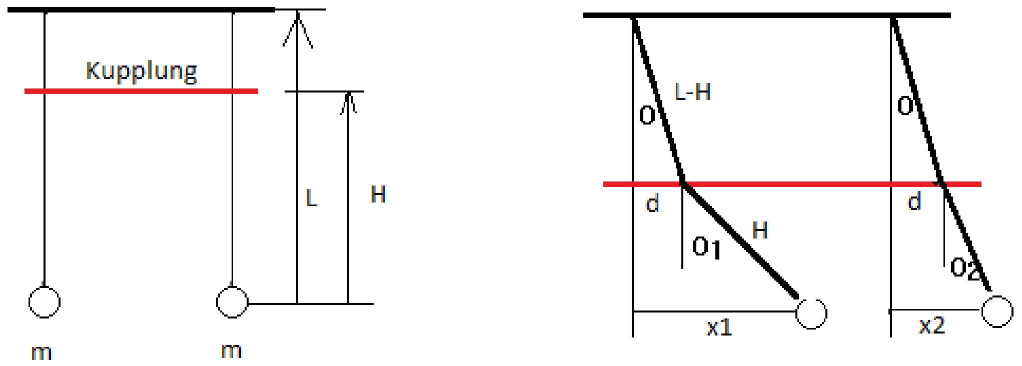
Gekoppelte Pendel

Die Figur zeigt zwei identische Pendel, die mithilfe eines leichten Stäbchens (oder Strohhalms) miteinander gekoppelt sind (man kann Garnfäden einfach um den Halm wickeln).



1.1 Wir verschieben eines der Pendel, z.B. das rechte, um das Stück x_2 (ca. 5cm). Wir halten das Pendel 2 mit einem Elektromagneten fest. Nach dem Freilassen von Pendel 2 wird auch das erste Pendel über die Kupplung (Strohhalm) zum Schwingen angeregt. Die Amplitude von Pendel 2 nimmt allmählich ab, während die von Pendel 1 wächst. Später tauschen die Pendel ihre Rollen: das erste wird das zweite anregen, und der Vorgang wird sich wieder-holen, denn die Pendel sind identisch. Man beobachtet Pulsationen der Periode τ (Tau).
Vgl.: https://www.walter-fendt.de/html5/phde/coupledpendula_de.htm
1.2 Es ist empfehlenswert, L=0.7m zu wählen. Wir bestimmen für verschiedene H-Werte die Periode der Pulsationen (messe τ von Minimum zu Minimum). Hier ist das Beispiel einer Messung:

L=0.7 m

H/m	$(H/m)^{-1/2}$	t für 10 Osz.	τ/s	f_{exp}/s^{-1}	$f_{theor.}/s^{-1}$
0.65	1.24	488.0	48.8	0.0205	0.0225
0.60	1.29	227.0	22.7	0.044	0.0477
0.50	1.35	141.6	14.2	0.0706	0.0764
…					
0.25	2.0	23.8	2.38	0.42	0.40
0.20	2.24	19.6	1.96	0.51	0.52

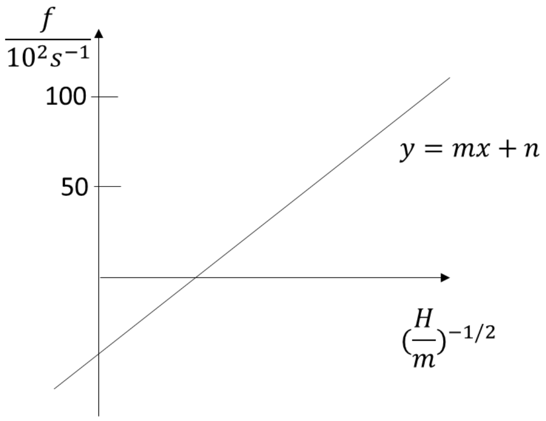
Die theoretischen Frequenzen f_{theor} berechnen wir mit der folgenden Formel

$$(1) \qquad f_{theor} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{H}} - \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{(vgl. den Beweis auf S.4/5)}$$

Im algemeinen stimmen die Werte von f_{exp} und f_{theor} recht gut überein.

