1 Die Bewegung von Körpern

Übersetzung des portugiesischen Mechanik-Kursus des Autors

1.1 Bewegung auf einer geraden Linie

Wir wollen annehmen, dass sich ein Körper entlang einer geraden Linie bewegt, un dass $x = x(t)$ seine Lage zum Zeitpunkt t ist.

Wenn er sich mit der **konstanten** Geschwindigkeit v bewegt (man spricht dann von einer gleichförmigen Bewegung), wissen wir, dass sein Ort zum Zeitpunkt t gegeben ist durch die Gleichung

$$x(t) = vt + x(t_0) \tag{1.1-1}$$

$x(t_0)$ ist die Lage des Körpers zum Zeitpunkt t_0. Gleichung (1.1-1) stellt die Gleichung einer Geraden dar und wird *Weg-Zeit-Diagramm* genannt.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, schreiben wir x_0 anstelle von $x(t_0)$. In der Zeit von t bis $t + h$, h ist eine kurze Zeitspanne, erleidet der Körper eine Verschiebung von $\Delta x = x(t + h) - x(t)$ m.

In den meisten Ländern benutzt man das SI-System mit *Länge* in Meter (m), *Zeit* in Sekunde (s) und *Masse* in Kilogramm (kg).

Die SI-Einheit der **Kraft** ist $kg \cdot m/s^2$und wird *Newton* (N) genannt. Die SI-Einheit der **Leistung** ist $kg \cdot m^2/s^3 = N \cdot m/s = Joule/s$, was schliesslich **Watt** genannt wird.

Der Graph der Funktion (1.1-1) für v = 1m/s und x0 = 2m sieht folgendermassen aus:

$t + 2$

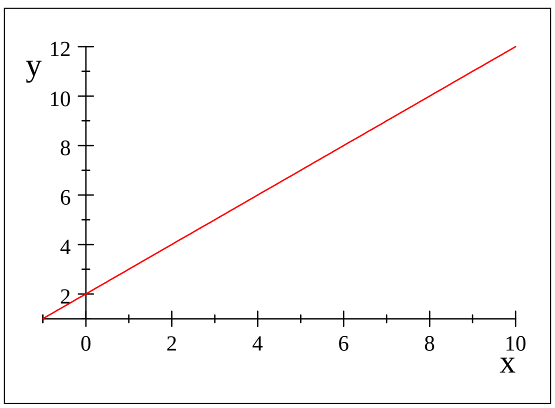


Fig.1.1

Wie erwartet, erhalten wir eine Gerade mit positiver Steigung, da der Körper sich in positiver Richtung seiner Bahn bewegt. Der Quotient aus der in h Sekunden stattfindenden Ortsveränderung und der Zeitspanne h ist

$$v = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \tag{1.1-2}$$

v heisst *mittlere Geschwindigkeit* im Zeitintervall h.

Wenn wir einen Wagen steuern, zeigt uns der Geschwindigkeitsmesser in jedem Augenblick die momentane Geschwindigkeit. Unser Weg-Zeit-Modell, das durch Gl. 1.1-1 beschrieben wird, ist nur anwendbar, wenn wir auf einer geraden Strecke mit *konstanter* Geschwindigkeitsanzeige fahren. Wenn wir das Gaspedal drücken oder auf die Bremse treten, haben wir eine ungleichförmige Bewegung, die nicht mehr von 1.1 beschrieben wird. Der Geschwindigkeitsmesser zeigt eine *momentane* Geschwindigkeit an, die man mathematisch als Grenzwert ausdrückt

