

## Trägheitsmoment und Drehschwingungen

### 1. Allgemeine Erklärungen

1.1 Ein Körper, der an einer Spiralfeder befestigt ist, kann Drehschwingungen ausführen.

Die Periode dieser Schwingungen ist gegeben durch

$$1. \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D_r}}$$

$J$  ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse.  $D_r$  ist die Federkonstante (Richtmoment) und ist folgendermaßen definiert:

$$2. \quad D_r := \frac{M}{\varphi}$$

$M$  ist das Drehmoment:  $M = F \times d$ , wobei  $F$  senkrecht auf  $d$  steht.  $\varphi$  = Drehwinkel (in Radian)

Wenn der schwingende Körper aus zwei Teilen besteht ( $J_1$  und  $J_2$  sind die Trägheitsmomente dieser Teile), haben wir

$$3. \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 + J_2}{D_r}}$$

1.2 Mit Hilfe der Gleichungen 1 und 3 können wir  $J := J_{\text{exp}}$  messen, wenn wir  $D_r$  kennen.

Den Wert von  $J_{\text{exp}}$  können wir mit dem *berechneten* Wert vergleichen, wenn der Körper eine einfache geometrische Form hat (Stab, Kugel, Scheibe usw.)

1.2.1 In diesem Experiment messen wir  $J$  für einen Vollzylinder, Hohlzylinder und eine Scheibe, die wir als einen Vollzylinder ansehen können.

Die Theorie (vgl. Anhang) liefert:

$$4. \quad J_{\text{Hohlzylinder}} = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2)$$

$$5. \quad J_{\text{Vollzylinder}} = \frac{m}{2} R^2$$

$m$ ,  $R$  = Masse und Radius des Körpers

Wenn  $d$  die Wandstärke des Hohlzylinders (= Rohr) ist, gilt  $d = R_2 - R_1$

und  $J_{\text{Rohr}} = m (R_2 - d/2)^2$ ;  $R_2$  = Außenradius.

Ehe wir die Messungen durchführen, müssen wir  $D_r$  bestimmen (d.h. die Spiralfeder „eichen“, vgl. 2.2)

1.3 Wenn wir einen Körper an einem Draht (Länge =  $l$ , Durchmesser =  $2r$ ) aufhängen, können wir den *Torsionsmodul*  $G$  des Drahtes bestimmen, indem wir die *Periode*  $T$  der Schwingungen bestimmen, denn es gilt

$$6. \quad G = 8\pi \frac{l}{r^4} \frac{J}{T^2}$$

Fig. 2

Außer  $T$  müssen wir auch das *Trägheitsmoment*  $J$  kennen.  
Den Wert von  $D_r$  können wir mit Hilfe von Formel 1 finden:

$$7. \quad D_r = 4\pi^2 \frac{J}{T^2}$$

Das *Trägheitsmoment* einer Kugel berechnet man mit

$$8. \quad J_{Kugel} = \frac{2}{5} mR^2, \text{ vgl. Anhang}$$

## 2. Die Messungen

2.1 Zuerst hat man die Massen und die Dimensionen (Radius, Dicke, Höhe) der zu untersuchenden Körper zu bestimmen, d.h. für Holzscheibe, Vollzylinder aus Holz, Hohlzylinder aus Eisen, Unterlage aus Aluminium und für Kugel aus Kunststoff (PVC). Auch müssen wir Durchmesser und Länge des Drahtes messen (vgl. 1.3).