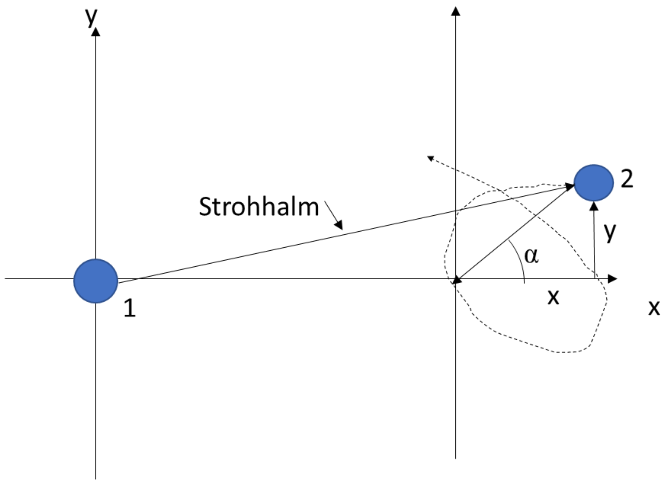
Der Graph von f_{exp} gegen $H^{-1/2}$ muss eine Gerade sein, denn man kann Formel (1) in folgende Gestalt bringen: (2) $f = mH^{-1/2} + n$ mit $m = \frac{\sqrt{g}}{2\pi}$ = *Steigung* und

und $n = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$ ist der Y-Achsenabschnitt (=Frequenz)



1.3 Mit Hilfe der linearen Regression bestimmen wir m und n.
Mit m können wir einen experimentell bestimmten Wert für g erhalten. Wenn wir diesen Wert in die Gleichung $n = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$ einsetzen, erhalten wir einen Wert für L, den wir mit dem anfangs gemessenen Wert vergleichen können.

1.4 Wir geben dem zweiten Pendel jetzt eine schräge Auslenkung:



Für α = 90° ergibt sich eine schwache Kopplung, das Pendel wird eine einfache hermonische Bewegung ausführen. Für $0 < \alpha < 90°$ können wir die Bewegung des Pendels Nr. 2 in eine Komponente x (stark gekoppelt) und eine Komponente y (ohne Kopplung) zerlegen.

(3) $$y = y_0 \cos \omega_2 t; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}} \;;\; \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{H}}$$

$$x = \left[x_0 cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\ t\right)\right] \cdot cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\ t\right)$$

In der eckigen Klammer steht die variable Amplitude.

Die Position (x,y) des zweiten Pendels können wir für jeden Zeitpunkt t berechnen.
Die resultierende Bahn ist eine Lissajous (1822-1880)-Kurve.

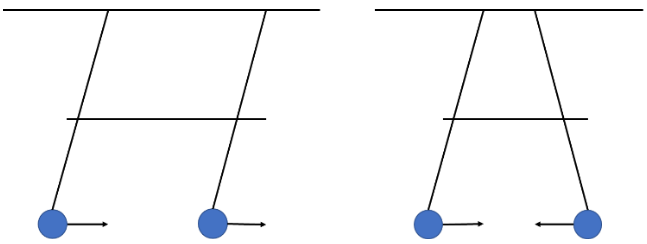
Wikipedia (Google)

1.5 Zeichne die Bewegung des Pendels auf ein Blatt Papier. Pendel 1 hat keine senkrechte Komponente in Bezug auf die Gleichgewichtsebene Y= 0. Aber es bewegt entlang der X-Ebene mit Pulsierungen gemäß der folgenden Gleichung

(4) $$x = \left[x_0 sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot\ t\right)\right] \cdot sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right)$$

