1 Lineare Bewegung der Körper

1.3 Regentropfen und Fallschirmspringer

$(v'(t) = -g - rv(t))$

In beiden Fällen handelt es sich um Objekte, die aus großen Höhen fallen und von dem durchfallennen Medium (Luft) gebremst werden. Um unsere Arbeit zu erleichtern, nehmen wir in erster Näherung an, dass die Beschleunigung eine lineare Funktion von v ist

$$a = \frac{dv}{dt} = -g - rv(t) \tag{1.3-1}$$

Die Luftreibung steckt in dem Term $-rv(t)$. Der Term $-mg$ wäre die Gravitationskraft, die zusammen mit der Reibungskraft am Körper angreift. Gleichung 1.3-1 gilt nur für einen "skydiver", dessen Fallschirm noch geschlossen ist. Der Körper beginnt mit $v_0 = 0$ seine Fallbewegung. Die Reibungskraft beginnt zu wachsen, und wird schließlich dem Betrag nach der Gravitationskraft gleich. Von diesem Moment an fällt der Körper mit konstanter Geschwindigkeit v_{end}, da die Beschleunigung ja Null ist. Ein Skydiver erreicht eine Endgeschwindigkeit von ca. 50 m/s nach einer Fallstrecke von ungefähr 450 m. Ein Regentropfen erreicht bereits nach etwa 6 m eine konstante Fallgeschwindigkeit von ungefähr 7 m/s. Technisch gesprochen ist Gl.1.3-1 eine separierbare Diff.-Gleichung erster Ordnung. Wir werden später ausführlicher über Diff.-Gleichungen und ihre Lösungen sprechen. Im Abschnitt 1.3.1 lösen wir Gleichung 1.3-1 auch "zu Fuß".

Die Reibungskraft ist $F_r = -kv(t)$, d.h. unser r ist gegeben durch $r = k/m$, wobei k eine positive Konstante ist. Im Kapitel 2.4.1 werden wir ausführlich über Reibungskräfte reden, z.B. werden wir das Fallen von Kugeln in Flüssigkeiten untersuchen.

Wir wollen die Formeln für die Zeitabhängigkeit von Geschwindigkeit und Höhe bestimmen. Zunächst die Geschwindigkeit:

$$\begin{array}{c} v' + g + rv = 0 \\ v(0) = v_0 \end{array},$$

Exact solution is: $\left\{-\frac{1}{r}\left(g - r\exp\left(-r\left(t - \frac{1}{r}\ln\frac{1}{r}\left(g + rv_0\right)\right)\right)\right)\right\} =$

$$\left\{\frac{1}{r}\left(ge^{-rt} - g + rv_0e^{-rt}\right)\right\}$$

Das erste Ergebnis ist ein wenig unübersichtlich, mit `Simplify` wird es schon besser. Aber mit Handarbeit bringen wir das Resultat schließlich auf die folgende Form

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{r} + (v_0 + \frac{g}{r})e^{-rt} \tag{1.3-2}$$

In MuPAD hätten wir geschrieben

```
vel:=ode({v'(t)=-g-r*v(t),v(0)=v0},v(t)):
velocity:=solve(vel):
simplify(op(%)):
expand(%)
```

Um jetzt die Höhe in Funktion der Zeit zu erhalten, lösen wir die Diff.-Gleichung

$$\begin{array}{c} y'' + g + ry' \\ y'(0) = v_0 \\ y(0) = y_0 \end{array} ,$$

Exact solution is: $\left\{\frac{1}{r^2}\left(g + r\left(v_0 + ry_0\right) - grt\right) - \frac{1}{r^2}e^{-rt}\left(g + rv_0\right)\right\}$
Auch diesen Ausdruck werden wir in eine handlichere Form bringen

$$y(t) = y_0 - gt/r + (rv_0 + g)(1 - e^{-rt})/r^2 \tag{1.3-3}$$

Für MuPAD schreiben wir

```
hoch:=ode({y''(t)=-g-r*y'(t),y'(0)=v0,y(0)=y0},y(t)):
hoehe:=solve(hoch)
```