### 2.2 Eichung der Spiralfeder.

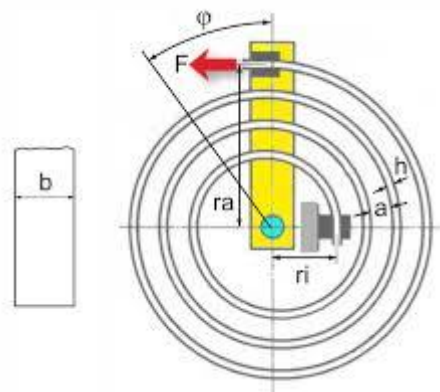


Fig: 3 (Google)

In vier verschiedenen Abständen  $r$  ( $= r_a$ ) von der „Drillachse“ (grün) wenden wir senkrechte Kräfte  $F_1, \dots, F_4$  an, die zu den Verformungen (Verdrillungen)  $\varphi_1 = \pi/2$  rad und  $\varphi_2 = \pi$  rad führen (die Winkel  $\varphi_i$  in Radiant). Es ist darauf zu achten, dass die Richtung von  $\varphi$  so sein muss, dass die Feder sich schließt. Wir berechnen  $D_r$  als Mittelwert der 8 Werte  $F_i d_i / \varphi_{1,2}$ .

2.3 Wir setzen die Holzscheibe auf die Achse und bestimmen T als Mittelwert aus 5 Messungen. Für jede Bestimmung von T zählen wir wenigstens fünf Schwingungen.

(Die Schwingungen sind sehr stark gedämpft, was die genaue Zeitmessung erschwert. Ich empfehle eine elektronische Messung von T mit Hilfe einer Fotodiode und elektronischem Zählgerät (z.B. die „Torsteuerung“ von Leybold) ).

2.4. Jetzt setzen wir die Grundscheibe auf die Achse und messen deren Periode wie in 2.3.

2.5. Setze den Vollzylinder auf die Grundscheibe und messe T. Dasselbe machen wir später mit dem Hohlzylinder.

2.6 Wir führen das in 1.3 beschriebene Experiment aus. Wir messen T und berechnen G und  $D_r$ . In einem Tabellenwerk finden wir  $G_{\text{Stahl}} \text{ ca. } 8 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ ;

$$G_{\text{Kupfer}} \text{ ca. } 4.5 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$$

### 3. Vergleich mit der Theorie

Die Auswertung der experimentellen Daten und der Vergleich mit der Theorie kann man folgendermaßen durchführen.

3.1 Metallische Grundscheibe ( $m = 0.123 \text{ kg}$ ;  $R = 0.05 \text{ m}$ ;  $T = 0.55 \text{ s}$ )

$$J_1 = \frac{1}{4\pi^2} D_r T^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 0.028 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \cdot 0.55^2 \text{s}^2 = 2.14 \cdot 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

3.2 Grundscheibe mit Hohlzylinder

$$m = 0.38 \text{ kg}; R_2 = 0.045 \text{ m}; d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}; T = 1.25 \text{ s}$$

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 0.028 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \cdot 1.25^2 \text{s}^2 = 11.08 \cdot 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$J_2 = (11.08 - 2.14) \cdot 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2 = 8.94 \cdot 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\text{Der berechnete Wert ist } J_2 = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2) = 7.36 \cdot 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

**Ergebnis:** Der berechnete Wert ist um ca. 18 % kleiner als der experimentelle Wert.

Ursachen könnten sein: ..... (Schätze auch das Trägheitsmoment der Achse!)

### 4.1 Anhang (Berechnung des Trägheitsmomentes J für Hohlzylinder und Kugel)

Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit dem inneren Radius  $R_1$  und dem äußeren Radius  $R_2$  (vgl. Fig.4) berechnet man mit der Formel

$$J = \int_{R_1}^{R_2} dJ = \int_{R_1}^{R_2} R^2 dm$$

Wir zerlegen den Zylinder in konzentrische Röhren vom Radius R und der Wandstärke dR. Die Masse dieser Elementarröhren ist  $dm = 2\pi R \cdot L \cdot \rho \cdot dR$

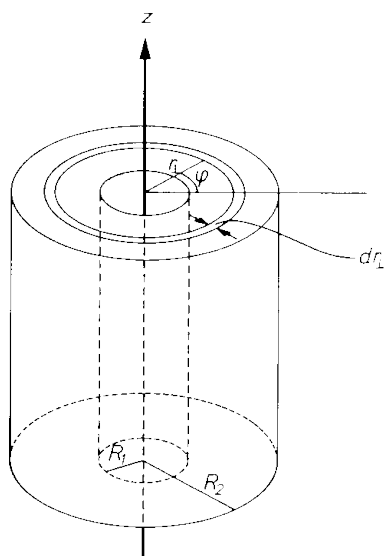


Fig. 4 (Google)