Vgl. auch „Excel und VBA“ von F.J. und M.T. Mehr, S.195

1.6 Wir lenken nun beide Pendel gleichzeitig aus und registrieren die Schwingungen.



Nr.1 Nr.2

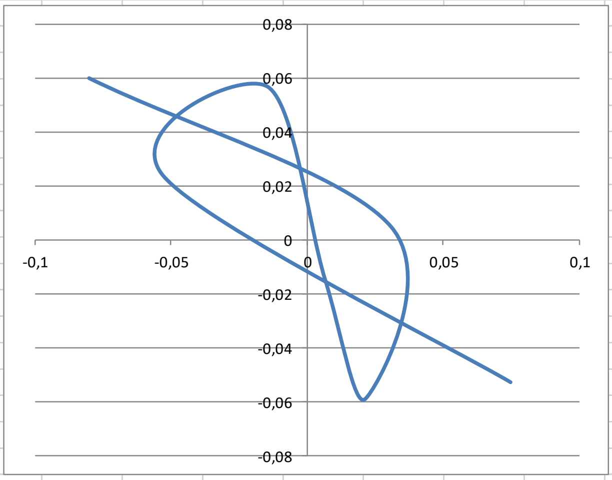
Miss bei jedem Pendel die Frequenz und beobachte die Bewegungsphase. L= 60cm; H=30cm

(Diese Schwingungsmoden werden Normalmoden genannt, und die entsprechenden Frequenzen heißen Eigenfrequenzen des Systems. In **einer** Normalmode schwingen die Pendel in Phase und die Frequenz ist die eines einfachen Pendels der Länge L.
In der **anderen** Mode schwingen die Pendel in Gegenphase mit der Frequenz eines einfachen Pendels der Länge H. Diatomare Moleküle (O_2, HCl usw.) schwingen wie unsere Pendel 1 und 2.)

x0=	-0,08	w1	5,2942
y0=	0,06	w2	1,18382
a=	-37		
L=	7		
H=	0,35		
T=	4,05		

Lissajous-Figuren

t	x	y
0	-0,08	0,06
4,05	0,03083	0,00492
8,1	0,02129	-0,0592
12,15	0,00663	-0,0146
16,2	-0,0144	0,0568
20,25	-0,0529	0,02394
24,3	0,07476	-0,0529
28,35		
32,4		
36,45		
40,5		
44,55		
48,6		
52,65		
56,7		
60,75		
64,8		
68,85		



Diese Abbildung ist eine Excel-Auswertung der beiden Formeln (3) mit den Anfangswerten

x0 = -0.08 m	α = -36.86°	H = 0.35m
y0 = 0.06 m	L = 0.7m	T= 4.05 s

t=0 =F$1*COS(((I$1-I$2)/2)*A10)*COS(((I$1+I$2)/2)*A10)

Theorie:

Die Gleichung für die Bewegung eines einfachen Pendels der Länge H lautet:

(5) $\ddot{x} = -\frac{g}{H}x$

Für gekoppelte Pendel haben wir

(6) $\ddot{x}_1 = -\frac{g}{H}(x_1 - d);\quad \ddot{x}_2 = -\frac{g}{H}(x_2 - d)$

Wir nehmen dabei an, dass die Pendel sich immer in einer Gleichgewichtsebene befinden. Wenn wir die beiden Gleichungen (6) subtrahieren, erhalten wir

(7) $\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{g}{H}(x_1 - x_2)$

Diese Gleichung beschreibt die Normalmode, für die immer $x_1 = -x_2$ gilt.

Die Schwingungsfrequenz ist $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{H}}$ d.h. $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{H}}$.

Wenn wir jetzt die beiden Gleichungen (6) addieren, folgt $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{g}{H}(x_1 + x_2 - 2d)$

Mit $\Theta_1 \sim \Theta_2$ ergeben sich $\frac{x_1 - d}{H} \sim \frac{x_1}{L}$ und $\frac{x_2 - d}{H} \sim \frac{x_2}{L}$.