Aus der Gl. 1.3.-2 schließen wir, dass die Geschwindigkeit des Körpers mit der Zeit abnehmen wird, um gegen den Grenzwert $v_{end} = -\frac{g}{r}$zu streben. Manchmal ist diese Endgeschwindigkeit so klein, dass ein Mensch auch einen Sturz ohne Fallschirm überleben kann -sofern Gott willens ist.

Jetzt ist es an der Zeit, sich das Fallen eines Skydivers (aus 1500 m) einmal graphisch anzuschauen.

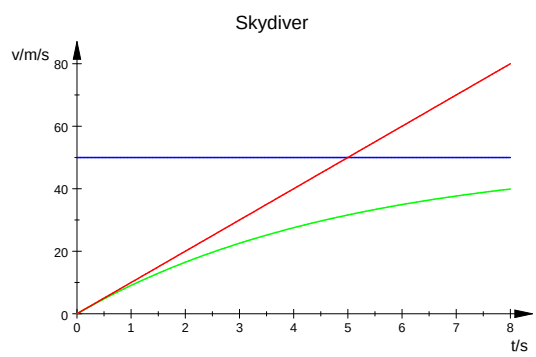


Fig.1.3-1

Man sieht, dass sich der Skydiver der horizontalen Endgeschwindigkeit asymptotisch nähert. In Wirklichkeit schließt die Annäherung natürlich in endlicher Zeit ab.

1.3.1 Lösung mit Bleistift und Papier

Wieder benutzen wir die Methode der Separation der Variablen, um Gl. 1.3-1 schriftlich zu lösen. Wir notieren $\frac{dv}{rv+g} = -dt$. Beide Seiten lassen sich leicht integrieren: $\int dv/(rv+g) = -\int dt + C_1$ mit dem Ergebnis $\ln(rv+g)/r = -t + C_1$.Die Anfangsbedingungen reichen aus, um die Integrationskonstante C_1 zu bestimmen: $C_1 = \ln(rv_0 + g)/r$.

Machen wir noch eine Umformung:

$$rv + g = e^{-rt+\ln(rv_0+g)} = (rv_0 + g)e^{-rt}$$

Nun ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{r} + (v_0 + \frac{g}{r})e^{-rt} \tag{1.3-4}$$

Wollten wir die Achse nach unten orientieren, so hätten wir $-g$ durch g zu ersetzen.

In dem praktisch wichtigsten Fall, dass $v(0) = 0$ ist, erhalten wir

$$v(t) = \frac{g}{r}(1 - e^{-rt}) \tag{1.3-5}$$

Indem wir Gl. 1.3-4 integrieren, ergeben sich für $y(t)$ die folgenden Ausdrücke:

$$y = \int -\tfrac{g}{r}dt + (v_0 + \tfrac{g}{r})\int e^{-rt}dt + C_2$$
$$y = -\tfrac{g}{r}t - \tfrac{rv_0+g}{r^2}e^{-rt} + C_2$$

Mit $y(0) = y_0$ erhalten wir für C_2 den Ausdruck $C_2 = y_0 + (rv_0 + g)/r^2$.

So erhalten wir schließlich

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{r}t + \frac{rv_0 + g}{r^2}(1 - e^{-rt}) \tag{1.3-6}$$

1.3.2 Radioaktiver Zerfall und R-L-Kreis

Gleichung 1.3-1 treffen wir in der allgemeinen Form $y'(t) = \frac{dy}{dt} = a - by(t)$ oft als mathematisches Modell für natürliche Zerfallsprozesse.