Das elementare Trägheitsmoment wäre dann  $dJ = dm R^2 = 2\pi\rho L R^3 dR$

Das Trägheitsmoment des Hohlzylinders ist  $J = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho L R^3 dR = 2\pi\rho L \left( \frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right)$

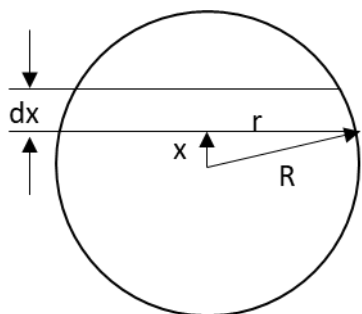
(Beim Vollzylinder wäre  $R_1 = 0$ .)

Schließlich erhalten wir:

$$J = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

#### 4.2 Trägheitsmoment einer Kugel vom Radius R

Wir schneiden die Kugel in Kreisscheibchen der Dicke  $dx$  und dem Radius  $r$ . Die Summe wird von  $-R$  bis  $R$  gebildet.



$$dJ = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} dm (R^2 - x^2)$$

$$dm = \rho r^2 \pi dx = \rho \pi (R^2 - x^2) dx$$

$$J = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx$$

$$= \rho \pi \int_0^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx$$

$$= \frac{\rho \pi}{15} 8R^5 \wedge \rho = \frac{m}{\frac{4}{3} R^3 \pi}$$

$$J = \frac{2}{5} m R^2$$

4.3 Das zweite Newtonsche Gesetz für reibungsfreie Drehschwingungen lautet

$$J\alpha + D_r \varphi = 0; \quad \alpha = \text{Winkelbeschleunigung} = \ddot{\varphi}$$

$$\text{d.h. } \ddot{\varphi} + \frac{D_r}{J} \varphi = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet:  $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$  mit  $\omega := 2\pi/T$  und  $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D_r}}$  (7)

4.4 Für die **elektronische Messung** der Periode T drücken wir die Tasten T3 und T6 der Torsteuerung (Gate) (rechts) an der die Fotodiode (gelbe Buchsen) angeschlossen wird.



Elektronischer Zähler mit Gate (Leybold)



Fotodiode

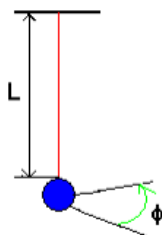


Zählgerät

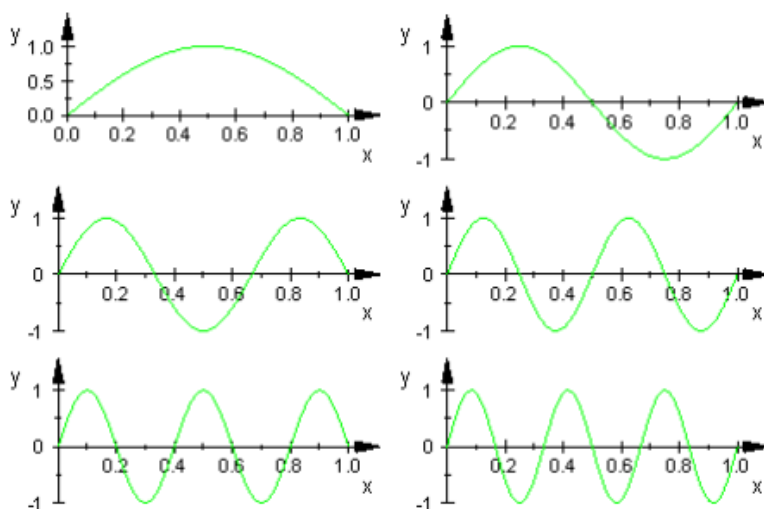
Zu dem Kapitel **Schwingungen** siehe auch