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \tag{1.1-3}$$

Die momentane Geschwindigkeit (*wahre* Geschwindigkeit) ist demnach die Ablei-tung der Weg-Zeit-Funktion, die die Bewegung beschreibt. In der Mechanik studieren wir nicht x-beliebige x-t-Funktionen, sondern i.Allg. nur sehr einfache, die sich auch in der Natur finden, z.B. beim Fallen von Körpern.
Die erste Verallgemeinerung von Modell 1.1-1 (*lineares* Modell) ist ein quadratisches Modell

$$x(t) = bt^2 + ct + d \tag{1.1-4}$$

in dem b, c, d Konstanten sind, die i.Allg. experimentell bestimmt werden müssen. Gl. 1.1-4 ist eine Funktion zweiten Grades mit $d = x(0)$, d.h. d ist der Ort zur Zeit $t = 0$. Die Ableitung von 1.1-4, also dx/dt, $x\acute{}(t)$ oder $\dot{x}(t)$ lautet $\frac{d}{dt}(bt^2 + ct + d) = c + 2bt$. Das bedeutet, dass die wahre Geschwindigkeit zur Zeit t gegeben ist durch

$$v(t) = c + 2bt \tag{1.1-5}$$

Die Konstante c ist gleich der Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, d.h. $c =$ Anfangsgeschwindigkeit. Die Konstante $2b$ wird normalerweise mit a bezeichnet, und 1.5 schreibt sich als $v(t) = v_0 + at$. In unserem Modell 1.1-4 ist a eine Konstante und heisst *Beschleunigung* oder relative Geschwindigkeitsänderung. Wir können $a = 2b$ direkt als zweite Ableitung aus 1.1-4 berechnen: $\frac{d^2}{dt^2}(bt^2 + ct + d) = 2b$. Statt Gl. 1.1-4 schreiben wir besser

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \tag{1.1-6}$$

1.1.1 Der Freie Fall

In der Natur finden wir 1.1-6 beim Freien Fall annnähernd realisiert (z.B. beim freien Fall in einer luftleeren Röhre). Die Konstante a (die Erdbeschleuningung) hat den angenäherten Wert von 9.8 m/s^2 und wird mit g bezeichnet. Die Bewegung erfolgt in negativer y-Richtung, d.h. $y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{g}{2}t^2$.

Beispiel 1: Ein Apfel falle zur Zeit $t = 0s$ aus einer Höhe von $y_0 = 12m$. Nach t Sekunden ist seine Position gegeben durch $y(t) = 12m - 4.9\frac{m}{s^2}t^2$.Die Fallzeit folgt aus der Bedingung $y(t) := 0$. Die Lösung von $12 - 4.9t^2 = 0$ lautet: $\{[t = -1.5649], [t = 1.5649]\}$, wovon wir natürlich nur den positiven Wert berücksichtigen, also $t_{fall} = 1.565s$. Die Aufschlaggeschwindigkeit ist $v(1.565s) = 0 - 9.8\frac{m}{s^2} \cdot 1.565s = -15.337\frac{m}{s}$. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass sich der Apfel in negativer Richtung bewegt, also in Richtung Erdoberfläche.

Wenn wir $v - v_0 = at$ mit $y(t) - y_0 = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$ verbinden, erhalten wir eine Gleichung, die die durchfallene Strecke mit der erreichten Geschwindigkeit verbindet.

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) \qquad \text{(Gleichung von Torricelli)}$$

Mit $y = 0$ ergibt sich in unserem Beispiel $v^2 = 0 - 2 \cdot 9.8\frac{m}{s^2}(0 - 12m) = 235.2\frac{m^2}{s^2}$.

Das ergibt erneut $v = \sqrt[2]{235.2\frac{m^2}{s^2}} = 15.336\frac{m}{s}$.

1.1.2 Der senkrechte Wurf nach oben

Wenn wir unseren Apfel senkrecht nach oben werfen, entsteht naturgemäß die Frage nach Steighöhe und Steigzeit. Er verlässt zur Zeit $t = 0$ unsere Hand in der Höhe y_0. Die Steigbewegung ist eine verzögerte lineare Bewegung. Aus $v = v_0 + at$ erhalten wir mit $v(t_{st}) = 0 = v_0 + at_{st}$, die Steigzeit $t_{st} = -\frac{v_0}{a}$.