Also: $x_1 + x_2 - 2d = x_1 - d + x_2 - d = \frac{H}{L}(x_1 + x_2)$

oder (8) $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{g}{L}(x_1 + x_2)$

Mit den Anfangsbedingungen t= 0; $x_1(0)=0$; $x_2(0)=A_0$ ergeben sich die Gleichungen

(9) $x_1 = [A_0 sink_1 t]\, sink_2 t$
(10) $x_2 = [A_0 cosk_1 t] cosk_2 t$

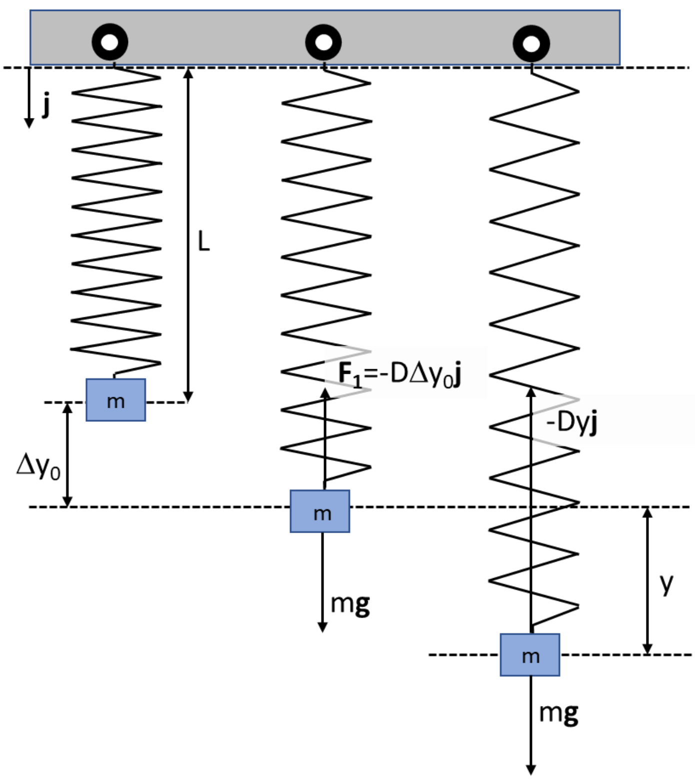
hierin sind: $k_1 := \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$ und $k_2 := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi}$

Die Frequenz der Pulsationen ergibt sich zu

(11) $f = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{H}} - \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$ q.e.d.

Federpendel

Eine Masse m hängt an einer Spiralfeder. L ist die Länge der Feder. Beim Ahängen der Masse m dehnt sich die Feder um das Stück Δy_0 . In der Ruhelage (Nullniveau) wirken auf die Masse m die Federkraft $\mathbf{F_1} = -D\,\Delta y_0\,\mathbf{j}$ und die Gewichtskraft $m\mathbf{g} = mg\mathbf{j}$. D ist die Feder-konstante (Richtgröße). In der Ruhelage haben wir $\mathbf{F_1} + m\mathbf{g} = \mathbf{0}$, oder $mg\,\mathbf{j} - D\,\Delta y_0\,\mathbf{j} = \mathbf{0}$



Damit ergibt sich D aus der Beziehung $D = \frac{mg}{\Delta y_0}$. Die Einheit ist $N \cdot m^{-1}$.
Die y-Achse (Einheitsvektor **j**) ist nach unten orientiert. Wenn wir keine Reibung zu berücksichtigen haben, ergibt das 2. Newtonsche Gesetz: ma = -Dy; a = Beschleunigung ($\ddot{y}$)

Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet: $y = Asin\frac{2\pi}{T}t$; $A=y_0$ = Amplitude (= Scheitelwert der Schwingung); T = Periodendauer = Zeit für eine volle Schwingung. f = 1/T = *Frequenz.*
Die Größe $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ heißt *Kreisfrequenz* der harmonischen Schwingung. Sie ist gleich der Anzahl der Schwingungen in 2π Sekunden.