[http://www.instructioneducation.info/Mechdtsch/kap6\\_3.pdf](http://www.instructioneducation.info/Mechdtsch/kap6_3.pdf)

### Torsionspendel



## Stehende Wellen ([http://www.instructioneducation.info/Mechdtsch/kap7\\_2.pdf](http://www.instructioneducation.info/Mechdtsch/kap7_2.pdf))



$f_1$  = Grundfrequenz (oben links; eine Halbwelle);  $L = \frac{1}{2} \lambda_1$ ;

$f_2$  = erster „Oberton“ (Harmonische);  $L = 1 \cdot \lambda_2$  ;

$f_3$  = zweiter „Oberton“;  $L = \frac{3}{2} \cdot \lambda_3$  usw.  $L$  = Seillänge



Versuchsaufbau zur Erzeugung stehender Wellen (Foto nach Google). Magnet oder Motor z.B. von Leybold oder Phywe.

Vgl.: <https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-wellen/stehende-wellen-einfuehrung>

Das linke Seilende wird über einen Elektromagneten, der an einer Wechselstromquelle  $f$  angeschlossen ist, zu Schwingungen (1)  $y = y_0 \sin(2\pi ft)$  angeregt. Auf dem Seil breitet sich mit der Geschwindigkeit  $v$  eine Transversalwelle aus. An der (roten) Rolle wird die Welle reflektiert und interferiert mit einer ankommenden Welle.  $P$  sei ein Punkt auf dem Seil, der von der Rolle den Abstand  $x$  hat.  $C$  Die Frequenz ist „quantisiert“.

Die von links nach rechts laufenden Wellen haben die Gleichungen

$$(2) \quad y_i = y_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{L-x}{\lambda} \right)$$

Die Bewegung des Punktes  $P$  ist gegeben durch

$$(3) \quad y = y_i + y_r \quad , \text{ wobei } y_r \text{ die an der Rolle reflektiert Welle ist.}$$

$$(4) \quad y_r = -y_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{L+x}{\lambda} \right)$$

Für die Summe (3) ergibt sich

$$(5) \quad y = 2y_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}\right)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Schwingung  $\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}\right)$  mit der veränderlichen Amplitude  $2y_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ .

Die resultierende Erscheinung nennt man *stehende Welle*. Die Amplitude dieser Welle ist Null, wenn  $\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$ , d.h. für  $x = n\frac{\lambda}{2}$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$

An diesen Stellen finden wir „Knoten“ der Schwingung. Die Entfernung zweier aufeinander folgender Knoten beträgt  $\lambda/2$ . Die Angriffsstelle des Oszillators ( $x = L$ ) und der Ort der Rolle sind Knoten. Daraus folgt  $2\pi\frac{L}{\lambda} = k\pi$ , d.h.  $L = k\frac{\lambda}{2}$  mit  $k = 1, 2, 3, \dots$ , d.h.: die Seillänge muss ein Vielfaches von  $\lambda/2$  sein;  $k$  ist gleich der Anzahl der „Bäuche“, die sich auf dem Seil bilden. Die Amplitude gehorcht der Gleichung

$$(6) \quad y_A = A \sin\frac{k\pi x}{L}; \quad A = 2y_0; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Mit einem Stroboskop kann man nachweisen, dass alle Seilpunkte mit derselben Frequenz schwingen wie der Anreger der Schwingung.

Die **Geschwindigkeit** der  $v$  der Wellenausbreitung hängt von der Seilspannung ab, d.h.  $v$  ist eine Funktion der Kraft  $F = m \cdot g$ , die die angehängte Masse  $m$  auf das Seil ausübt. Man hat auch die Masse des Seils zu berücksichtigen. Wenn wir mit  $\mu$  die „lineare Masse“ des Seils bezeichnen (d.h. die Masse von einem Meter), ergibt sich  $v = v(F, \mu)$ ;  $F$  in Newton,  $\mu$  in kg/m. Die Einheiten ergeben sich wie folgt:

$$\text{Einheit von } v = \text{Länge/Zeit} := L/T; \quad \text{Einheit von } F = \text{Masse} \cdot \text{Länge/Zeit}^2 := M \cdot L/T^2$$

$$\text{Einheit von } \mu = \text{Masse/Länge}.$$

Die einzige Möglichkeit,  $L/T$  zu erhalten, ist die Division  $F/\mu$ . Dabei ergibt sich  $L^2/T^2$ .