Durch die Substitution $[y_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2]_{t=-\frac{v_0}{a}} = y_0 - \frac{1}{2a}v_0^2$ erhalten wir die Steighöhe $y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$.

Um die Formeln etwas zu vereinfachen, wählen wir den Abwurfpunkt als Koordinatenursprung. Man zeigt leicht, dass Steig-und Fallzeit miteinander übereinstimmen. Eine weitere interessante Aussage ergibt sich aus der Gleichung von Torricelli:

In jedem Bahnpunkt ist die Grösse $v^2 + 2gy$ eine Konstante.

Denn diese *Konstante der Bewegung* ist gleich v_0^2, d.h. ist nur von der Anfangsgeschwindigkeit abhängig. Wenn wir $v^2 + 2gy = v_0^2$ mit m/2 multiplizieren (m = Masse des Objekts), so ergibt sich der bekannte Energieerhaltungssatz mit $E_k = \frac{m}{2}v^2$ und $E_p = mgy$ als *kinetische-* bzw.*potentielle Energie:*

$$\frac{m}{2}v^2 + mgy = E \tag{1.1-7}$$

In jedem Bahnpunkt ist die Summe aus kinetischer- und potentieller Energie konstant.

Wir werden später ausführlich von der **Energie** zu sprechen haben.
Beispiel 2:

Ein Objekt wird senkrecht von einer Plattform aus nach oben geworfen ($y_0 = 50m$). Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v_0 = 20\frac{m}{s}$. Benutze MuPAD zur Berechnung von Höhe und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 4.08s$.

```
g:=9.8:y0:=50:v0:=20:t:=4.08:
y:=t->y0+v0*t-g*t^2/2:
v:=t->v0-g*t:
y(t);
v(t)

50.03264
-19.984
```

Nach 4.08 s befindet sich das Objekt in 50.03264 m Höhe, also nur 3.264 cm über der Plattform. Dass das Objekt beim Fallen ist, erkennen wir an der negativen Geschwindigkeit von -19.984 m/s.
Berechne den Augenblick, in dem das Objekt den höchsten Bahnpunkt erreicht.

```
g:=9.8:y0:=50:v0:=20:
y:=t->y0+v0*t-g*t^2/2:
solve(diff(y(t),t)=0,t)

{2.040816327}
```

Die Steigzeit beträgt also 2.040816327 s.
Wir wollen uns noch fragen, wann das Objekt wieder zur Plattform zurückkehrt und welche Geschwindigkeit es dann hat. Wir können folgendermassen rechnen:

```
g:=9.8:y0:=50:v0:=20:
y:=t->y0+v0*t-g*t^2/2:
solve(y(t)=50)

{[t = 0], [t = 4.081632653]} //Liste der Loesungen
```

Natürlich sind wir nur an dem positiven Wert interessiert, den man mit dem Operator **op** aus der Liste herausziehen kann:

```
op(%,1)
[t = 4.081632653]
```

Mit dieser Zeit erhalten wir $v_{end} = -20m/s$. Der dazugehörige Kode lautet

```
subs(diff(y(t),t),%)
-20.0
```

1.1.3 Ein wenig MuPAD-Grammatik

Es gibt zwei Methoden, um Funktionen in MuPAD zu definieren. Sei $f(x) = 2x^2+3x-10$ eine gegebene Funktion. Wenn wir sie in MuPAD benutzen wollen, so können wir setzen

```
f:=2*x^2+3*x-10
```

oder

```
g:=x->2*x^2+3*x-10
```

Die erste Form ist zwar kürzer als die zweite, aber sie erlaubt nicht, den Funktionswert an der Stelle $x_1$als $f(x_1)$ zu berechnen. Um z.B. $f(6)$ zu berechnen, kann man $x := 6$ deklarieren und dann f ausführen, oder man benutzt die Funktion "subs":

```
delete x: //loescht den letzten x-Wert
f:=2*x^2+3*x-10:
subs(f,x=6)

80 // = f(6)
```