Beim **radioaktiven Zerfall** finden wir das Gesetz $\frac{dN}{dt} = a - bN$, wo $N(t)$ die Anzahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen Kerne ist, a kennzeichnet die Produktionsrate. Wenn wir $a = 0$ annehmen und $N(0) = N_0$ setzen ($N_0 =$ Anzahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Kerne), so ergibt sich als Zerfallsgesetz

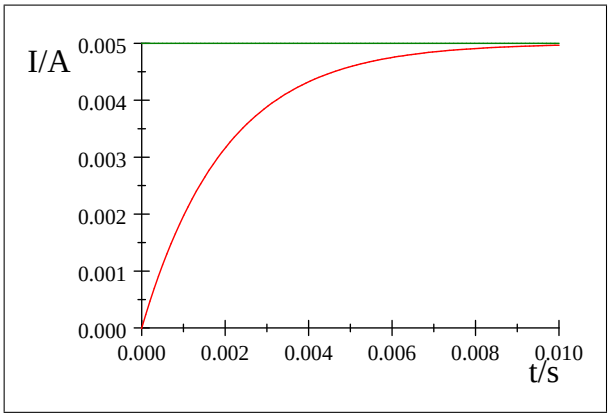
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1.3-7}$$

Wir haben hier $b = \lambda =$ *Zerfallskonstante* gesetzt. Die *Halbwertszeit* ist $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ (man gibt die Halbwertszeit an, weil es keinen Sinn hätte, von "Vollwertzeit" zu reden).

Ein Beispiel für einen allmählich wachsenden Vorgang (vergleichbar dem Skydiver) ist ein R-L-Schaltkreis, der zur Zeit $t = 0$ an eine Batterie der Spannung U angeschlossen wird. Für die Zunahmegeschwindigkeit der Stromstärke erhält man die zu 1.3-1 analoge Gleichung

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U}{L} - \frac{R}{L} I(t) \tag{1.3-8}$$

Die Lösung dieser Gleichung hat die gleiche Form wie 1.3-5 $I(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-bt})$. Nach $\tau = 1/b = L/R$ Sekunden erreicht der Strom ca. 63% seines Endwertes. Wir wollen für einen speziellen Fall die Strom-Zeit-Kurve zeichnen. Wir wählen R = 2000 Ω, L = 4 H und U = 10 V. $I(t) = 10(1 - e^{-2000t/4})/2000$; 0.005 (drag)



R-L-Kreis

Fig.1.3-2

Nach ungefähr 10 ms erreicht der Strom seinen Grenzwert von 5 mA. Nach 4/2000 s = 2 ms erreicht der Strom den Wert $0.63 \cdot 10V/2000\Omega = 3.2mA$.

Die MuPAD-Anweisungen können folgendermaßen aussehen:

```
R:=2000:L:=4:U:=10:
i:=t->U*(1-exp(-R*t/L))/R:
g:=t->U/R:
kurve:=plot::Function2d(i(t),t=0..0.01):
gerade:=plot::Function2d(g(t),t=0..0.01, Color=RGB::Green):
plot(kurve,gerade,
AxesTitles=["t/s","I/A"],
XTicksNumber=Low,
YTicksNumber=Low,Header="R-L-Kreis",
GridVisible=TRUE)
```

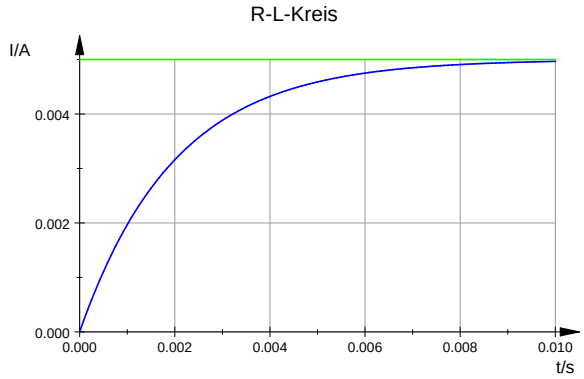


Fig.1.3-3