bestehen, auch wenn wir künftig i.Allg. nur von "Masse" sprechen werden.