Die Schlussfolgerung ist:  $v \approx \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ , d.h.  $v = c\sqrt{F/\mu}$ ;  $c =$  Proportionalitätskonstante

Den Wert der Proportionalitätskonstanten muss *experimentell* bestimmt werden.

Eine recht genaue Methode,  $c$  zu messen, besteht in der Bestimmung der Frequenz  $f$ .

Einerseits gilt  $\lambda = v/f$ , andererseits sahen wir, dass  $L = k\lambda/2$  oder  $\lambda = 2L/k$ .

Wenn wir das alles einsammeln, ergibt sich:

$$(7) \quad v = \lambda f = \frac{2L}{k} f = c \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{oder} \quad \boxed{f = \frac{ck}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Wenn die Saite schwingt, bewegen sich ihre Punkte mit einer Geschwindigkeit  $v_{tr}$  senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Wellen  $y_r$  und  $y_i$ .

Für  $v_{tr}$  erhalten wir  $v_{tr} = \frac{dy}{dt} = y_0' \cdot 2\pi f \cdot \cos(2\pi ft)$ , worin  $y_0'$  die Schwingungsamplitude des betrachteten Punktes. Die Geschwindigkeit ist maximal, wenn  $\cos(2\pi ft) = \pm 1$ .

*Beispiel:* Die Amplitude der Schwingungsbäuche sei  $y_0' = 20\text{mm}$ .

Berechne die max. Geschwindigkeit eines Seilpunktes, der einem Bauch entspricht ( $f = 80\text{ Hz}$ ).

*Lösung:*

$$v_{tr,max} = y_0' \cdot 2\pi f = 2 \cdot 10^{-2}\text{m} \cdot 2\pi \cdot 80\text{s}^{-1} = 10\text{m/s}$$

### Das Experiment:

Wir verwenden einen Nylonfaden von etwa 0.5 mm Durchmesser; Länge etwa 2 m angehängte Masse zwischen 0.2kg und 1kg.

Wir bestimmen die Seilmasse  $m$  und berechnen  $\mu$ .

**Konkretes Beispiel:**  $m = 0.5\text{ kg}$ ;  $L = 1.3\text{ m}$ . Wir erregen den Faden zu  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  Bäuchen. Für jede „Eigenschwingung“, d.h. für jeden Wert von  $k$ , bestimmen wir die Erregerfrequenz des Generators (Kontrolle mit einem Stroboskop).

Lege eine Wertetabelle nach dem folgenden Muster an.

$m_{\text{Faden}} = \dots\text{ g}$		$L_{\text{total}} = \dots\text{ m}$		$\mu = \dots\text{ kg m}^{-1}$	
L=1.30m (z.B.)		m = 0.5kg		$F = 0.5\text{kg} \cdot 9.81\text{ ms}^{-2} = 4.905\text{ N}$	
k	$\lambda_k = 2L/k$	$f_{\text{exp}}$	c nach Gl. 7 mit $f_{\text{exp}}$	$v = \lambda_k \cdot f_{\text{exp}}$	v nach Gl. (7)
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Man wiederholt das Experiment mit anderen Werten von  $m$  (0.2kg, ..., 1kg).