Wenn die Schwingung zur Zeit t=0 bereits einen Anfangswert hat (eine Anfangsphase), so haben wir dies in der Bewegungsgleichung durch eine *Phasenkonstante* α zu berücksichtigen:

(12) $$y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

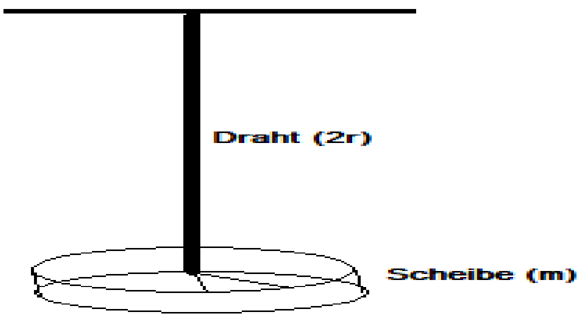
Man kann jede Sinusschwingung auch als eine Kosinusschwingung auffassen, denn es gilt
$$y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) = A \cdot cos\left[\omega t + \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Auch durch Messung der Frequenz können wir die Federkonstant D bestimmen, denn es ist

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Torsionspendel

Ein Metallstab ist mittig auf eine Metallscheibe aufgeschweißt und oben an einer stabilen Halterung befestigt. Will man die Scheibe um einen (kleinen!) Winkel φ (rad) drehen (vielleicht mit Lichtzeiger anzeigen), so ist der Betrag des nötigen Drehmoments $M = D_r\,\varphi$. D_r (Einheit: $Nm \cdot rad^{-1}$) ist die sogenannte Winkelrichtgröße. Für Stäbe oder Drähte mit dem Radius r und der Länge L gilt: $D_r = \frac{r^4\pi}{2L}G$. Die Materialkonstante G ist der Torsionsmodul (G-Modul).Wenn die verdrehende Kraft F senkrecht im Abstand R vom Scheibenmittelpunkt angreift und die Torsion φ erzeugt, so gilt $D_r = \frac{F \cdot R}{\varphi}$ $Nm \cdot rad^{-1}$



Wenn man den einseitig eingespannten Stab (dicker Draht) los lässt, kommt es zu einer Torsionsschwingung.

Analog zum Federpendel lautet die Bewegungsgleichung $Ia \;=\; -D_r\varphi$ mit I = Trägheitsmoment und a = $\ddot{\varphi}$ = Winkelbeschleunigung rad/s^2. Die Lösung der Gleichung lautet

(13) $$\varphi = A\sin\frac{2\pi}{T}t; \quad A = \varphi_0 = Amplitude$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D_r}{I}} = Frequenz$$

Bewegung unter Einfluss von Reibung

Wenn eine Reibungskraft $F_r = -k\dot{x}$ bzw. $F_r = -k_r\dot{\varphi}$ zu berücksichtigen ist, lauten die Bewegungsgleichungen $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$ bzw. $I\ddot{\varphi} = -D_r\varphi - k_r\dot{\varphi}$ $\quad k\; bzw.\, k_r = Reibungskoeffizienten$

Die Lösungen der Gleichungen lauten beim *Federpendel*

(14) $$x = A\cos\frac{2\pi}{T}t\,; A = x_0e^{-\delta t};\; \delta = \frac{k}{2m}\,; f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}$$

und beim *Torsionspendel*:

(15) $$\varphi = A\cos\frac{2\pi}{T}t\,; A = \varphi_0e^{-\delta t};\; \delta = \frac{k_r}{2I}\,; f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D_r}{I} - \left(\frac{k_r}{2I}\right)^2}$$

δ = Dämpfungsfaktor; $1/\delta = \tau$ = Zeitkonstante (Relaxationszeit)

Während der Zeit τ nimmt die Auslenkung in Bezug auf die Ruheposition e ~ 2.72 -mal ab.