Dagegen erhalten wir mit dem folgenden Kode $g(6) = 80$:

```
g:=x->2*x^2+3*x-10;
g(6)
```

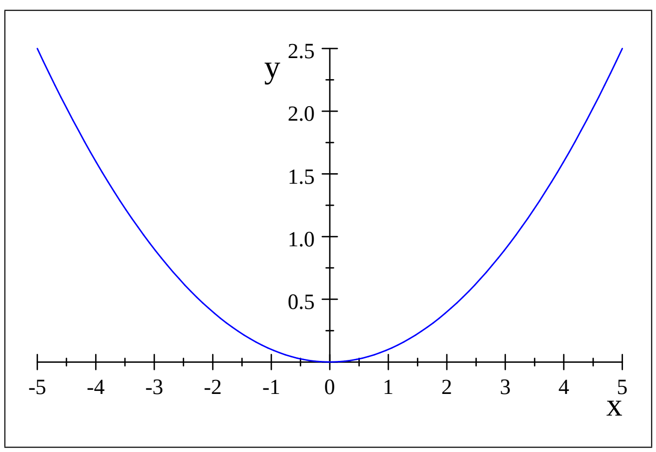
Vergleichen Sie auch die folgenden Anweisungen zur Berechnung von FLäche und Umfang eines Kreises. Mit **DIGITS := 5** legen Sie die Zahl der Dezimalstellen auf 5 fest. Die Umrechnung der Ergebnisse in Dezimalzahlen wird von **float ()** besorgt; hier zeigt **float** den Umfang an (U =15.708 m). Man benutzt ein Semikolon zur Ausgabe von Zwischenwerten.

```
DIGITS:=5:
A:=PI*r^2: U:=2*PI*r:
subs(A,r=2.5);
subs(U,r=2.5)
6.25*PI
5.0*PI
float(%)
15.708
```

Die beiden Anweisungen **expand** und **factor** sind entgegengesetzt wirkende Funktionen

```
expand((a+b)^2);
factor(%)
a^2 + 2*a*b + b^2//expand
a + b)^2//factor
```

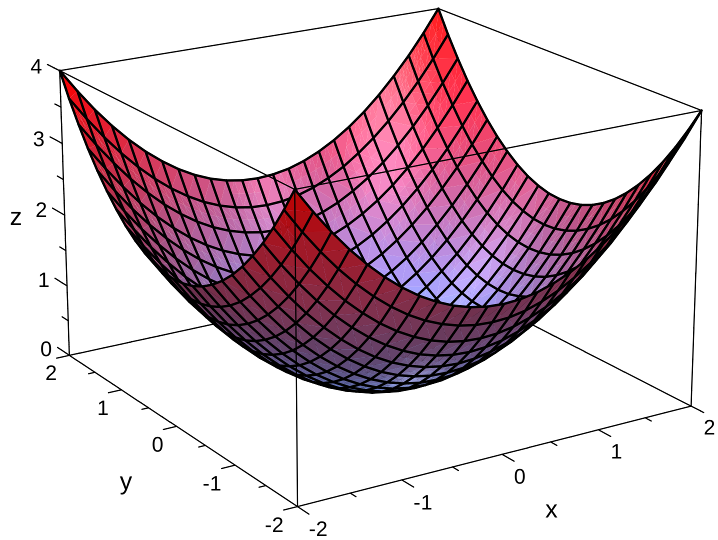
Wir wissen schon, dass es leicht ist, Graphen von Funktionen zu erstellen