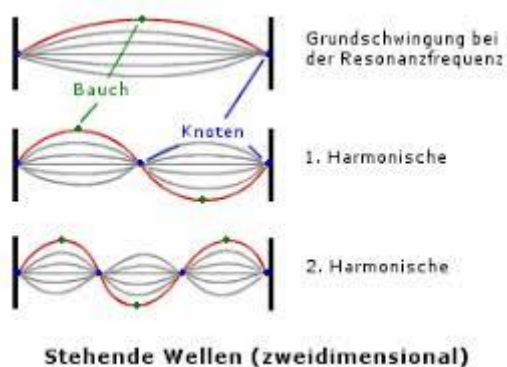
Trage  $f_k$  (Hz) (von 0 ...500) gegen  $\sqrt{F}$  ( $\text{N}^{1/2}$ ) (von 0 ...10) auf (mit  $k$  als Parameter) .

Zeichne für  $k = 3$  und  $m = 0.5\text{kg}$  die stehende Welle auf Papier, und vergleiche ihre Form mit der Funktion  $y_A = A \sin \frac{k\pi x}{L}$ . Berechne die maximale Geschwindigkeit  $v_{tr}$  eines Punkte, der zu einem Bauch gehört.

### Stehende akustische Wellen

Wenn wir einen Lautsprecher an einen Tonfrequenzgenerator anschließen und eine Tafel beschallen, so können wir vor der Tafel stehende Schallwellen beobachten (am besten mit einem Messmikrofon (Amazon), das über einen Messverstärker ein Anzeigegerät (Phywe) betreibt. (Vielleicht ist eine App, wie „Schallmessung“ für Android oder „Sound Meter“ für iOS kostenlos einsetzbar.)





<https://www.burosch.de/audio-technik/234-raumakustik-2-raumresonanzen-stehende-wellen.html>

1. Messe zwischen Mikrofon und Wand den Abstand der Knoten. (Der Abstand zweier Knoten ist  $\lambda/2$ .) Messe die Schallfrequenz, und berechne mit  $v = f \cdot \lambda$  die Schallgeschwindigkeit in der Luft bei der gegebenen Temperatur.

Vergleiche diesen Wert mit dem Wert, der sich mit folgender Formel ergibt:  $v = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0 d} \cdot \frac{T}{T_0}}$

Hierin bedeuten:

$\gamma$  = Koeffizient, der nur von der Struktur (Atomizität) des Gases abhängt  
( $\gamma=1.4$  für diatomare Gase wie  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ , Luft, ...)

$P_0$  = Normaler Luftdruck ( $1.01325 \cdot 10^5$  Pa)

$T_0$  = 273 K

$\rho_0$  = volumetrische Masse der Luft ( $1.293 \text{ kg/m}^3$ )

$d$  = Dichte des Gases in Bezug auf Luft

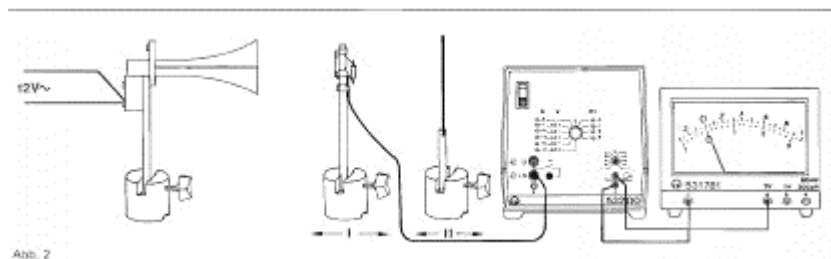
$T$  = abs. Temperatur des Gases ( $\vartheta+273$ )

$v$  = Geschwindigkeit ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

2. Untersuche das Feld der stehenden Mikrowellen, die sich dann bilden, wenn Mikrowellen ( $f=9.35\text{GHz}$ ) von einer Metallplatte reflektiert werden.

Bestimme mit  $c = \lambda \cdot f$  die Frequenz des Senders durch Messung von  $\lambda$ . ( $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ )

(Man benutzt eine Diode anstelle eines Mikrofons. Statt des Lautsprechers benutzen wir einen Mikrowellensender, z.B. Gunn-Diode). Hier ist der Leybold-Aufbau:



Leybold/Mikrowellenversuche