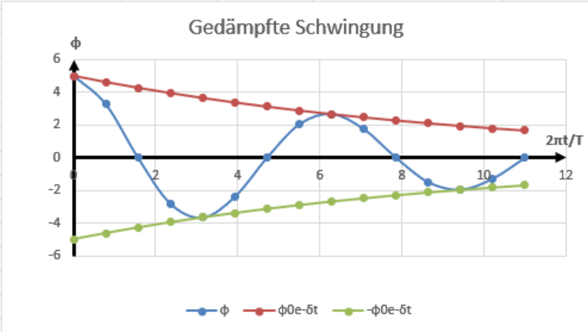
Wenn F_r so groß ist, dass $\frac{k^2}{4m^2} \geq \frac{D}{m}$, so ist keine Schwingungsbewegung möglich, es handelt sich dann um den aperiodischen Grenzfall.
Sehr schöne Animationen finden Sie in
https://de.wikipedia.org/wiki/Schwingung#Linear_ged%C3%A4mpfte_Schwingung

Wir machen es einfacher, indem wir eine Excel-Tabelle mit Graphen anlegen.
Die nötigen Formeln lauten bei unserer Tabelle:

Formeln:

C8: =$D$5*EXP(-$D$3*B8)*COS(B8)
D8: =$D$5*EXP(-$D$3*B8)
E8: =-$D$5*EXP(-$D$3*B8)

	A	B	C	D	E
1					
2			2π	6,28318531	
3			δ	0,1	
4			T	2	
5			φ_0	5	
6					
7	**t**	**2πt/T**	**φ**	**φ_0e¯δt**	**-ϕ_0e-δt**
8	0	0	5	5	-5
9	0,25	0,78539816	3,26847824	4,62232625	-4,62232625
10	0,5	1,57079633	2,6176E-16	4,27318	-4,27318
11	0,75	2,35619449	-2,79335916	3,95040641	-3,95040641
12	1	3,14159265	-3,65201346	3,65201346	-3,65201346
13	1,25	3,92699082	-2,3873053	3,37615953	-3,37615953
14	1,5	4,71238898	-5,7358E-16	3,12114217	-3,12114217
15	1,75	5,49778714	2,04027705	2,88538748	-2,88538748
16	2	6,28318531	2,66744046	2,66744046	-2,66744046
17	2,25	7,06858347	1,74369422	2,46595601	-2,46595601
18	2,5	7,85398163	6,9824E-16	2,27969064	-2,27969064
19	2,75	8,6393798	-1,49022385	2,10749478	-2,10749478
20	3	9,42477796	-1,94830569	1,94830569	-1,94830569
21	3,25	10,2101761	-1,27359895	1,8011409	-1,8011409
22	3,5	10,9955743	-7,1399E-16	1,66509218	-1,66509218



(15.1) Die Amplitude φ_1 entspricht der Zeit t_1 mit $\frac{2\pi}{T}t_1 = \pi$, d.h.: $t_1 = T/2$

(15.2) Die Amplitude φ_2 entspricht der Zeit t_2 mit $\frac{2\pi}{T}t_2 = 2\pi$, d.h.: $t_2 = T$

(15.3) Die Amplitude φ_3 entspricht der Zeit t_3 mit $\frac{2\pi}{T}t_3 = 3\pi$, d.h.: $t_3 = 3T/2$ usw.

(16) Für den Quotienten der Auslenkungen erhalten wir

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_3} = \frac{\varphi_0\, e^{-\delta T/2}}{\varphi_0\, e^{-3\delta T/2}} = e^{\frac{3\delta T}{2} - \frac{\delta T}{2}} = e^{\delta T}\ ;\quad \delta = Abklingkoeffizient$$

Das *logarithmische Dekrement* λ ist der Logarithmus dieses Ausdrucks: $\lambda := ln\frac{\varphi_1}{\varphi_3} = \delta T$