Parabel

```
f:=x^2/10:plotfunc2d(f, x=-2..2)//Parabel
```

Die folgende Funktion stellt eine Fläche im Raum dar



Flaeche

```
z:=(x^2+y^2)/2:
plotfunc3d(z,x=-2..2,y=-2..2)
```

1.2 Übungen zu MuPAD

1. Berechne $f(3)$ für $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 20x + 11$

2. Bestimme die Ableitungen von f an den Stellen x = -2, 1, 5

3. Vereinfache $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10)/(x - 1)$ und schreibe das Resultat als Produkt.

4. Löse die Gleichung $x^2 - 3x - 10 = 0$.

5. Zeichne den Graphen von f für $x \in [-3, 6]$.

6. Bestimme die Nullstellen des Graphen G_f.Es existiert nur eine numerische Löung, die Sie mit **numeric::solve(f=0,x)** finden. Wenn man definiert **g**:=**numeric::solve(f=0,x),** so liefert **g[n]** die Lösung x_n.

7. Welches sind die Lösungen der Gleichung $x^3 - 35x^2 - 206x + 240 = 0$?

Antworten:

1. Der Funktionswert in x = 3 ist gleich 23.75, denn

```
f:=x->x^4/4-4*x^3/3-7*x^2/2+20*x+11:
f3);
float(%)
```

2. g sei die Ableitung von f

```
f:=x->x^4/4-4*x^3/3-7*x^2/2+20*x+11:
diff(f(x),x):
 g:=% ://Ableitung
subs(g,x=-2);
subs(g,x=1);
subs(g,x=5)
```

Also hat die Ableitung g an den Stellen x = -2, 1, 5 denselben Wert, nämlich 10.

3. Mit **divide** können wir Polynome dividieren

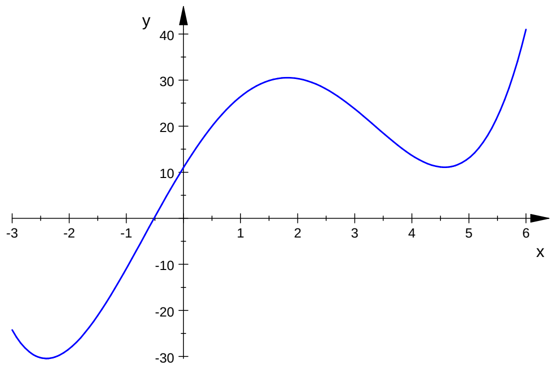
```
divide((x^3-4*x^2-7*x+10),(x-1))
 x^2 - 3*x - 10, 0
```

Die Null zeigt an, dass es keinen Rest gibt.
Die Polynomdivision lässt sich auch mit **simplify** durchführen:

```
simplify((x^3-4*x^2-7*x+10)/(x-1))
factor(%)
x^2 - 3*x - 10
x + 2)*(x - 5)
```

4. Wir benutzen die Funktion **solve**

```
solve(x^2-3*x-10=0,x)[1]
solve(x^2-3*x-10=0,x)[2]// Ergebnisse: -2 und 5
```



5. Graph

```
f:=x->x^4/4-4*x^3/3-7*x^2/2+20*x+11:
plotfunc2d(f(x),x=-3..6)
```

6. Nullstellen der Funktion f:

```
numeric::solve(f(x)=0,x);

 {-0.5137244473, -3.639657308, 4.743357545 + 1.016232079*I,
 4.743357545 - 1.016232079*I}

f:=x^4/4-4*x^3/3-7*x^2/2+20*x+11:
g:=numeric::solve(f=0,x)

g[1] = -0.5137244473

g[2] = -3.639657308 usw.
```

7. Mit subs(f, x = -6) bestimmen wir, ob x = - 6 eine Lösung der gegebenen Gleichung ist.

```
f:=x^3-35*x^2-206*x+240:
solve(f=0,x);
subs(f,x=-6);
subs(f,x=1);
subs(f,x=40);
```

Da {-6,1,0} die Lösungsmenge der Gleichung f = 0 ist, ergeben die drei Substitutionen jeweils 0.

Falls Sie mit Scientific WorkPlace (SWP) arbeiten, so finden Sie eine ausführliche Darstellung zur Geschwindigkeit unter *Help Search* > *tangent line, formula for slope*